ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 และเลขโดด 3

Generalized Beauty: The Quotient of the Number That Every Digit is 1 by 37 and 3

ศุภารัตน์ เกษรพรม

ACADEMIC JOURNAL
UTTARADIT RAJABHAT UNIVERSITY
http://research.uru.ac.th

ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 และเลขโดด 3

Generalized Beauty: The Quotient of the Number That Every Digit is 1 by 37 and 3

ศุภารัตน์ เกษรพรม*
ชัญญา ตันวิรัตน์**
อัยเรศ เอี่ยมพันธ์***

บทคัดย่อ

จุดประสงค์หลักของบทความนี้เพื่อนำเสนอและหารูปทั่วไปของผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 และเลขโดด 3 ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลหารดังกล่าว ดังนี้
$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 37=\underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=n-1}3$ และ $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 3=\underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=n-1}37$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

คำสำคัญ : ผลหาร จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1

Abstract

The main aim of this article is to present and find on a general form of the quotient of the number that every digit is 1 by 37 and 3. The results show that a general form of this quotient is

$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 37=\underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=n-1}3$ and $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 3=\underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=n-1}37$ for all positive integer n.

Keyword : quotient, number that every digit is 1

---

*,**นิสิตปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา
***ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร., อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

บทนำและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

คำว่า “คณิตศาสตร์” ในความคิดของคนทั่วไป คือ การคำนวณ การคิดเลข หรือการพิสูจน์ที่ยุ่งยากสลับซับซ้อน โดยมักจะถูกมองว่าเป็นสิ่งที่น่าเบื่อ น่าปวดหัว ถึงแม้จะมีเทคนิคคิดเลขให้ง่าย รวดเร็ว แต่บางเทคนิคมีข้อจำกัดของตัวเลข หากเรามองอีกด้านของคณิตศาสตร์จะพบว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่แค่การคิดเลขธรรมดา แต่มีการศึกษาความสัมพันธ์ของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดดซ้ำ ๆ ซึ่งมีความยุ่งยากในการคำนวณหาผลลัพธ์ด้วยวิธีปกติ เราจึงสนใจที่จะศึกษาความสัมพันธ์ของผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 และเลขโดด 3

สำหรับการศึกษาและหารูปทั่วไปทางพีชคณิตของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 นั้น ได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ โดยได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ ซึ่งนิยามใน (1) สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ด้วยสัญลักษณ์ $a = {}_q r$ เมื่อ r และ q เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \le r < 10$ ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ ดังนี้ สำหรับการศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเริ่มเมื่อปี พ.ศ. 2554 โดยอัยเรศ (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(\underbrace{111...1}_{\#(1)=n})^2 = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321$$

โดยสัญลักษณ์ $\#(m)$ แทนจำนวนของ m ที่เรียงติดกัน สำหรับทุกจำนวนเต็ม m เช่น $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=6} = 111111$ เป็นต้น ธีระยุทธ และ อัยเรศ (ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+n \le 9$ จะได้ว่า

$$mn \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k} = m\underbrace{(m+n)(m+n)\ldots(m+n)}_{\#(m+n)=k-1}n$$

กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+1 = t, m+n = {}_r s$ และ $10 \le m+n \le 18$ จะได้ว่า

$$mn \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k} = (m+1)\underbrace{(r+s)(r+s)\ldots(r+s)}_{\#(r+s)=k-2}sn$$

อัยเรศ [3] ได้ศึกษาและหาความสัมพันธ์ของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบว่าความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \ge 2$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} = 9 \times 123\ldots(n-3)(n-2)(n-1) + n$$

โยธิน, ยุวเรศ และ อัยเรศ (โยธิน ใจอ่อน, ยุวเรศ งามทรง และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของสองจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $2 \le n \le m$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=m} = 123\ldots(n-1)\underbrace{nnn\ldots n}_{\#(n)=m-n+1}(n-1)\ldots321$$

