

ชุดผลลัพธ์ตัวเลขมหัศจรรย์ 1–0–8–9

The result set arithmancy 1–0–8–9

เอกชัย เบ็ญจรักษ์ อธิกานต์ วงษ์กะโช่ ศุภวัฒน์ นะคะจัต สุพรรณณี สมพงษ์*

Ekkachai Benjarak, Atigant Wongkaso, Suppawat Nakajad, Supunnee Sompong*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร สกลนคร 47000 ประเทศไทย

Mathematics and Statistics Program, Faculty of Science and Technology, Sakon Nakhon Rajabhat University, Sakon Nakhon, 47000 Thailand

* Corresponding Author: s_sanpinij@yahoo.com

Received: 9 January 2016; Revised: 18 February 2016; Accepted: 2 March 2016; Available online: 1 August 2016

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อการสร้างและขยายทฤษฎีบทเกี่ยวกับเกม 1–0–8–9 โดยพิจารณาตัวเลขตั้งแต่ 3 หลักขึ้นไป ที่กระทำตามขั้นตอนเกม 1–0–8–9 และนำมาสลับที่กันหลักที่ a_1 และหลักที่ a_n เมื่อ a_1 กับ a_n ต้องมีผลต่างมากกว่า 1 แล้วได้ผลลัพธ์คือ $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ นอกจากนี้ได้ศึกษาตัวเลขตั้งแต่ 2 ถึง 25 ที่หารผลลัพธ์ $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ ลงตัวและไม่ลงตัว ผลที่ได้จากการวิจัย ได้ทฤษฎีบทใหม่ และผลลัพธ์ของจำนวนจาก 2 ถึง 25 ที่หาร $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ ลงตัวและไม่ลงตัว

คำสำคัญ: ตัวเลขมหัศจรรย์; 1–0–8–9; การหาร

Abstract

The objective of this research is to create and extend the theorem about 1–0–8–9 game. It considers numbers that greater or equal to 3 digit numbers then follow the steps of 1–0–8–9 game and swap between the a_1^{th} and a_n^{th} positions. If the difference between a_1 and a_n is greater than 1, then the result is to $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$. In addition, we study the numbers from 2 to 25 which divisible and indivisible of $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$. This research obtains new theorem and the result of the numbers from 2 to 25 which divisible and indivisible of $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$.

Keywords: Arithmancy; 1–0–8–9; Division

©2016 Sakon Nakhon Rajabhat University reserved

1. บทนำ

ชุดตัวเลขผลลัพธ์มหัศจรรย์ 1–0–8–9 เป็นตัวเลขทางคณิตศาสตร์ที่มีความพิเศษอยู่ในตัวเอง ซึ่งเคล็ดลับคือ จำนวนใด ๆ จะเป็นพหุคูณของ 9 ก็ต่อเมื่อนำตัวเลขโดดทุกตัวของจำนวนนั้นมาบวกกัน จะเป็นพหุคูณของ 9

เนื่องจาก $1 + 0 + 8 + 9 = 18$ จะได้ว่า 1089 เป็นจำนวนที่เป็นพหุคูณของ 9 ดังนั้น $1-0-8-9$ จึงได้ถูกนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในเกมมายากลทางคณิตศาสตร์ เช่น เกม $1-0-8-9$ เกมตัวเลขที่หายไป เป็นต้น แต่ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับเกมตัวเลข $1-0-8-9$ ดังนี้

เกม $1-0-8-9$ มีวิธีเล่น ดังนี้

- 1) เขียนตัวเลข 3 หลัก โดยที่หลักร้อยต้องมากกว่าหลักหน่วย มากกว่า 1
- 2) นำเลขหลักร้อยและหลักหน่วยสลับกัน
- 3) เอาตัวเลขที่มากกว่าตั้ง ลบด้วยตัวเลขที่น้อยกว่า
- 4) นำคำตอบที่ได้จากข้อ 3 มาสลับโดยเอาเลขหลักร้อยสลับกับหลักหน่วยเหมือนเดิม

