



ขั้นตอนวิธีคำนวณสำหรับราก
ที่ของจำนวนจริง
โดยวิธีการเชิงตัวเลขแบบทำซ้ำ

- สอาด ม่วงจันทร์ และสุพรรณิ สมพงษ์

ขั้นตอนวิธีคำนวณสำหรับรากที่ n ของจำนวนจริง โดยวิธีการเชิงตัวเลขแบบทำซ้ำ

Computational Algorithms for the n^{th} Root of Real Number by Iterative Numerical Method

สอาด ม่วงจันทร์ และสุพรรณิ สมพงษ์¹

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะสร้างขั้นตอนวิธีคำนวณแบบใหม่สำหรับหาคำรากที่ n ของจำนวนจริง โดยได้สร้างขั้นตอนวิธีคำนวณเชิงตัวเลขแบบทำซ้ำ 2 ขั้นตอนวิธีจากเทคนิคช่วงครึ่งและอนุกรมของเทเลอร์ ซึ่งได้ทดสอบทั้งสองขั้นตอนวิธีด้วยการเขียนโปรแกรมบน Matlab แล้วเปรียบเทียบค่าความถูกต้องกับเครื่องคิดเลข Casio รุ่น Fx-350MS ผลการวิจัยพบว่า ขั้นตอนวิธีแบบที่ 2 ใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำน้อยกว่า แต่ขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 มีความง่าย สะดวกกว่าในการคำนวณ และมีความเสถียรในการเข้าสู่ของการคำนวณมากกว่าขั้นตอนวิธีแบบที่ 2

Abstract

The aim of this research was to construct the computational algorithms for the n^{th} root of real number by the iterative numerical method which based on the half-interval technique and Taylor's series. We tested both algorithms on Matlab programming and then compared the accuracy with Calculator (Casio Fx-350MS). The results showed that the second algorithms used the loop of computation less than the first algorithms but the first algorithm was convenient and had stability in the convergence of computing more than the second algorithm.

บทนำ

วิชาคณิตศาสตร์ เป็นศาสตร์ที่เน้นเกี่ยวกับการคิด การวิเคราะห์ การคำนวณ การใช้หลักเหตุและผล ซึ่งถือว่าเป็นศาสตร์พื้นฐานที่มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ (Cleve Moler, 2004 และ George W. Collins, 2003) เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์การแพทย์ ไม่เว้นแม้แต่

¹ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

ด้านเกษตรศาสตร์ (Richard L.Burden and J.Douglas Faires. 2001) ศาสตร์ต่างๆ เหล่านี้ล้วนแล้วแต่ต้องอาศัยทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อช่วยในการพัฒนาต่อยอดศาสตร์อื่นๆ ต่อไป

ในการทำวิจัยด้านคณิตศาสตร์ไม่ว่าจะเป็นคณิตศาสตร์บริสุทธิ์หรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ โดยส่วนใหญ่จะเป็นการมุ่งสร้างทฤษฎี สูตรหรือขั้นตอนวิธีคิด วิธีคำนวณแบบใหม่ (Cleve Moler. 2004, Gerald Recktenward. 2000 และ William H. Press et al. 1993) เพื่อที่จะรองรับ หรือ ตอบสนองต่อความต้องการที่จะได้มาซึ่งคำตอบ หรือ ผลเฉลยของปัญหาจากศาสตร์ต่างๆ ที่เกี่ยวกับการคิดการคำนวณ

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการคำนวณหาค่ารากที่ n ของจำนวนจริง x ผลลัพธ์ที่ได้จะออกมาเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนขึ้นอยู่กับกรณีของจำนวนจริงนั้นๆ ซึ่งการพิจารณาคำตอบของปัญหาจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ $x \geq 0$ และ $x < 0$ ให้ C เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2

กรณีที่ 1 $\sqrt[n]{C}$

การคำนวณค่าจะแสดงในหัวข้อถัดไป

กรณีที่ 2 $\sqrt[n]{(-C)}$

กรณีนี้จะพิจารณาเป็นเงื่อนไขย่อยๆ ได้โดยจะเริ่มพิจารณาจากการหาร n ด้วย 4 เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็ม เมื่อนำ 4 มาหาร โดยขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm) จะมีเศษเหลือเป็น 0, 1, 2 หรือ 3 เพียงอย่างเดียวอย่างหนึ่งเท่านั้น

