ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1

Generalized beauty : the product of the three and four digit number and the many digit number that every digit as 1

ธีระยุทธ ชมชื่น [1]
อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ [2]

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเพื่อศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 สำหรับใช้เป็นเครื่องมือเพื่อเพิ่มความสะดวกในการคำนวณและแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของการพิสูจน์และรูปแบบทั่วไปของผลคูณนี้ด้วยรูปแบบทั่วไปของผลคูณที่ได้จากการพิสูจน์จะขึ้นอยู่กับจำนวนสามหลักและสี่หลัก และจำนวนหลักของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 พร้อมทั้งเสนอแนวทางการขยายการศึกษาของบทความนี้ด้วย

คำสำคัญ : จำนวนสามหลักและสี่หลัก จำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 จำนวนเศษเหลือ

Abstract

This article applies the remainder number for the study and finding a general form of the product of the three and four digit number and the many digit number that every digit as 1 , for ease of calculation and show the beauty of a proof and a general form of this product. The results showed that the general form of the product of the three and four digit number and the many digit number that every digit as 1 obtained from the proof is depended on the three and four digit number and the number of digits of the many digit number that every digit as 1. The development of this study was suggested in this article.

Keywords : three and four digit number, many digit number that every digit as 1, remainder number

[1] นักศึกษาปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

[2] อาจารย์ประจำ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

บทนำ

หากเราจะคำนวณหาผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 นั้นถึงแม้ว่าจะไม่ใช่เรื่องที่ยากเกินไปแต่ก็คงไม่สะดวกนักถ้าเราไม่มีเครื่องคิดเลข คอมพิวเตอร์ หรือสูตรลัดบางอย่างเป็นเครื่องมือช่วยสำหรับการคำนวณหาผลคูณนี้ ยิ่งถ้าจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 มีจำนวนหลักมากๆ เครื่องคิดเลขบางเครื่องก็อาจจะคำนวณค่าไม่ได้ ฉะนั้นหากเราสามารถหาสูตรสำหรับการคำนวณหาผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 ได้ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณหาผลคูณนี้นั่นเอง การศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 ได้แนวความคิดมาจากบทความเรื่อง ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554: 29–35) ที่ได้แสดงถึงการศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554: 29–35) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$(1_{[n]})^2 = 1_{[n]} \times 1_{[n]} = 123\ldots 9_1 0_1 1\ldots {}_q(r-1)_q(r)_q(r-1)\ldots {}_1 1_1 09\ldots 321$$

ซึ่งนับได้ว่าเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณหาผลการยกกำลังสองนี้ หากเราศึกษาการพิสูจน์อย่างละเอียดจนกระทั่งเข้าใจทฤษฎีบท จะเห็นได้ว่านั่นคือความสวยงามของคณิตศาสตร์ในอีกรูปแบบหนึ่งด้วย

ดังนั้นบทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยอาศัยจำนวนที่ถูกนิยามใน (I) เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการสร้างเลขโดด ซึ่งหากรูปแบบทั่วไปของผลคูณนี้หาได้จริงก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นในการคำนวณหาผลคูณนั่นเอง ยิ่งไปกว่านั้น การพิสูจน์และทฤษฎีบทที่ได้รับก็จะเป็นการแสดงถึงความสวยงามของคณิตศาสตร์ในอีกรูปแบบหนึ่งเช่นกัน

หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญอย่างมากสำหรับการศึกษาของบทความนี้ ซึ่งกล่าวไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark. 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

1. $P(n_0)$ เป็นจริง
2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \ge n_0$

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้ โดยดูการประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเพิ่มเติมได้จาก (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554: 29–35) และ (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555)

จากอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554: 29–35) และ ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b=10$ จะได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่ง $a=10\cdot q+r$ และ $0\le r<10$ นั่นคือ r เป็นจำนวนหนึ่งหลักหรือเลขโดดนั่นเอง นิยามจำนวนสำหรับจำนวนเต็ม a โดย