ดังนั้นบทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปของผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 และเลขโดด 3 โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ได้แก่ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, W. E., 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a = b \cdot q + r \text{ และ } 0 \leq r < |b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, W. E., 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร และ (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554; ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b = 10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_q r \tag{1}$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & 20 = {}_2 0 & 60 = {}_6 0 & 180 = {}_{18} 0 & 200 = {}_{20} 0 \\
1 = {}_0 1 & 21 = {}_2 1 & 61 = {}_6 1 & 181 = {}_{18} 1 & 201 = {}_{20} 1 \\
2 = {}_0 2 & 22 = {}_2 2 & 62 = {}_6 2 & 182 = {}_{18} 2 & 202 = {}_{20} 2 \\
\vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots \\
9 = {}_0 9 & 29 = {}_2 9 & 69 = {}_6 9 & 189 = {}_{18} 9 & 209 = {}_{20} 9
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -60 = {}_{-6} 0 & -180 = {}_{-18} 0 & -200 = {}_{-20} 0 \\
-1 = {}_{-1} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -61 = {}_{-7} 9 & -181 = {}_{-19} 9 & -201 = {}_{-21} 9 \\
-2 = {}_{-1} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -62 = {}_{-7} 8 & -182 = {}_{-19} 8 & -202 = {}_{-21} 8 \\
\vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots \\
-9 = {}_{-1} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -69 = {}_{-7} 1 & -189 = {}_{-19} 1 & -209 = {}_{-21} 1
\end{array}$$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_0 r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \leq r < 10$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ

$$_{\mathbb{Z}}\mathcal{R} = \{ {}_{q}r \mid r, q \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \le r < 10 \} \qquad (2)$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ $_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (1) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะแนะนำการแปลงเลขจาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดดซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ $_{q}r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $174_{19}485_{4}88_{56}3_{74}35$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
174_{19}485_{4}88_{56}3_{74}35 &= 17(4+19)48(5+4)8(8+56)(3+74)35 \\
&= 17(23)4898(64)(77)35 \\
&= 17_{2}34898_{6}4_{7}735 \\
&= 1(7+2)3489(8+6)(4+7)735 \\
&= 193489(14)(11)735 \\
&= 193489_{1}4_{1}1735 \\
&= 19348(9+1)(4+1)1735 \\
&= 19348(10)51735 \\
&= 19348_{1}051735 \\
&= 1934(8+1)051735 \\
&= 19349051735
\end{aligned}$$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน $_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ โดย

$$_{q}r \boxplus {}_{t}s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \;\; ; & r+s \ge 10, r+s = {}_{b}a \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } {}_{q}r, {}_{t}s \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$$

บทตั้ง 1 กำหนดให้ $n \in \mathbf{N}$ ซึ่ง $n = {}_{q}r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ; \; r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \; r \ne 0 \end{cases} \qquad (3)$$

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเศษเหลือ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, m \in \mathbf{Z}$ ซึ่ง $0 \le s_i \le 9$ จะได้ว่า

$$ {}_m s_1 s_2 s_3 \ldots s_n = m \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \ldots s_n \tag{4}$$

ข้อสังเกตและผลการศึกษา

จากการสังเกตผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจดังนี้

$$\begin{array}{rcccl}
\#(1)=3: & 111 & \div\ 37\ = & 3 & :\#(300)=0 \\
\#(1)=6: & 111{,}111 & \div\ 37\ = & 3003 & :\#(300)=1 \\
\#(1)=9: & 111{,}111{,}111 & \div\ 37\ = & 3003003 & :\#(300)=2 \\
\#(1)=12: & 111{,}111{,}111{,}111 & \div\ 37\ = & 3003003003 & :\#(300)=3 \\
\#(1)=15: & 111{,}111{,}111{,}111{,}111 & \div\ 37\ = & 3003003003003 & :\#(300)=4 \\
\#(1)=18: & 111{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111 & \div\ 37\ = & 3003003003003003 & :\#(300)=5
\end{array} \tag{5}$$

และในทางกลับกัน เราพบผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยเลขโดด 3 ดังนี้

$$\begin{array}{rcccl}
\#(1)=3: & 111 & \div\ 3\ = & 37 & :\#(370)=0 \\
\#(1)=6: & 111{,}111 & \div\ 3\ = & 37037 & :\#(370)=1 \\
\#(1)=9: & 111{,}111{,}111 & \div\ 3\ = & 37037037 & :\#(370)=2 \\
\#(1)=12: & 111{,}111{,}111{,}111 & \div\ 3\ = & 37037037037 & :\#(370)=3 \\
\#(1)=15: & 111{,}111{,}111{,}111{,}111 & \div\ 3\ = & 37037037037037 & :\#(370)=4 \\
\#(1)=18: & 111{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111 & \div\ 3\ = & 37037037037037037 & :\#(370)=5
\end{array} \tag{6}$$