นำตัวเลขที่ได้จากข้อ 3 และข้อ 4 มาบวกกันแล้วจะได้คำตอบเท่ากับ 1089

ตัวอย่าง

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{array}{r} 985 \\ 589 - \\ \hline 396 \end{array} & \begin{array}{r} 396 \\ 693 + \\ \hline 1,089 \end{array} & 2) \begin{array}{r} 7,253 \\ 3,257 - \\ \hline 3,996 \end{array} & \begin{array}{r} 3,996 \\ 6,993 + \\ \hline 10,989 \end{array} & 3) \begin{array}{r} 58,342 \\ 28,345 - \\ \hline 29,997 \end{array} & \begin{array}{r} 29,997 \\ 79,992 + \\ \hline 109,989 \end{array}
 \end{array}$$

จากการศึกษาเกม $1-0-8-9$ ทำให้คณะผู้วิจัยสนใจที่จะทำวิจัยเกี่ยวกับตัวเลขจำนวน n หลักที่กระทำตามขั้นตอนของเกม $1-0-8-9$ และตัวเลขที่หารผลลัพธ์ $1-0-8-9$ ลงตัวและไม่ลงตัว

2. วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้ ศึกษาพิจารณา เอาตัวเลขที่มากกว่า 3 หลักขึ้นไป มากระทำตามขั้นตอนการเล่นเกม $1-0-8-9$ พบว่า

ถ้าเราให้ $n = 4$	(เมื่อ n คือจำนวนหลัก)	จะได้ผลลัพธ์เป็น	10,989
และถ้าเราให้ $n = 5$	(เมื่อ n คือจำนวนหลัก)	จะได้ผลลัพธ์เป็น	109,989
และถ้าเราให้ $n = 6$	(เมื่อ n คือจำนวนหลัก)	จะได้ผลลัพธ์เป็น	1,099,989
และถ้าเราให้ $n = 7$	(เมื่อ n คือจำนวนหลัก)	จะได้ผลลัพธ์เป็น	10,999,989
และถ้าเราให้ $n = 8$	(เมื่อ n คือจำนวนหลัก)	จะได้ผลลัพธ์เป็น	109,999,989
และถ้าเราให้ $n = 9$	(เมื่อ n คือจำนวนหลัก)	จะได้ผลลัพธ์เป็น	1,099,999,989
และถ้าเราให้ $n = 10$	(เมื่อ n คือจำนวนหลัก)	จะได้ผลลัพธ์เป็น	10,999,999,989

สังเกตได้ว่า จะมี เลข 9 เพิ่มขึ้นมาระหว่างตัวเลข 10 และ 89 ถ้าเราเพิ่มจำนวน n มากขึ้น 9 ที่อยู่ระหว่าง 10 และ 89 จะเพิ่มขึ้นด้วย เนื่องจากเราเริ่มที่ตัวเลข 3 หลัก และเลข 9 จะเพิ่มขึ้นตามจำนวนของ n ที่เพิ่มขึ้นด้วย

ดังนั้น คำตอบที่ได้จะเท่ากับ $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

จะสังเกตได้ว่า ตำแหน่งของเลข 8 จะเลื่อนตามจำนวน n ที่เพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน เมื่อ $n = 4$ ตำแหน่งของเลข 8 ก็จะมีอยู่หลักที่ 4 (นับจากซ้ายไปขวา) นอกจากนี้ยังศึกษาเกี่ยวกับตัวเลข 2-25 ว่าหารผลลัพธ์ที่ได้จากการกระทำตามขั้นตอนเกม $1-0-8-9$ ได้ลงตัวและไม่ลงตัว ซึ่งพิจารณาโดยใช้อ้างอิง [1, 2] ประกอบ

บทนิยาม 2.1 (จำนวนคู่, จำนวนคี่) [1]

จำนวนเต็มที่หารด้วย ± 2 ลงตัวเรียกว่าจำนวนคู่

จำนวนเต็มที่หารด้วย ± 2 ไม่ลงตัวเรียกว่าจำนวนคี่

จำนวนเต็มคู่จะเขียนได้ในรูป $2k$ และจำนวนเต็มคี่จะเขียนได้ในรูป $2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใดๆ

บทนิยาม 2.2 [2] กำหนด a, b เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ จะเรียกว่า b หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $a = bn$ และเขียนแทน “ b หาร a ลงตัว” ได้ด้วยสัญลักษณ์ $b|a$

ในกรณีที่ b หาร a ไม่ลงตัว เขียนว่า $b \nmid a$

ทฤษฎีบท 2.3 [1] กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $a \neq 0$

ถ้า $a|b$ แล้ว $a|bc$ สำหรับจำนวนเต็ม c ใดๆ

ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

ถ้า $a|b$ และ $b|a$ แล้ว $a|\pm b$

บทนิยาม 2.4 [3] ลำดับของจำนวนจริง คือ ฟังก์ชัน X จากเซตของจำนวนนับไปยังเซต R

$X(n)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน X ที่ n เขียนแทนด้วย x_n ในลำดับ X