$$a := {}_q r \qquad \text{(I)}$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & 10 = {}_1 0 & 20 = {}_2 0 & 100 = {}_{10} 0 & 250 = {}_{25} 0 \\
1 = {}_0 1 & 11 = {}_1 1 & 21 = {}_2 1 & 101 = {}_{10} 1 & 251 = {}_{25} 1 \\
2 = {}_0 2 & 12 = {}_1 2 & 22 = {}_2 2 & 102 = {}_{10} 2 & 252 = {}_{25} 2 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
9 = {}_0 9 & 19 = {}_1 9 & 29 = {}_2 9 & 109 = {}_{10} 9 & 259 = {}_{25} 9
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{lllll}
-0 = {}_{-0} 0 & -10 = {}_{-1} 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -100 = {}_{-10} 0 & -250 = {}_{-25} 0 \\
-1 = {}_{-1} 9 & -11 = {}_{-2} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -101 = {}_{-11} 9 & -251 = {}_{-26} 9 \\
-2 = {}_{-1} 8 & -12 = {}_{-2} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -102 = {}_{-11} 8 & -252 = {}_{-26} 8 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
-9 = {}_{-1} 1 & -19 = {}_{-2} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -109 = {}_{-11} 1 & -259 = {}_{-26} 1
\end{array}$$

ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้นิยามเซตของจำนวนใน (I) ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555) กำหนดให้ ${}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R} = \{ {}_q r \mid q \in \mathbf{Z} \text{ และ } 0 \le r < 10 \}$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักในหัวข้อต่อไป และนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์จากทฤษฎีบทได้ง่ายขึ้น จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

เพื่อความสะดวก เราเขียนจำนวนเศษเหลือ ${}_0 r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0\le r<10$ และเพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (I) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ ซึ่งทำได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้ายและสำหรับจำนวนในหลักหน่วยให้ดึงเศษลงมาได้เลย เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายจะขอยกตัวอย่างการ

แปลงจำนวน $457_{25}8_{1}4_{35}708$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 457_{25}8_{1}4_{35}708 &= 45(7+25)(8+1)(4+35)708 \\ &= 45_{3}29_{3}9708 \\ &= 4(5+3)2(9+3)9708 \\ &= 482_{1}29708 \\ &= 48(2+1)29708 \\ &= 48329708 \end{aligned}$$

หัวข้อต่อไปจะแสดงถึงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่เราพบความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนห้าหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 จนนำเราไปสู่การศึกษาผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ผลการศึกษาด้วย และเพื่อความสะดวกสำหรับการเขียน เราเขียนแทนจำนวนของจำนวนเต็ม m ของจำนวน $\underbrace{mmm\ldots m}_{\#(m)}$ ด้วยสัญลักษณ์ $\#(m)$

บทนิยามต่อไปนี้มีความสำคัญอย่างมากสำหรับการศึกษาจำนวนสามหลักและสี่หลักของบทความนี้

บทนิยาม 2 สำหรับทุกจำนวนนับ p,q,s และ r ซึ่ง $0 \le p,q,s,r \le 9$ นิยาม

$$qpsr = {}_{q}p\|_{s}r \qquad \text{(II)}$$

เช่น $1234 = {}_{1}2\|_{3}4$ และ $789 = {}_{0}7\|_{8}9$ เป็นต้น

ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และมีจำนวนหลักมากกว่าหรือเท่ากับสอง ทำให้เราพบความสัมพันธ์บางอย่างระหว่างจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

(III)

$$\begin{aligned} {}_{0}1\|_{0}1\times 11 &= 101\times 11 &&= 1111 &&= {}_{0}1_{0}1_{0}1_{0}1 \\ {}_{0}1\|_{0}1\times 111 &= 101\times 111 &&= 11211 &&= {}_{0}1_{0}1_{0}2_{0}1_{0}1 \\ {}_{0}1\|_{0}1\times 1111 &= 101\times 1111 &&= 112211 &&= {}_{0}1_{0}1_{0}2_{0}2_{0}1_{0}1 \\ {}_{0}1\|_{0}1\times 11111 &= 101\times 11111 &&= 1122211 &&= {}_{0}1_{0}1_{0}2_{0}2_{0}2_{0}1_{0}1 \end{aligned}$$

(IV)

$$\begin{aligned} {}_{0}4\|_{8}4\times 11 &= 484\times 11 &&= 5324 &&= {}_{0}4_{0}4_{8}4_{8}4 \\ {}_{0}4\|_{8}4\times 111 &= 484\times 111 &&= 53724 &&= {}_{0}4_{0}4_{8}8_{8}4_{8}4 \\ {}_{0}4\|_{8}4\times 1111 &= 484\times 1111 &&= 537724 &&= {}_{0}4_{0}4_{8}8_{8}8_{8}4_{8}4 \\ {}_{0}4\|_{8}4\times 11111 &= 484\times 11111 &&= 5377724 &&= {}_{0}4_{0}4_{8}8_{8}8_{8}8_{8}4_{8}4 \end{aligned}$$