จากความสัมพันธ์ (5) เราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$\underbrace{111...1}_{\#(1)=3\cdot n} \div 37 = \underbrace{300300...300}_{\#(300)=n-1}3 \text{ สำหรับจำนวนเต็มบวก } n \text{ เมื่อ } n = 1,2,3,...,6$$

และจากความสัมพันธ์ (6) เราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$\underbrace{111...1}_{\#(1)=3\cdot n} \div 3 = \underbrace{370370...370}_{\#(370)=n-1}37 \text{ สำหรับจำนวนเต็มบวก } n \text{ เมื่อ } n = 1,2,3,...,6$$

ซึ่งเราได้สังเกตพบว่าผลหารของจำนวน $\underbrace{111...1}_{\#(1)=3\cdot n}$ เมื่อ $n = 1,2,3,...,6$ ด้วยจำนวน 37 ที่ได้จะเป็นจำนวน $3\cdot n-2$ หลัก โดยที่หลักหน่วยเป็นเลขโดด 3 และหลักที่เหลือจำนวน $3\cdot n-3$ หลักนั้นเป็นจำนวน 300 เรียงต่อกันจำนวน $n-1$ จำนวน และผลหารของจำนวน $\underbrace{111...1}_{\#(1)=3\cdot n}$ เมื่อ $n = 1,2,3,...,6$ ด้วยเลขโดด 3 ที่ได้

จะเป็นจำนวน $3\cdot n-1$ หลัก โดยที่สองหลักสุดท้ายเป็นจำนวน 37 และหลักที่เหลือจำนวน $3\cdot n-3$ หลักนั้นเป็นจำนวน 370 เรียงต่อกันจำนวน $n-1$ จำนวน

ฉะนั้น จากความสัมพันธ์ (5) และ (6) เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 และเลขโดด 3 ได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 และเลขโดด 3 ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลหารที่ได้จะมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (5) และ (6) ที่เราพบหรือไม่

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทหลักของบทความนี้ ซึ่งจะตอบข้อสงสัยข้างต้นของเราได้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 37=\underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=n-1}3$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 37=\underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=n-1}3 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เนื่องจาก $\underbrace{111}_{\#(1)=3(1)}\div 37 = 3 = \underbrace{300}_{\#(300)=0}3$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}\div 37=\underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=k-1}3$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot(k+1)} \div 37 &= (\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}000+111)\div 37 \\
&= \frac{\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}000+111}{37} \\
&= \frac{\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}000}{37}+\frac{111}{37} \\
&= \frac{\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}}{37}\cdot 1000+\frac{111}{37} \\
&= \underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=k-1}3\cdot 1000+3 \\
&= \underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=k-1}\ \underbrace{300}_{\#(300)=1}\ 0+3 \\
&= \underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=k}0+3 \\
&= \underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=(k+1)-1}3
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 37=\underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=n-1}3 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

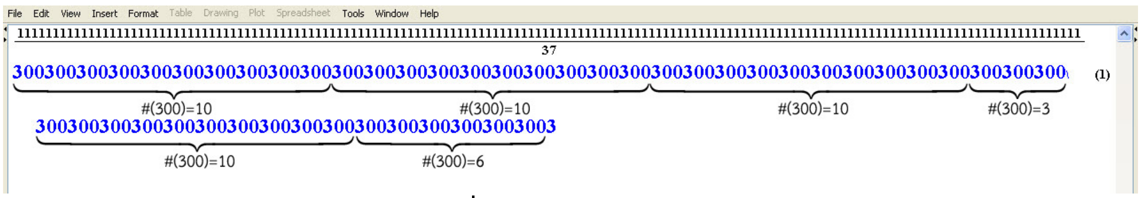
จากทฤษฎีบทข้างต้น เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3(50)}\div 37$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3(50)}\div 37=\underbrace{300300...300}_{\#(300)=49}3$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 1: $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3(50)}\div 37$

บทแทรก 5 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\underbrace{kkk\ldots k}_{\#(k)=3\cdot n}\div 37=\underbrace{(3\cdot k)00(3\cdot k)00\ldots(3\cdot k)00}_{\#((3\cdot k)00)=n-1}(3\cdot k)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