ดังนั้นวิธีการเขียนถึงลำดับ $X = \{(1, x_1), (2, x_2), \dots\}$ ได้ด้วยสัญลักษณ์ $(x_1, x_2, \dots)$ หรือ (x_n)

และเรียก x_n ว่าพจน์ที่ n (n -th term) ของลำดับ (x_n)

กรณี (x_n) มีจำนวนพจน์จำกัดดังกล่าวว่า (x_n) เป็นลำดับจำกัด (Finite Sequence) แต่ถ้าเซตของพจน์ของลำดับ (x_n) เป็นเซตอนันต์นับได้กล่าวว่า (x_n) เป็นลำดับอนันต์ (Infinite Sequence)

3. ผลและการอภิปรายผลการวิจัย

ผลลัพธ์ ชุดตัวเลขมหัศจรรย์ 1–0–8–9

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่ง $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, $1 \leq i \leq n$

เมื่อ a_n กับ a_1 มีค่าต่างกันมากกว่า 1 โดยที่ $a_n \neq 0$ และ $n \geq 3$ ถ้า

- 1) นำตัวเลขหลักที่ a_n และหลักที่ a_1 สลับกัน
- 2) นำตัวเลขที่กำหนดให้และที่ได้จากข้อ 1 มาลบกันโดยเอาตัวเลขมากกว่าลบด้วยตัวเลขน้อยกว่า
- 3) นำผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 2 สลับตัวเลขหลักที่ a_n และหลักที่ a_1
- 4) นำตัวเลขที่ได้จากข้อ 2 และข้อ 3 บวกกัน แล้วจะได้ผลลัพธ์เท่ากับ $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

พิสูจน์ กรณี $a_n > a_1$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & a_3 & a_4 \dots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n - \\ a_n & & a_2 & a_3 & a_4 \dots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_1 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} (a_1 - 1) - a_n & a_2 & a_3 & a_4 \dots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & (a_n + 10) - a_1 \\ \hline (a_1 - 1) - a_n & a_2 & a_3 & a_4 \dots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & (a_n + 10) - a_1 + \\ (a_n + 10) - a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \dots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & (a_1 - 1) - a_n \\ \hline 1 & 0 & 9 & \dots & 9 & 8 & 9 \\ \hline \hline & & \underbrace{9 \dots 9}_{n-3} & & & & \end{array} \quad (2)$$

ดังนั้น ผลลัพธ์ที่ได้คือ $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

หมายเหตุ 1. กรณี $a_n < a_1$ จะพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับ $a_n > a_1$

2. ระบบจำนวนจริง [4]

ตัวอย่าง 1.1 กรณี $a_n > a_1$

1 ให้ 98,554,237 เมื่อ $n = 8$

$$\begin{array}{r} 98,554,237 _ \\ \hline 78,554,239 \\ \hline 19,999,998 \\ \hline 109,999,989 \end{array}$$

2. ให้ 653,472,631 เมื่อ $n = 9$

$$\begin{array}{r} 653,472,631 _ \\ \hline 153,472,636 \\ \hline 499,999,995 \\ \hline 1,099,999,989 \end{array}$$

ตัวอย่าง 1.2 กรณี $a_n < a_1$

3. ให้ 6,234,567,891 เมื่อ $n = 10$

$$\begin{array}{r} 6,234,567,891 _ \\ \hline 1,234,567,896 \\ \hline 4,999,999,995 \\ \hline 10,999,999,989 \end{array}$$

4 ให้ 75,417,234,513 เมื่อ $n = 11$

$$\begin{array}{r} 75,417,234,513 _ \\ \hline 35,417,234,517 \\ \hline 39,999,999,996 \\ \hline 109,999,999,989 \end{array}$$

พิจารณาตัวเลขตั้งแต่ 2-25 ที่หารผลลัพธ์ $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$ ที่ได้จากการกระทำตามขั้นตอนเกมชุดผลลัพธ์ตัวเลขมหัศจรรย์ 1–0–8–9