(V)

$$
\begin{array}{lllllll}
{}_4 5\|_6 7\times 11 & = & 4567\times 11 & = & 50237 & = & {}_4 5_4 5_6 7_6 7 \\
{}_4 5\|_6 7\times 111 & = & 4567\times 111 & = & 506937 & = & {}_4 5_4 5_{11} 2_6 7_6 7 \\
{}_4 5\|_6 7\times 1111 & = & 4567\times 1111 & = & 5073937 & = & {}_4 5_4 5_{11} 2_{11} 2_6 7_6 7 \\
{}_4 5\|_6 7\times 11111 & = & 4567\times 11111 & = & 50743937 & = & {}_4 5_4 5_{11} 2_{11} 2_{11} 2_6 7_6 7
\end{array}
$$

(VI)

$$
\begin{array}{lllllll}
{}_9 9\|_9 9\times 11 & = & 9999\times 11 & = & 109989 & = & {}_9 9_9 9_9 9_9 9 \\
{}_9 9\|_9 9\times 111 & = & 9999\times 111 & = & 1109889 & = & {}_9 9_9 9_{19} 8_9 9_9 9 \\
{}_9 9\|_9 9\times 1111 & = & 9999\times 1111 & = & 11108889 & = & {}_9 9_9 9_{19} 8_{19} 8_9 9_9 9 \\
{}_9 9\|_9 9\times 11111 & = & 9999\times 11111 & = & 111098889 & = & {}_9 9_9 9_{19} 8_{19} 8_{19} 8_9 9_9 9
\end{array}
$$

จาก (III), (IV), (V) และ (VI) เราพบว่าถ้านำจำนวนสามหลักและสี่หลักมาแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_q p\|_s r$ ตามบทนิยาม 2 แล้วผลคูณของจำนวนนี้กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 จะเป็นจำนวนที่เลขสองหลักแรกเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_s r$, เลขสองหลักสุดท้ายเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_q p$ และเลขหลักที่เหลือเป็นผลบวกของจำนวนเศษเหลือ ${}_q p$ กับ ${}_s r$ ซึ่งมีจำนวนหลักน้อยกว่าจำนวนหลักของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 อยู่สองหลัก

จากข้อสังเกตข้างต้น ทำให้เราสนใจที่จะศึกษาผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

1. เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 ที่มีจำนวนมากกว่าห้าหลักได้หรือไม่

2. หากเราสามารถเขียนรูปแบบที่ทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 ที่มีจำนวนมากกว่าห้าหลักได้ แล้วรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบหรือไม่

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 5 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย มากกว่านั้นยังได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน ${}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ โดย

$$
{}_q r \,(\; {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s) \;;\; 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b} a \quad ;\; r+s \ge 10, r+s = {}_b a \end{cases}
$$

สำหรับทุก ${}_q r, {}_t s \in {}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$

65

บทตั้ง 1 สำหรับทุก ${}_q p, {}_s r \in {}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ จะได้ว่า ${}_q p(\ \ {}_s r = (q+s+b)a$ เมื่อ $p+r = {}_b a$ สำหรับบาง $b \in \mathbf{Z}$ และ $0 \le a \le 9$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $p+r = {}_b a$ สำหรับบาง $b \in \mathbf{Z}$ และ $0 \le a \le 9$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} {}_q p(\ \ {}_s r &= {}_{(q+s)}(p+r) \\ &= (q+s)(p+r) \\ &= (q+s)_b a \\ &= (q+s+b)a \end{aligned}$$