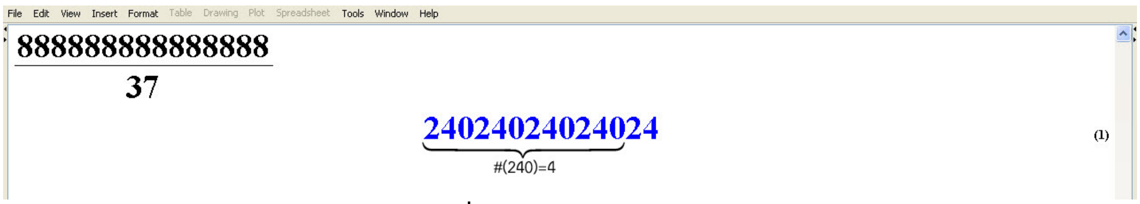
$$\begin{aligned}
\underbrace{kk k\ldots k}_{\#(k)=3\cdot n}\div 37 &= \underbrace{(\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=3\cdot n}+\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=3\cdot n}+\ldots+\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=3\cdot n})}_{k\text{ พจน์}}\div 37 \\
&= \underbrace{\underbrace{300300\ldots 300}_{\#(300)=n-1}3+\underbrace{300300\ldots 300}_{\#(300)=n-1}3+\ldots+\underbrace{300300\ldots 300}_{\#(300)=n-1}3}_{k\text{ พจน์}} \\
&= \underbrace{(3\cdot k)00(3\cdot k)00\ldots(3\cdot k)00}_{\#((3\cdot k)00)=n-1}(3\cdot k)
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=3(5)}\div 37$

วิธีทำ โดยบทแทรก 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=3(5)}\div 37 &= \underbrace{(3\cdot 8)00(3\cdot 8)00\ldots(3\cdot 8)00}_{\#((3\cdot 8)00)=4}(3\cdot 8) \\
&= \underbrace{(24)00(24)00\ldots(24)00}_{\#((24)00)=4}(24) \\
&= {}_2400{}_2400{}_2400{}_2400{}_24 \\
&= 24024024024024
\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



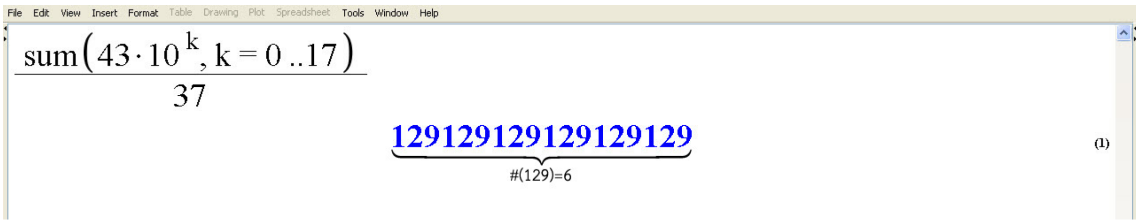
รูปที่ 2: $\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=3(5)}\div 37$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ $[(43\cdot 10^{17})+(43\cdot 10^{16})+(43\cdot 10^{15})+\ldots+(43\cdot 10)+43]\div 37$

วิธีทำ โดยบทแทรก 5 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&[(43\cdot 10^{17})+(43\cdot 10^{16})+(43\cdot 10^{15})+\ldots+(43\cdot 10)+43]\div 37\\
&=\underbrace{(43)(43)(43)\ldots(43)}_{\#(43)=3\cdot 6}\div 37\\
&=\underbrace{(3\cdot 43)00(3\cdot 43)00\ldots(3\cdot 43)00}_{\#((3\cdot 43)00)=5}(3\cdot 43)\\
&=\underbrace{(129)00(129)00\ldots(129)00}_{\#((129)00)=5}(129)\\
&={}_{12}900{}_{12}900{}_{12}900{}_{12}900{}_{12}900{}_{12}9\\
&=(12)90(12)90(12)90(12)90(12)90(12)9\\
&={}_{1}290{}_{1}290{}_{1}290{}_{1}290{}_{1}290{}_{1}29\\
&=129129129129129129
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 3: $[(43\cdot 10^{17})+(43\cdot 10^{16})+(43\cdot 10^{15})+\ldots+(43\cdot 10)+43]\div 37$