ลงตัวข้อสังเกต จะเห็นได้ว่า คำตอบของจำนวน n เหล่านั้นจะลงท้ายด้วยเลข 9 เสมอ จากสมบัติการหารลงตัวบางประการ [1]

ในกรณีทั่วไปเมื่อเราเขียน $(b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m)$ หมายถึง

$$b_1 \times (10) + b_2 \times (10)^2 + \dots + b_{m-2} \times (10)^{m-2} + b_{m-1} \times (10)^{m-1} + b_m$$

แล้ว $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$ หมายถึง $10 \times (10) + 9 \times (10)^2 + \dots + 9 \times (10)^{m-2} + 8 \times (10)^{m-1} + 9$

กรณีจำนวนที่หาร $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$ ไม่ลงตัว

จากสมบัติการหารลงตัวบางประการ ของ 2

$$2 \mid (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m) \leftrightarrow b_m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

เนื่องจาก $b_m = 9$

ดังนั้น $2 \nmid 10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

สรุปได้ว่า ตัวเลขที่มี 2 เป็นตัวประกอบ นั้นหารผลลัพธ์ไม่ลงตัวด้วย

นั่นคือ $\{4, 6, \dots, 22, 24\}$ หารผลลัพธ์ $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$ ไม่ลงตัว

จากสมบัติการหารลงตัวบางประการ ของ 5

$$5 \mid (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m) \leftrightarrow b_m \in \{0, 5\}$$

เนื่องจาก $b_m = 9$

ดังนั้น $5 \nmid 10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

สรุปได้ว่า ตัวเลขที่มี 5 เป็นตัวประกอบนั้นหารผลลัพธ์ไม่ลงตัวด้วย

นั่นคือ $\{15, 25\}$ ทหารพลัทธิ $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$ ไม่ลงตัว

หมายเหตุ กรณีตัวเลขที่เป็นพหุคูณของ 2 กับ 5 สามารถพิสูจน์โดย [2] และคุณสมบัติของตัวประกอบคันทาโน [5]

กรณีจำนวนที่หาร $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$ ลงตัว

จากสมบัติการหารลงตัวบางประการ ของ 3

$$3 \mid (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m) \leftrightarrow 3 \mid (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{m-2} + b_{m-1} + b_m)$$

$$\text{เนื่องจาก } 1 + 0 + \underbrace{9 + 9 + 9 + \dots + 9 + 9 + 9}_{n-3} + 8 + 9 = 9(n-1) = 3(3n-3)$$

จากนิยามการหารลงตัว จะได้ $3 \mid 3(3n-3)$ ดังนั้น $3 \mid 10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

จากสมบัติการหารลงตัวบางประการ ของเลข 9

$$9 \mid (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m) \leftrightarrow 9 \mid (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{m-2} + b_{m-1} + b_m)$$

$$\text{เนื่องจาก } 1 + 0 + \underbrace{9 + 9 + 9 + \dots + 9 + 9 + 9}_{n-3} + 8 + 9 = 9(n-1)$$

จากนิยามการหารลงตัว จะได้ $9 \mid 9(n-1)$ ดังนั้น $9 \mid 10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

จากสมบัติการหารลงตัวบางประการ ของ 11

$$11 \mid (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m) \leftrightarrow 11 \mid (b_m - b_{m-1} + b_{m-2} - \dots + b_2 - (-1)b_1)$$

เนื่องจากจำนวน n หลักเป็นทั้งจำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่ ดังนั้นจึงแบ่งออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่ามี 9 อยู่ $(n-3)$ ตัวเป็นจำนวนคู่ $2k$

$$\text{พิจารณา } 9 - 8 + \underbrace{9 - 9 + \dots - 9 + 9 - 9}_{2k} + 0 - 1 = (1 + 0 - 1) = 0 \text{ แล้ว } 11 \mid 0$$

ดังนั้น ถ้า n เป็นจำนวนคี่ $11 \mid 10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่ามี 9 อยู่ $(n-3)$ ตัวเป็นจำนวนคี่ $2k+1$

$$\text{พิจารณา } 9 - 8 + \underbrace{9 - 9 + \dots - 9 + 9 - 0}_{2k+1} + 1 = (1 + 9 + 1) = 11 \text{ แล้ว } 11 \mid 11$$

ดังนั้น ถ้า n เป็นจำนวนคู่ $11 \mid 10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

จากการทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า $11 \mid 10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