บทตั้ง 2 สำหรับทุก ${}_q p, {}_s r \in {}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ เมื่อ $q, s \in \mathbf{N}$ จะได้ว่า $qpsr + {}_q p\, {}_q p = {}_q p\, {}_q p({}_q p(\ \ {}_s r)$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $r+p = {}_b a$ สำหรับบางจำนวนนับ b และ a ซึ่ง $0 \le a \le 9$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} qpsr + {}_q p\, {}_q p &= qpsr + q(p+q)p \\ &= q(p+q)(s+p+q)(r+p) \\ &= q(p+q)(s+p+q)_b a \\ &= q(p+q)(s+p+q+b)a \\ &= q(p+q)(p+q+s+b)a \\ &= {}_q p\, {}_q p_{(q+s+b)} a \\ &= {}_q p\, {}_q p({}_q p(\ \ {}_s r) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3 กำหนดให้ q, p, s และ r เป็นจำนวนนับ โดยที่ $qpsr = {}_q p \| {}_s r$ จะได้ว่า

$$ {}_q p \| {}_s r \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} = {}_q p\, {}_q p \underbrace{({}_q p(\ \ {}_s r)({}_q p(\ \ {}_s r)({}_q p(\ \ {}_s r)\ldots({}_q p(\ \ {}_s r)}_{\#({}_q p(\ {}_s r)=n-2}\, {}_s r\, {}_s r \qquad \text{(VII)}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge 2$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$ {}_q p \| {}_s r \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} = {}_q p\, {}_q p \underbrace{({}_q p(\ \ {}_s r)({}_q p(\ \ {}_s r)({}_q p(\ \ {}_s r)\ldots({}_q p(\ \ {}_s r)}_{\#({}_q p(\ {}_s r)=n-2}\, {}_s r\, {}_s r$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge 2$ พิจารณา

$$\begin{aligned} {}_q p \| {}_s r \times 11 &= {}_q p \| {}_s r \times (10+1) \\ &= qpsr \times (10+1) \\ &= qpsr0 + qpsr \\ &= q(p+q)(s+p)(r+s)r \\ &= {}_q p\, {}_q p\, {}_s r\, {}_s r \end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(2)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \ge 2$ นั่นคือ

$$ {}_q p \| {}_s r \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k} = {}_q p\, {}_q p \underbrace{({}_q p(\ \ {}_s r)({}_q p(\ \ {}_s r)({}_q p(\ \ {}_s r)\ldots({}_q p(\ \ {}_s r)}_{\#({}_q p(\ {}_s r)=k-2}\, {}_s r\, {}_s r$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$
\begin{aligned}
&{}_q p \|_s r \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1} \\
&= {}_q p \|_s r \times (1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k} + \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}) \\
&= ({}_q p \|_s r \times 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}) + ({}_q p \|_s r \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}) \\
&= (qpsr \times 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}) + {}_q p\,{}_q p \underbrace{({}_q p(\ {}_s r)({}_q p(\ {}_s r)({}_q p(\ {}_s r)\ldots({}_q p(\ {}_s r)}_{\#({}_q p(\ {}_s r)=k-2}\,{}_s r\,{}_s r \\
&= (qpsr\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}) + {}_q p\,{}_q p \underbrace{({}_q p(\ {}_s r)({}_q p(\ {}_s r)({}_q p(\ {}_s r)\ldots({}_q p(\ {}_s r)}_{\#({}_q p(\ {}_s r)=k-2}\,{}_s r\,{}_s r \\
&= {}_q p\,{}_q p \underbrace{({}_q p(\ {}_s r)({}_q p(\ {}_s r)({}_q p(\ {}_s r)\ldots({}_q p(\ {}_s r)}_{\#({}_q p(\ {}_s r)=k-1}\,{}_s r\,{}_s r
\end{aligned}
$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$
{}_q p \|_s r \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} = {}_q p\,{}_q p \underbrace{({}_q p(\ {}_s r)({}_q p(\ {}_s r)({}_q p(\ {}_s r)\ldots({}_q p(\ {}_s r)}_{\#({}_q p(\ {}_s r)=n-2}\,{}_s r\,{}_s r
$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $k \geq 2$