ทฤษฎีบท 6 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 3=\underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=n-1}37$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 3=\underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=n-1}37 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เนื่องจาก $\underbrace{111}_{\#(1)=3(1)}\div 3 = 370 = \underbrace{370}_{\#(370)=0}37$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}\div 3=\underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=k-1}37$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot(k+1)} \div 3 &= (\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}000+111)\div 3 \\
&= \frac{\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}000+111}{3} \\
&= \frac{\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}000}{3}+\frac{111}{3} \\
&= \frac{\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot k}}{3}\cdot 1000+\frac{111}{3} \\
&= \underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=k-1}37\cdot 1000+37 \\
&= \underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=k-1}\ \underbrace{370}_{\#(370)=1}\ 00+37 \\
&= \underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=k}00+37 \\
&= \underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=(k+1)-1}37
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

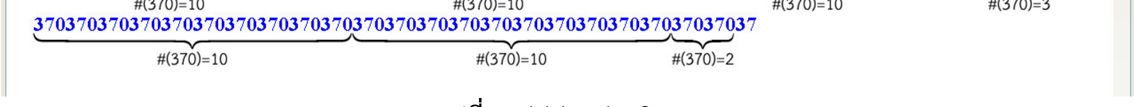
$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 3=\underbrace{370370\ldots370}_{\#(370)=n-1}37 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3(56)}\div 3$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3(56)}\div 3=\underbrace{370370...370}_{\#(370)=55}37$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4: $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3(56)}\div 3$

บทแทรก 7 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\underbrace{kkk\ldots k}_{\#(k)=3\cdot n}\div 3=\underbrace{(37\cdot k)00(37\cdot k)00\ldots(37\cdot k)00}_{\#((37\cdot k)00)=n-1}(37\cdot k)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

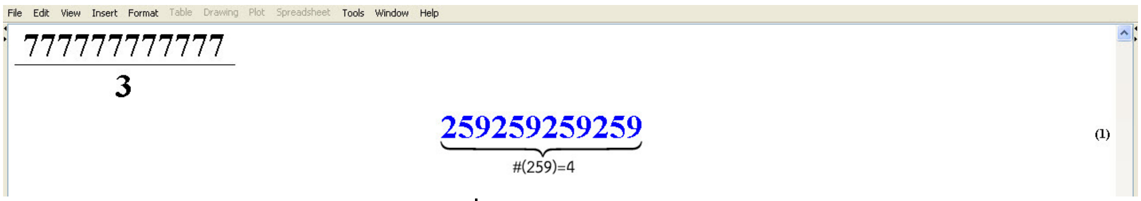
$$\begin{aligned}\underbrace{kkk\ldots k}_{\#(k)=3\cdot n}\div 3 &= (\underbrace{\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=3\cdot n}+\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=3\cdot n}+\ldots+\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=3\cdot n}}_{k\ \text{พจน์}})\div 3\\ &= \underbrace{\underbrace{37003700\ldots 3700}_{\#(3700)=n-1}37+\underbrace{37003700\ldots 3700}_{\#(3700)=n-1}37+\ldots+\underbrace{37003700\ldots 3700}_{\#(3700)=n-1}37}_{k\ \text{พจน์}}\\ &= \underbrace{(37\cdot k)00(37\cdot k)00\ldots(37\cdot k)00}_{\#((37\cdot k)00)=n-1}(37\cdot k)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{777\ldots 7}_{\#(7)=3(4)}\div 3$

วิธีทำ โดยบทแทรก 7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\underbrace{777\ldots 7}_{\#(7)=3(4)}\div 3 &= (37\cdot 7)00(37\cdot 7)00(37\cdot 7)00(37\cdot 7)\\ &= (259)00(259)00(259)00(259)\\ &= {}_{25}900{}_{25}900{}_{25}900{}_{25}9\\ &= (25)90(25)90(25)90(25)9\\ &= {}_{2}590{}_{2}590{}_{2}590{}_{2}59\\ &= 259259259259\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



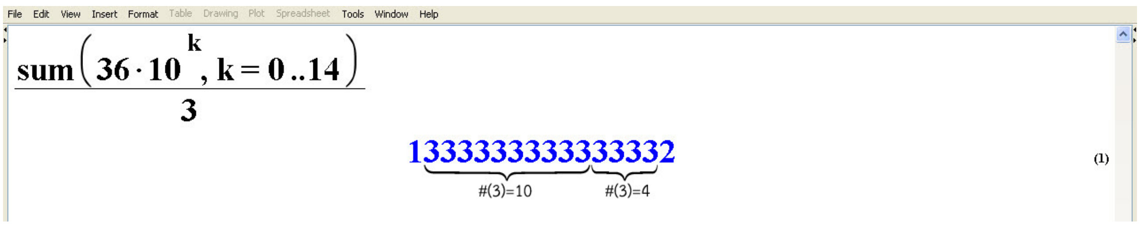
รูปที่ 5: $\underbrace{777\ldots 7}_{\#(7)=3(4)}\div 3$