2.1 เมื่อ n หารด้วย 4 มีเศษเหลือเป็น 1 หรือ 3

ดังนั้น n จะเป็นจำนวนเต็มคี่ นั่นคือ $n = 2k + 1$ บางจำนวนเต็มบวก k

$$\text{จะได้ } \sqrt[n]{(-C)} = \sqrt[n]{(-1)C} = \sqrt[n]{(-1)^n C} = (-1)(\sqrt[n]{C}) = -(\sqrt[n]{C})$$

2.2 เมื่อ n หารด้วย 4 มีเศษเหลือเป็น 2

ดังนั้น $n = 4k + 2$ บางจำนวนเต็ม $k \geq 0$

เนื่องจากในจำนวนเชิงซ้อนกำหนด $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = (-1)$, $i^3 = (-i)$, $i^4 = 1$

ดังนั้น $i^{4m+2} = (-1)$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ $m \geq 0$

$$\text{จะได้ } \sqrt[n]{(-C)} = \sqrt[n]{(-1)C} = \sqrt[n]{(-1)^{4k+2} C} = (i^{4k+2} \sqrt[n]{C}) = (-1)(\sqrt[n]{C}) = -(\sqrt[n]{C})$$

2.3 เมื่อ n หารด้วย 4 มีเศษเหลือเป็น 0 หรือ n เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 4 ลงตัว

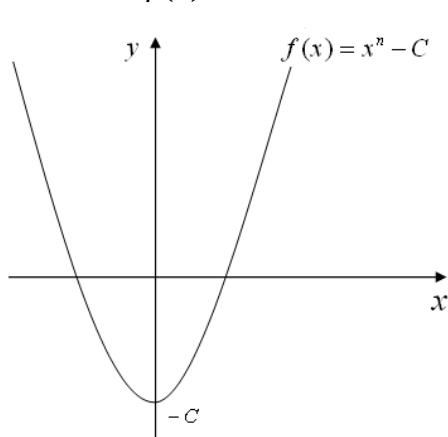
ดังนั้น $n = 4k$ บางจำนวนเต็มบวก k

$$\text{จะได้ } \sqrt[n]{(-C)} = \sqrt[n]{(-1)C} = \left[\sqrt[n]{(-1)^{4k}} \right] \left[\sqrt[n]{C} \right] = (1)(\sqrt[n]{C}) = \sqrt[n]{C}$$

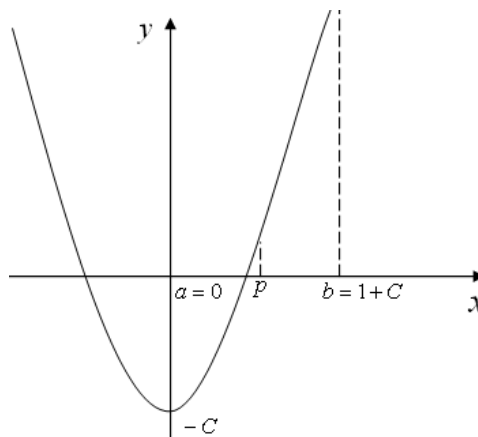
พิจารณาค่าของ $\sqrt[n]{C}$ เมื่อ C เป็นจำนวนจริงบวกและ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2
ถ้าสมมติให้ $x = \sqrt[n]{C}$ ดังนั้นจะได้ว่า $x^n = C$ นั่นแสดงว่าเราต้องการหาค่าของ x ที่ทำให้ $x^n - C = 0$

ขั้นตอนวิธีคำนวณโดยวิธีทำซ้ำแบบที่ 1 :

พิจารณารูปของ $f(x) = x^n - C$ จะได้ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 : กราฟของ $f(x) = x^n - C$