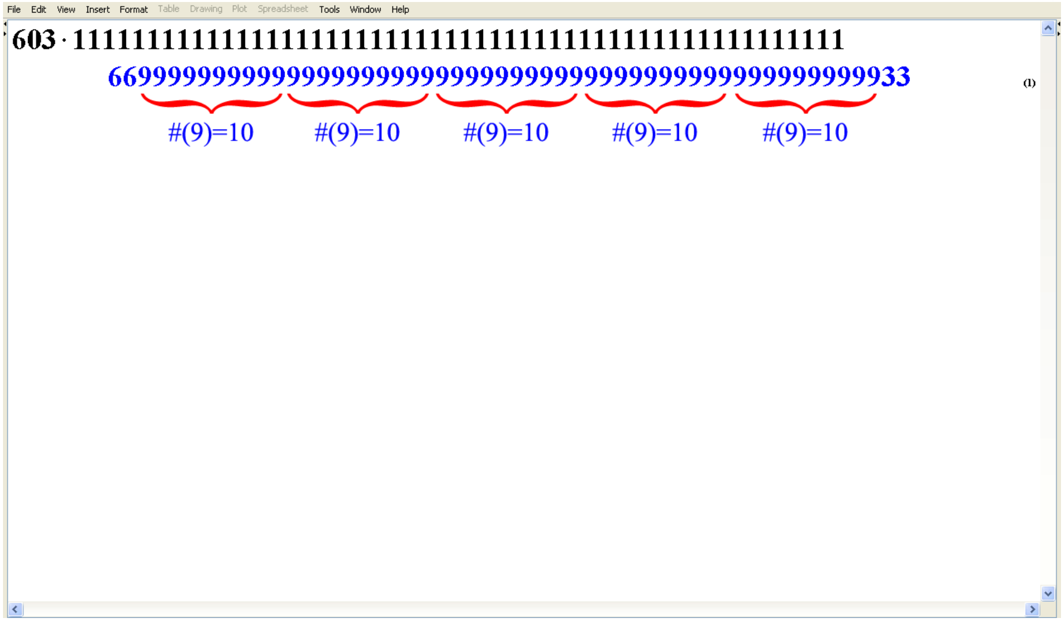
ต่อไปเราจะให้ตัวอย่างของการหาผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยใช้ผลจากทฤษฎีบท 3 พร้อมทั้งตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $603 \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=52}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
603 \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=52} &= {}_0 6 \|_0 3 \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=52} \\
&= {}_0 6\,{}_0 6 \underbrace{({}_0 6(\ {}_0 3)({}_0 6(\ {}_0 3)({}_0 6(\ {}_0 3)\ldots({}_0 6(\ {}_0 3)}_{\#({}_0 6(\ {}_0 3)=52-2=50}\,{}_0 3\,{}_0 3 \\
&= {}_0 6\,{}_0 6 \underbrace{{}_0 9\,{}_0 9\,{}_0 9\ldots{}_0 9}_{\#({}_0 9)=50}\,{}_0 3\,{}_0 3 \\
&= 66\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=50}33
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



ภาพที่ 1: ผลคูณ $603\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=52}$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $4567\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=63}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$4567\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=63}$$

$$= {}_4 5\|{}_6 7\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=63}$$

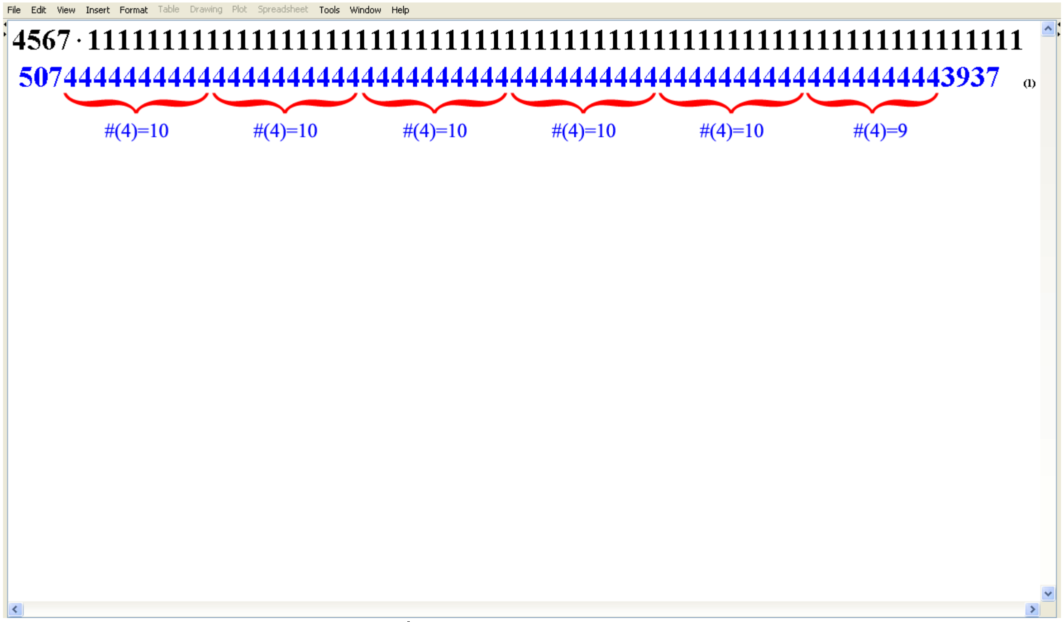
$$= {}_4 5\,{}_4 5\underbrace{({}_4 5(\ {}_6 7)({}_4 5(\ {}_6 7)({}_4 5(\ {}_6 7)\ldots({}_4 5(\ {}_6 7)}_{\#({}_4 5(\ {}_6 7)=63-2=61}\,{}_6 7\,{}_6 7$$