ตัวอย่าง 6 จงหาผลลัพธ์ของ $\left[(36\cdot 10^{14})+(36\cdot 10^{13})+(36\cdot 10^{12})+\ldots+(36\cdot 10)+(36)\right]\div 3$

วิธีทำ โดยบทแทรก 7 จะได้ว่า

$$\left[(36\cdot 10^{14})+(36\cdot 10^{13})+(36\cdot 10^{12})+\ldots+(36\cdot 10)+(36)\right]\div 3$$
$$=\underbrace{(36)(36)(36)\ldots(36)}_{\#(36)=3\cdot 5}\div 3$$
$$=\underbrace{(37\cdot 36)00(37\cdot 36)00(37\cdot 36)00(37\cdot 36)00}_{\#((37\cdot 36)00)=4}(37\cdot 36)$$
$$=\underbrace{(1332)00(1332)00(1332)00(1332)00}_{\#((1332)00)=4}(1332)$$
$$=\underbrace{{}_{133}200{}_{133}200{}_{133}200{}_{133}200}_{\#({}_{133}200)=4}{}_{133}2$$
$$=\underbrace{(133)20(133)20(133)20(133)20}_{\#((133)20)=4}(133)2$$
$$=\underbrace{{}_{13}320{}_{13}320{}_{13}320{}_{13}320}_{\#({}_{13}320)=4}{}_{13}32$$
$$=\underbrace{(13)32(13)32(13)32(13)32}_{\#((13)32)=4}(13)32$$
$$=\underbrace{{}_{1}332{}_{1}332{}_{1}332{}_{1}332}_{\#({}_{1}332)=4}{}_{1}332$$
$$=1\underbrace{333333333333}_{\#(3)=12}332$$
$$=1\underbrace{333333333333}_{\#(3)=14}2$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 6: $\left[(36\cdot 10^{14})+(36\cdot 10^{13})+(36\cdot 10^{12})+\ldots+(36\cdot 10)+(36)\right]\div 3$

บทสรุป

จากการศึกษาผลหารของจำนวน $\underbrace{111...1}_{\#(1)=3\cdot n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ด้วยจำนวน 37 เป็นจำนวน $3\cdot n-2$ หลัก โดยที่หลักหน่วยเป็นเลขโดด 3 และหลักที่เหลือจำนวน $3\cdot n-3$ หลักนั้นเป็นจำนวน 300 เรียงต่อกันจำนวน $n-1$ จำนวน และผลหารของจำนวน $\underbrace{111...1}_{\#(1)=3\cdot n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ด้วยเลขโดด 3 เป็นจำนวน $3\cdot n-1$ หลัก โดยที่สองหลักสุดท้ายเป็นจำนวน 37 และหลักที่เหลือจำนวน $3\cdot n-3$ หลักนั้นเป็นจำนวน 370 เรียงต่อกันจำนวน $n-1$ จำนวน โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 37=\underbrace{300300\ldots300}_{\#(300)=n-1}3 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

และสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยเลขโดด 3 ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท6 ดังนี้

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=3\cdot n}\div 3=\underbrace{370370...370}_{\#(370)=n-1}37 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

(2) รูปทั่วไปของผลหารของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ด้วยจำนวน 37 และเลขโดด 3 ที่ได้นั้นมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (5) และ (6) ที่เราพบ

เอกสารอ้างอิง

ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). **ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ**. **วารสารนเรศวรพะเยา**. 6(1): 25-30.

ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). **ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1**. **วารสารวิจัย มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม**. 8(15-16): 1-10.

โยธิน ใจอ่อน, ยุวเรศ งามทรง และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2557). **ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของสองจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1**. **วารสารมหาวิทยาลัยนเรศวร**. 22(2): 12-21.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). **ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม**. **วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์**. 8(2): 48-58.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2554). **ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1.** วารสารนเรศวรพะเยา. 4(2): 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). **ความสวยงามวางนัยทั่วไป: จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น**. **วารสารวิทยาศาสตร์ มข**. 41(4): 919-927.

Clark, W. E. (2002). **Elementary Number Theory**. Department of Mathematics, University of South Florida. USA. Available from URL: http://shell.cas.usf.edu/~wclark/elem_num_th_book.pdf. 9 May 2015.