กรณีของตัวเลขที่ใช้โปรแกรม Matlab ช่วยคำนวณในการหาร $10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$

$$7 \mid (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m) \text{ พิจารณา } 7 \mid 10 \underbrace{999 \dots 999}_{n-3} 89$$

คำตอบที่ได้คือ $(1, 571, 428, 571, 428, 571, 428, 571, 428, \dots)$

สังเกตได้ว่า ตัวเลขจะซ้ำกันเมื่อผ่านไป 6 หลัก แล้ว 7 หารลงตัวเมื่อ n เท่ากับ $(7, 13, 19, 25, 31, \dots)$

จะได้ว่า $z_1 = 7$, $z_{y+1} = z_y + 6$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$ และ z_i คือตำแหน่งที่ i ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $7 \mid \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ เมื่อ $z_1 = 7$, $z_{y+1} = z_y + 6$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$

ผลลัพธ์ที่ได้นำมาจากการคำนวณโดยโปรแกรม Matlab คือ $(n = 7; 10,999,989 \div 7 = 1,571,428)$,

$(n = 13; \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \div 7 = 1,571,428,571,427)$, $(n = 19; \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \div 7 = 1,571,428,571,428,571,427)$, ...

คำสั่งในการคำนวณ $7 \div \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ จะแสดงใน Matlab ดังนี้

พิมพ์ลงใน (mupad)

Printf ("กรณืหารด้วย 7 ");

L := 10989,109989,1099989,..., $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$:

DIGITS := 100 :

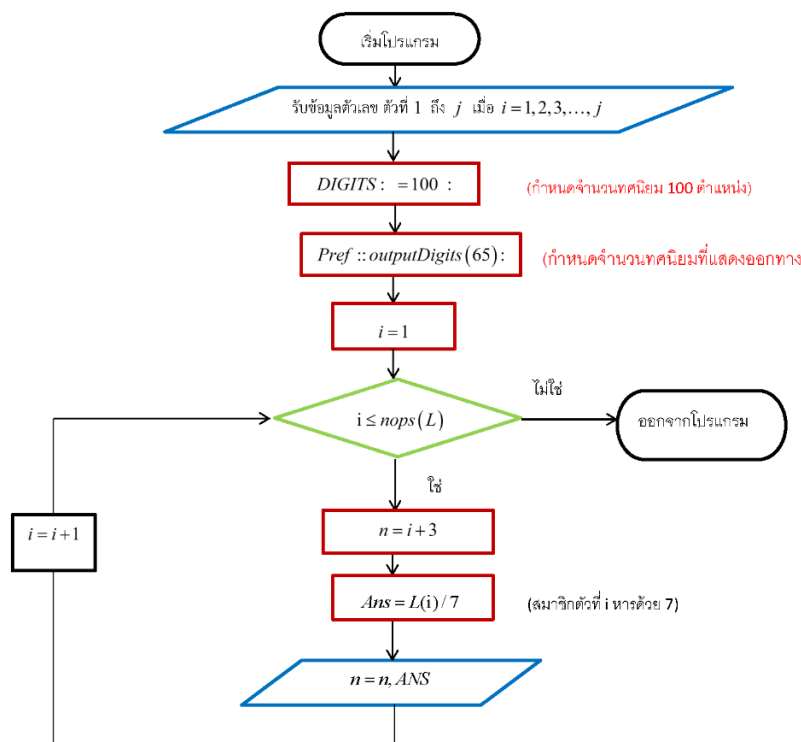
Pref :: outputDigits(65):

For i from 1 to nops(L) do

Printf(n = i + 3, float(L[i] / 7))

End _for :

หมายเหตุ Algorithm การคำนวณหาผลหารของ $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \div 7$ แสดงดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 Algorithm การคำนวณหาผลหารของ $\underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \div 7$

$13 | (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m)$ พิจารณา $13 | \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$

คำตอบที่ได้คือ (846,153,846,153 , 846,153,846,153,...)

สังเกตได้ว่า ตัวเลขจะซ้ำกันเมื่อผ่านไป 6 หลัก แล้ว 13หารลงตัวเมื่อ n เท่ากับ (7, 13, 19, 25, 31,...)