ภาพที่ 2 : การแบ่งครึ่งช่วงที่จุด p

พิจารณาภาพที่ 2 กำหนดให้ $a = 0$ และ $b = 1 + C$ นั่นคือเราสามารถที่จะแบ่งครึ่งช่วงระหว่างจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ ได้ที่จุด

$$(p, f(p)) \text{ โดยที่ } p = \frac{a+b}{2}$$

ซึ่งจะได้ว่า $f(a) < 0$ และ $f(b) > 0$

ดังนั้นจะเห็นได้ชัดเจนว่า $a < p < b$ และ $|f(p)| < \min\{|f(a)|, |f(b)|\}$ ซึ่งถ้าดำเนินการแบ่งครึ่งช่วงในลักษณะนี้ต่อไปเรื่อย โดยเลือกค่า a หรือ b ใหม่จากค่าของ p โดยที่ค่าของ $f(a)$ ต้องน้อยกว่าศูนย์และค่าของ $f(b)$ ต้องมากกว่าศูนย์ ก็จะได้ค่าของ $f(p)$ เข้าใกล้ศูนย์มากยิ่งขึ้น ดังนั้นสามารถสร้างวิธีการเชิงตัวเลขแบบทำซ้ำสำหรับหาค่าประมาณของ x ที่ทำให้ $f(x) = 0$ ได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : กำหนดให้ $a_0 = 0$ $b_0 = 1 + C$ และ $p = \frac{1+C}{2}$

กำหนดให้ $k = 0$ กำหนดค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ $\varepsilon (\varepsilon \approx 10^{-8})$

กำหนดรอบสูงสุดของการทำซ้ำ M

ขั้นตอนที่ 2 : คำนวณค่า $f(a_k)$ $f(b_k)$ และ $f(p)$

ขั้นตอนที่ 3 : ถ้า $|f(p)| < \varepsilon$ ให้หยุดการคำนวณ จะได้คำตอบโดยประมาณคือ $x = p$

ขั้นตอนที่ 4 : ถ้า $f(a_k)f(p) < 0$ ให้ $b_{k+1} = p$

ถ้า $f(b_k)f(p) < 0$ ให้ $a_{k+1} = p$

ขั้นตอนที่ 5 : คำนวณค่า $p = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$ และ $k = k + 1$

ขั้นตอนที่ 6 : ถ้า $k \leq M$ ให้กลับไปทำซ้ำตั้งแต่ขั้นตอนที่ 2

ถ้า $k > M$ แสดงว่าขั้นตอนวิธีทำซ้ำคู่ ออก

ขั้นตอนวิธีคำนวณโดยวิธีทำซ้ำแบบที่ 2 :

โดยใช้อนุกรมเทเลอร์ พิจารณาการกระจายฟังก์ชัน $f(x) = x^n - C$ รอบจุด $x = a$ จะได้ว่า

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2 f''(a)}{2!} + \frac{(x-a)^3 f'''(a)}{3!} + \dots$$

หรือ

$$f(x) = (a^n - C) + n(x-a)(a^{n-1}) + \frac{n(n-1)(x-a)^2(a^{n-2})}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)(x-a)^3(a^{n-3})}{3!} + \dots$$

หรือ

$$f(x) = (a^n - C) + n(x-a)(a^{n-1}) + \xi(x)$$

เมื่อ $\xi(x)$ แทนส่วนคลาดเคลื่อนสำหรับการประมาณค่า

นั่นคือเราจะประมาณค่าโดย

$$f(x) \approx (a^n - C) + n(x-a)(a^{n-1})$$

เนื่องจาก $f(x) = 0$ ดังนั้นจะได้ $(a^n - C) + n(x-a)(a^{n-1}) \approx 0$

โดยกระบวนการวิธีแบบทำซ้ำ จะพิจารณาแทน $a = x_n$ และ $x = x_{n+1}$ จะได้

$$((x_k)^n - C) + n(x_{k+1} - x_k)((x_k)^{n-1}) \approx 0$$

หรือเขียนได้เป็น

$$x_{k+1} \approx x_k - \frac{1}{n} \frac{((x_k)^n - C)}{(x_k)^{n-1}}$$

ดังนั้นจะได้ขั้นตอนวิธีคำนวณดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : เลือกค่าผลเฉลยเริ่มต้น x_0

กำหนดให้ $k = 0$ กำหนดค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ $\varepsilon (\varepsilon \approx 10^{-8})$

กำหนดรอบสูงสุดของการทำซ้ำ M

ขั้นตอนที่ 2 : คำนวณค่า $f(x_k)$

ขั้นตอนที่ 3 : ถ้า $|f(x_k)| < \varepsilon$ ให้หยุดการคำนวณ จะได้คำตอบโดยประมาณคือ $x = x_k$

ขั้นตอนที่ 4 : คำนวณค่า $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{n} \frac{((x_k)^n - C)}{(x_k)^{n-1}}$ และ $k = k + 1$