$$= {}_4 5\,{}_4 5\underbrace{((4+6)(5+7))((4+6)(5+7))((4+6)(5+7))\ldots((4+6)(5+7))}_{\#((4+6)(5+7))=63-2=61}\,{}_6 7\,{}_6 7$$

$$= {}_4 5\,{}_4 5\underbrace{({}_{11}2)({}_{11}2)({}_{11}2)\ldots({}_{11}2)}_{\#({}_{11}2)=63-2=61}\,{}_6 7\,{}_6 7$$

$$= 507\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=59}3937$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



ภาพที่ 2: ผลคูณ $4567\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=63}$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $9999\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=57}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$9999\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=57}$$

$$= {}_9 9\,\|\,{}_9 9\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=57}$$

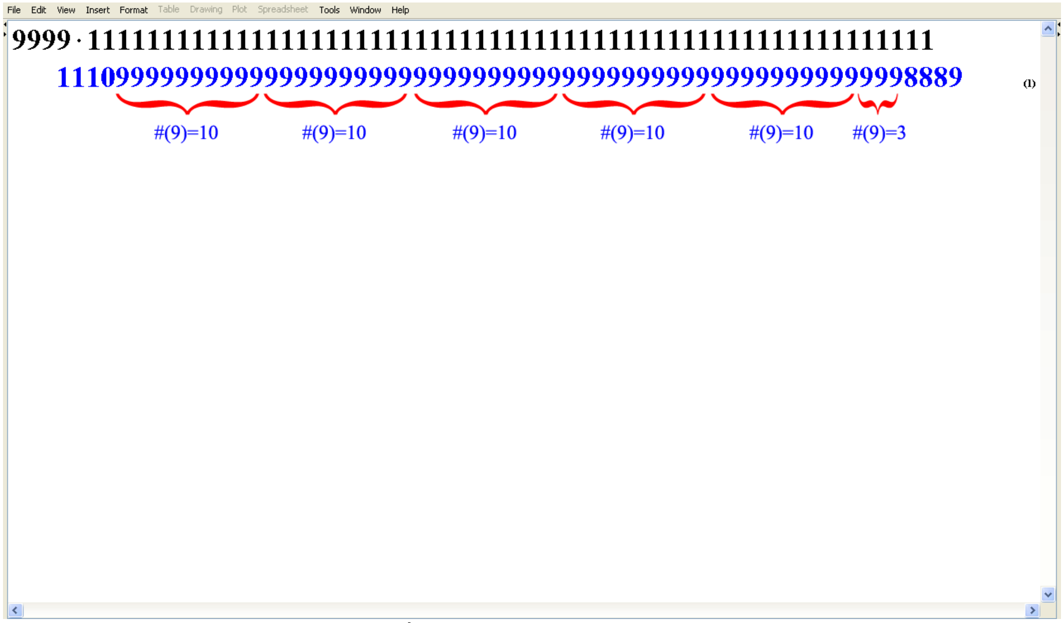
$$= {}_9 9\,{}_9 9\underbrace{({}_9 9(\ \ {}_9 9)({}_9 9(\ \ {}_9 9)({}_9 9(\ \ {}_9 9)\ldots({}_9 9(\ \ {}_9 9)}_{\#({}_9 9(\ \ {}_9 9)=57-2=55}\,{}_9 9\,{}_9 9$$

$$= {}_9 9\,{}_9 9\underbrace{((9+9)(9+9))((9+9)(9+9))((9+9)(9+9))\ldots((9+9)(9+9))}_{\#((9+9)(9+9))=57-2=55}\,{}_9 9\,{}_9 9$$

$$= {}_9 9\,{}_9 9\underbrace{({}_{19}8)({}_{19}8)({}_{19}8)\ldots({}_{19}8)}_{\#({}_{19}8)=57-2=55}\,{}_9 9\,{}_9 9$$

$$=1110\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=53}8889$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