จะได้ว่า $z_1 = 7, z_{y+1} = z_y + 6$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$ และ z_i คือตำแหน่งที่ i ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ $10 \underbrace{999\dots99989}_{n-3}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $13 | \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ เมื่อ $z_1 = 7, z_{y+1} = z_y + 6$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$

ผลลัพธ์ที่ได้นำมาจากการคำนวณโดยโปรแกรม Matlab คือ

$$(n = 7 ; 10, 999, 989 \div 13 = 846,153), (n = 13 ; \underbrace{10999\dots99989}_{10} \div 13 = 846,153,846,153),$$

$$(n = 19 ; \underbrace{10999\dots99989}_{16} \div 13 = 846,153,846,153,846,153), \dots$$

➤ $17 | (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m)$ พิจารณา $17 | \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$

คำตอบที่ได้คือ (647,058,823,529,411,764,705,882,352,941,176,470,588,235,...)

สังเกตได้ว่า ตัวเลขจะซ้ำกันเมื่อผ่านไป 16 หลัก แล้ว 17หารลงตัวเมื่อ n เท่ากับ (17,33,49,...)

จะได้ว่า $z_1 = 17, z_{y+1} = z_y + 16$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$ และ z_i คือตำแหน่งที่ i ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ

$$\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $17 | \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ เมื่อ $z_1 = 17, z_{y+1} = z_y + 16$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$

ผลลัพธ์ที่ได้นำมาจากการคำนวณโดยโปรแกรม Matlab คือ $(n = 17; \underbrace{1099\dots9989}_{14} \div 17 = 6,470,588,235,294,117),$

$$(n = 33; \underbrace{1099\dots9989}_{30} \div 17 = 64,705,882,352,941,176,470,588,235,294,117), \dots$$

$19 | (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m)$ พิจารณา $19 | \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$

คำตอบที่ได้คือ (5,789,473,684,210,526,315,789,473,684,210,526,315,789,...)

สังเกตได้ว่า ตัวเลขจะซ้ำกันเมื่อผ่านไป 18 หลัก แล้ว 19หารลงตัวเมื่อ n เท่ากับ (19,37,55,...)

จะได้ว่า $z_1 = 19, z_{y+1} = z_y + 18$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$ และ z_i คือตำแหน่งที่ i ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ

$$\underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $19 | \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ เมื่อ $z_1 = 19, z_{y+1} = z_y + 18$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$

ผลลัพธ์ที่ได้นำมาจากการคำนวณโดยโปรแกรม Matlab คือ $(n = 19; \underbrace{1099\dots9989}_{16} \div 19 = 578,947,368,421,052,631),$

$$(n = 37; \underbrace{1099\dots9989}_{34} \div 19 = 578,947,368,421,052,631,578,947,368,421,052,631), \dots$$

$21 | (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m) \leftrightarrow 3, 7 | \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$

เนื่องจาก $3 | \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}$ จากสมบัติการหารลงตัวบางประการ ของเลข 3

และ $7 \mid \underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ เมื่อ $z_1 = 7, z_{y+1} = z_y + 6$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$

จากกรณี 7 ที่ใช้โปรแกรม Matlab ประกอบการคำนวณ

ดังนั้นสรุปได้ว่า $21 \mid \underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ เมื่อ $z_1 = 7, z_{y+1} = z_y + 6$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$

$23 \mid (b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m)$ พิจารณา $23 \mid \underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$

คำตอบที่ได้คือ (472, 860, 869, 565, 217, 391, 304, 347, 286, 086, 956, 521, 739, 130, 434, 728, 608, 695, ...)

สังเกตได้ว่า ตัวเลขจะซ้ำกันเมื่อผ่าน 22 หลัก แล้ว 23 ทหารลงเมื่อ n เท่ากับ (23, 45, ...)

จะได้ว่า $z_1 = 23, z_{y+1} = z_y + 22$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$ และ z_i คือตำแหน่งที่ i ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ $\underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $23 \mid \underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ เมื่อ $z_1 = 23, z_{y+1} = z_y + 22$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$

ผลลัพธ์ที่ได้นำมาจากการคำนวณโดยโปรแกรม Matlab คือ ($n = 23 ; \underbrace{1099 \dots 99}_{20}89 \div 23 = 4,782,608,695,652,173,913,043$),

($n = 45 ; \underbrace{1099 \dots 99}_{42}89 \div 7 = 47,826,086,956,521,739,130,434,782,608,695,652,173,913,043$), ..