ขั้นตอนที่ 5 : ถ้า $k \leq M$ ให้กลับไปทำซ้ำตั้งแต่ขั้นตอนที่ 2

ถ้า $k > M$ แสดงว่าขั้นตอนวิธีทำซ้ำลู่ออก

ในการพิจารณาค่าผลเฉลยเริ่มต้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้า n มีค่ามาก เพื่อความสะดวกและเป็นการลดการคำนวณค่าผลเฉลยตัวถัดไป สามารถที่จะเลือกค่าผลเฉลยเริ่มต้น $x_0 = 1$ ได้ และไม่ควรเลือกค่าผลเฉลยเริ่มต้นที่มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เพราะในขั้นตอนที่ 4 อาจจะทำให้เกิดข้อผิดพลาดในการคำนวณได้เพราะจะมีตัวหารที่มีค่าใกล้เคียงหรือเท่ากับศูนย์ หรือไม่ควรเลือกค่าผลเฉลยเริ่มต้นที่มีค่ามากจนเกินไป เพราะจะไปกระทบกับข้อจำกัดของชนิดของข้อมูลบนหน่วยประมวลผลและหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์

ผลการวิจัย

จากขั้นตอนวิธีคำนวณแบบทำซ้ำทั้งสองแบบข้างต้น พบว่าในแต่ละรอบของการคำนวณจะมีความซับซ้อนของการคำนวณของขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 เป็น $3n + 10$ และขั้นตอนวิธีแบบที่ 2 มีความซับซ้อนของการคำนวณเป็น $2n + 7$ ในการตรวจสอบขั้นตอนวิธีคำนวณ ผู้วิจัยได้เลือกใช้การเขียนโปรแกรมบนโปรแกรม Matlab เวอร์ชัน 6.0 ซึ่งเป็นที่นิยมสำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ บนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยประมวลผล Intel Core2 Duo ความเร็ว 3.0 GHz. หน่วยความจำ 2 GB. โดยทำการทดสอบกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีความแตกต่างกัน 17 ตัวอย่าง พร้อมกันนี้ได้ตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยของทั้งสองขั้นตอนวิธีด้วยเครื่องคิดเลข Casio รุ่น Fx-350MS ดังแสดงในตารางที่ 1 ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องเหมือนกันทั้งสองขั้นตอนวิธี

ตารางที่ 1 ผลเลขที่ได้จากเครื่องคิดเลข Casio รุ่น FX-350MS เทียบผลที่ได้จากขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 และ 2

	$(C : n)$	ค่ารากที่ n ของจำนวนจริง C		
		เครื่องคิดเลข Fx-350MS	ขั้นตอนวิธีแบบที่ 1	ขั้นตอนวิธีแบบที่ 2
1	(2:96)	1.007246412	1.007246412	1.007246412
2	(521:3)	8.046602993	8.046602993	8.046602993
3	(824:2)	28.70540019	28.70540019	28.70540019
4	(12:91)	1.02768291	1.02768291	1.02768291
5	(22:63)	1.050287741	1.050287741	1.050287741
6	(11:70)	1.034849129	1.034849129	1.034849129
7	(711:7)	2.555112008	2.555112008	2.555112008
8	(135:49)	1.105289895	1.105289895	1.105289895
9	(238:31)	1.193064086	1.193064086	1.193064086
10	(4.85:57)	1.028088632	1.028088632	1.028088632
11	(1.25:524)	1.000425937	1.000425937	1.000425937
12	(0.96:282)	0.999855251	0.999855251	0.999855251
13	(4.9856:52)	1.031377476	1.031377476	1.031377476
14	(98,432:22)	1.686400574	1.686400574	1.686400574
15	(32,770:15)	2.000008138	2.000008138	2.000008138
16	(0.345:106)	0.990010504	0.990010504	0.990010504
17	(789,054:43)	1.371330126	1.371330126	1.371330126

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาจำนวนรอบของการคำนวณของทั้งสองขั้นตอนวิธี ดังแสดงในตารางที่ 2 ผู้วิจัยพบว่าจำนวนรอบในการคำนวณของขั้นตอนวิธีแบบที่ 2 น้อยกว่าจำนวนรอบของการคำนวณของขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 ซึ่งในการคำนวณขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 จะมีความง่ายและสะดวกมากกว่าแต่จะช้ากว่าขั้นตอนวิธีแบบที่ 2 เนื่องจากมีความซับซ้อนของการคำนวณมากกว่า