ภาพที่ 3: ผลคูณ $9999\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=57}$

จากทฤษฎีบท 3 จะได้บทแทรก 1 ทันที ดังนี้

บทแทรก 1 กำหนดให้ q,p,s,r เป็นจำนวนนับ โดยที่ $qpsr={}_qp\|_sr$ จะได้ว่า

$$ {}_qp\|_sr\times\underbrace{tt\ldots t}_{\#(t)=n}=t\times{}_qp_qp\underbrace{({}_qp(\ {}_sr)({}_qp(\ {}_sr)({}_qp(\ {}_sr)\ldots({}_qp(\ {}_sr)}_{\#({}_qp(\ {}_sr)=n-2}{}_sr_sr \qquad \text{(VIII)}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก t และ $k\geq2$

บทสรุป

จากข้อสงสัยของเราจนกระทั่งสามารถพิสูจน์ข้อสังเกตเป็นรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้เราสามารถตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อข้างต้นของเราได้ ดังนี้

1. เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 ได้ตามทฤษฎีบท 3 และสรุปเป็นสูตรสำหรับทุกจำนวนนับ q,p,s และ r โดยที่ $qpsr={}_qp\|_sr$ ได้ดังนี้

$$ {}_qp\|_sr\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}={}_qp_qp\underbrace{({}_qp(\ {}_sr)({}_qp(\ {}_sr)({}_qp(\ {}_sr)\ldots({}_qp(\ {}_sr)}_{\#({}_qp(\ {}_sr)=n-2}{}_sr_sr$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\geq2$

2. รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนตามทฤษฎีบท 3 นั้นมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบดังนั้น การคำนวณหาผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 ด้วยสูตรจากบทความนี้จึงเป็นเรื่องที่มีความสะดวกมากขึ้นนั่นเอง

จากบทความนี้และบทความอื่น ๆ ที่ได้กล่าวถึง ผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่าง ๆ ของจำนวนเต็ม ฉะนั้นผู้อ่านสามารถที่จะเริ่มขยายผลการศึกษาของบทความนี้ โดยศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนมากกว่าสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 ก่อนได้โดยอาศัยจำนวนที่ถูกนิยามใน (I) และแนวทางการพิสูจน์จากบทความนี้ เช่นจากข้อสังเกตผลคูณของจำนวนห้าหลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
{}_{12}3\|_{4}5\times 11 &= 12345\times 11 = 135795 = {}_{12}3_{12}3_{4}5_{4}5\\
{}_{12}3\|_{4}5\times 111 &= 12345\times 111 = 1370295 = {}_{12}3_{12}3_{16}8_{4}5_{4}5\\
{}_{12}3\|_{4}5\times 1111 &= 12345\times 1111 = 13715295 = {}_{12}3_{12}3_{16}8_{16}8_{4}5_{4}5\\
{}_{12}3\|_{4}5\times 11111 &= 12345\times 11111 = 137165295 = {}_{12}3_{12}3_{16}8_{16}8_{16}8_{4}5_{4}5
\end{aligned}
$$

จากข้อสังเกตข้างต้นและการศึกษาในทำนองเดียวกับบทความนี้ ผู้เขียนคาดว่าน่าจะได้รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนและยังคงความสวยงามของการพิสูจน์และทฤษฎีบทที่จะได้รับเช่นกัน ยิ่งไปกว่านั้น ยังเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นในการคำนวณหาผลคูณของจำนวนมากกว่าสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 อีกด้วย

เอกสารอ้างอิง

ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. **วารสารนเรศวรพะเยา.** ได้รับการยอมรับให้ตีพิมพ์.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2554). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. **วารสารนเรศวรพะเยา**. 4(2), 29–35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. **วารสารวิทยาศาสตร์ มข**. ได้รับการยอมรับให้ตีพิมพ์.

Clark, W. E. (2002). **Elementary Number Theory**. Department of Mathematics, University of South Florida. USA.