หมายเหตุ คำสั่งในการคำนวณกรณีของ 13, 17, 19, 23 ในโปรแกรม Matlab จะใช้คำสั่งในทำนองเดียวกันกับ 7

4. สรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัยจะได้ทฤษฎีบท ชุดผลลัพธ์ตัวเลขมหัศจรรย์ 1-0-8-9

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 a_1$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่ง $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, $1 \leq i \leq n$ เมื่อ a_n กับ a_1 มีค่าห่างกันมากกว่า 1 โดยที่ $a_n \neq 0$ และ $n \geq 3$ ถ้า

- 1) นำตัวเลขหลักที่ n และหลักที่ 1 สลับกัน
- 2) นำตัวเลขที่กำหนดให้ และที่ได้จากข้อ 1 มาลบกันโดยเอาตัวเลขมากกว่าลบด้วยตัวเลขน้อยกว่า
- 3) นำผลลัพธ์ที่ได้จากข้อที่ 2 สลับตัวเลขหลักที่ n และหลักที่ 1
- 4) นำตัวเลขที่ได้จากข้อที่ 2 และข้อที่ 3 บวกกัน แล้วจะได้ผลลัพธ์เท่ากับ $\underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$

ตัวเลขที่หารผลลัพธ์ $\underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ ซึ่งได้จากการกระทำตามขั้นตอนของเกม 1-0-8-9 ลงตัวและไม่ลงตัว มีดังนี้

1 ตัวเลขที่หาร $\underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ ไม่ลงตัว คือ {2, 4, ..., 24,} และ {5, 15, 25}

2 ตัวเลขที่หาร $\underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ ลงตัว คือ {3, 9, 11}

3 กรณีตัวเลขที่หาร $\underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ ลงตัว จากการคำนวณด้วยโปรแกรม Matlab คือ

$7 \mid \underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ เมื่อ $z_1 = 7, z_{y+1} = z_y + 6$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$,

z_i คือตำแหน่งที่ i ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ $\underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$

$13 \mid \underbrace{10999 \dots 999}_{n-3}89$ เมื่อ $z_1 = 7, z_{y+1} = z_y + 6$ โดยที่ $\forall y \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& z_i \text{ คือตำแหน่งที่ } i \text{ ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ } \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \\
& 17 \mid \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \text{ เมื่อ } z_1 = 17, z_{y+1} = z_y + 16 \text{ โดยที่ } \forall y \in \mathbb{N}, \\
& z_i \text{ คือตำแหน่งที่ } i \text{ ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ } \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \\
& 19 \mid \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \text{ เมื่อ } z_1 = 19, z_{y+1} = z_y + 18 \text{ โดยที่ } \forall y \in \mathbb{N}, \\
& z_i \text{ คือตำแหน่งที่ } i \text{ ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ } \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \\
& 21 \mid \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \text{ เมื่อ } z_1 = 7, z_{y+1} = z_y + 6 \text{ โดยที่ } \forall y \in \mathbb{N}, \\
& z_i \text{ คือตำแหน่งที่ } i \text{ ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ } \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \\
& 23 \mid \underbrace{10999\dots99989}_{n-3} \text{ เมื่อ } z_1 = 23, z_{y+1} = z_y + 22 \text{ โดยที่ } \forall y \in \mathbb{N}, \\
& z_i \text{ คือตำแหน่งที่ } i \text{ ซึ่งนับจากซ้ายไปขวาของ } \underbrace{10999\dots99989}_{n-3}
\end{aligned}$$

5. ข้อเสนอแนะ

ผู้ที่สนใจจะศึกษางานวิจัยนี้ สามารถขยายทฤษฎีบท และการสลับตัวเลขมากกว่า 2 ตัว หรือการสลับตัวเลขจาก 1 คู่ เป็น 2 คู่ ขึ้นไปได้

6. References

- [1] K. Tayanyong, Number Theory 1, Department of Mathematics, Faculty of Science, Khon Kaen University, Khon Kaen, 2001.
- [2] P. Sanbooran, Introduction to logic, Khon-kaen University Publishing, Khon Kaen, 2009.
- [3] C. Suksai, Introduction to Mathematics Analysis, Ubon Ratchathani Rajabhat Institute, 2009.
- [4] R. Dangsangsong, Principles Mathematical, 2nd Ed., Mathematics and Statistics Faculty of Science and Technology, Bansomdej Chaopraya Rajabhat University, 1999.
- [5] P. Phonglum, General Mathematics Publishing, 7th Ed., SR. Printins Mass Product Limited, Nonthaburi, 2011.