ตารางที่ 2 จำนวนรายการของการคำนวณแบบซ้ำของขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 และแบบที่ 2

	$(C : n)$	จำนวนรอบของการคำนวณแบบซ้ำ	
		ขั้นตอนวิธีแบบที่ 1	ขั้นตอนวิธีแบบที่ 2
1	(2:96)	33	14
2	(521:3)	45	13
3	(824:2)	43	9
4	(12:91)	38	11
5	(22:63)	42	8
6	(11:70)	41	9
7	(711:7)	49	26
8	(135:49)	48	4
9	(238:31)	49	11
10	(4.85:57)	38	9
11	(1.25:524)	59	37
12	(0.96:282)	50	34
13	(4.9856:52)	39	8
14	(98,432:22)	128	63
15	(32,770:15)	86	59
16	(0.345:106)	27	16
17	(789,054:43)	224	71

สรุปและวิจารณ์ผลการวิจัย

ขั้นตอนวิธีคำนวณโดยวิธีเชิงตัวเลขแบบซ้ำทั้งสองแบบให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องตรงกันกับผลลัพธ์ที่ได้จากเครื่องคิดเลข Casio รุ่น Fx-350MS โดยขั้นตอนวิธีแบบที่ 2 ใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำน้อยกว่าแต่ขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 มีความง่ายและสะดวกกว่าในการคำนวณ ทั้งนี้ในขั้นตอนวิธีแบบที่ 2 มีความหลากหลายในการเลือกค่าของผลเฉลยเริ่มต้น ซึ่งในบางครั้งหากเลือกค่าผลเฉลยเริ่มต้นที่ไม่เหมาะสม อาจส่งผลถึงการเข้าสู่ของผลเฉลยจริงได้ ในขณะที่ขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 ช่วงของผลเฉลยเริ่มต้นที่เลือกนั้นได้ครอบคลุมผลเฉลยจริงอยู่ ดังนั้นในทุกรอบของการคำนวณ ช่วงของผลเฉลยที่ได้จะยิ่งแคบลง ผลเฉลยที่ได้ยิ่งจะเข้าสู่ผลเฉลยจริงมากขึ้น โอกาสที่ผลเฉลยจะหลุดออกเป็นไปได้น้อยกว่า นั่นคือขั้นตอนวิธีแบบที่ 1 จะมีความเสถียรในการเข้าสู่ของการคำนวณมากกว่าขั้นตอนวิธีแบบที่ 2

ข้อเสนอแนะ

ในทางคณิตศาสตร์ การคำนวณเชิงตัวเลขแบบทำซ้ำทุกขั้นตอนวิธีจะมีค่าความคลาดเคลื่อนเสมอ ดังนั้นควรตั้งค่าความคลาดเคลื่อนของการทำซ้ำให้มีค่าน้อยๆ และผลเฉลยที่ได้จากการทำซ้ำอาจจะลู่ออกก็ได้ ดังนั้นในการคำนวณจะต้องพิจารณาค่าความเป็นไปได้ของค่าผลเฉลยเริ่มต้นให้เหมาะสม สำหรับผู้ที่สนใจจะนำไปใช้หรือศึกษาค้นคว้าอาจจะพิจารณาต่อในส่วนของการปรับปรุงค่าเริ่มต้นที่ดีที่สุดของขั้นตอนวิธี หรือ ประยุกต์กับการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับค่ารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

เอกสารอ้างอิง

- Cleve Moler. (2004). Numerical Computing with MATLAB. **Society for Industrial & Applied Mathematics**. 348.
- George W. Collins. (2003). **Fundamental Numerical Methods and Data Analysis**. 2nd. NASA Astrophysics Data.
- Gerald Recktenwald. (2000). **Numerical Methods with MATLAB**. 1st. New Jersey: Prentice Hall.
- Glyn James.(1999). **Modern Engineering Mathematics**. 2nd. New York: Addison-Wesley.
- Richard L. Burden and J. Douglas Faires . (2001). **Numerical Analysis**. 7th. New York: Brooks Cole.
- William H. Press *et al.* (1993). **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**. Cambridge: University Press.

