

$$\text{สมการไดโอแฟนไทน์ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq+1}{pq} \text{ และ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq-1}{pq}$$

$$\text{ON THE DIOPHANTINE EQUATIONS } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq+1}{pq}$$

$$\text{AND } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq-1}{pq}$$

สุธน ตาดี้\*

Suton Tadee\*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

Received: 7 October 2023

Revised: 6 November 2023

Accepted: 24 November 2023

### บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวนในการแสดงผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสองสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq+1}{pq}$  และ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq-1}{pq}$  เมื่อ  $a, b, n$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่  $p > nq$  ผลการวิจัยพบว่า ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq+1}{pq}$  คือ

$$\begin{aligned} (a, b, p, q, n) &\in \{(2q, 2q, nq+1, q, n)\} \\ &\cup \{(q(q+1), q+1, nq+1, q, n)\} \\ &\cup \{(pq, p, p, q, 1)\} \\ &\cup \left\{ \left( \frac{p(p+q)}{nq+1}, \frac{q(p+q)}{nq+1}, p, q, n \right) : \frac{p+q}{nq+1} \in \mathbb{Z} \right\} \\ &\cup \left\{ \left( \frac{pq(p+1)}{nq+1}, \frac{q(p+1)}{nq+1}, p, q, n \right) : \frac{p+1}{nq+1} \in \mathbb{Z} \right\} \\ &\cup \left\{ \left( \frac{pq(pq+1)}{nq+1}, \frac{pq+1}{nq+1}, p, q, n \right) : \frac{pq+1}{nq+1} \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

และผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq-1}{pq}$  คือ

\* Corresponding author: สุธน ตาดี้

E-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

$$\begin{aligned}
(a, b, p, q, n) &\in \{(2p, p, p, 2, 2)\} \\
&\cup \left\{ \left( \frac{p(p+q)}{nq-1}, \frac{q(p+q)}{nq-1}, p, q, n \right) : \frac{p+q}{nq-1} \in \mathbb{Z} \right\} \\
&\cup \left\{ \left( \frac{pq(p+1)}{nq-1}, \frac{q(p+1)}{nq-1}, p, q, n \right) : \frac{p+1}{nq-1} \in \mathbb{Z} \right\} \\
&\cup \left\{ \left( \frac{pq(pq+1)}{nq-1}, \frac{pq+1}{nq-1}, p, q, n \right) : \frac{pq+1}{nq-1} \in \mathbb{Z} \right\} \\
&\text{เมื่อ } n > 1
\end{aligned}$$

**คำสำคัญ:** สมการไดโอแฟนไทน์, ผลเฉลยจำนวนเต็มบวก, เศษส่วนอียิปต์

### Abstract

In this paper, by using elementary concepts of number theory, we show all positive integer solutions of two Diophantine equations  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq+1}{pq}$  and  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq-1}{pq}$ , where  $a, b, n$  are positive integers and  $p, q$  are prime numbers with  $p > nq$ . The research results showed that all solutions of the equation  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq+1}{pq}$  are

$$\begin{aligned}
(a, b, p, q, n) &\in \{(2q, 2q, nq+1, q, n)\} \\
&\cup \{(q(q+1), q+1, nq+1, q, n)\} \\
&\cup \{(pq, p, p, q, 1)\} \\
&\cup \left\{ \left( \frac{p(p+q)}{nq+1}, \frac{q(p+q)}{nq+1}, p, q, n \right) : \frac{p+q}{nq+1} \in \mathbb{Z} \right\} \\
&\cup \left\{ \left( \frac{pq(p+1)}{nq+1}, \frac{q(p+1)}{nq+1}, p, q, n \right) : \frac{p+1}{nq+1} \in \mathbb{Z} \right\} \\
&\cup \left\{ \left( \frac{pq(pq+1)}{nq+1}, \frac{pq+1}{nq+1}, p, q, n \right) : \frac{pq+1}{nq+1} \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

All solutions of the equation  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq-1}{pq}$  are

$$\begin{aligned}
(a, b, p, q, n) &\in \{(2p, p, p, 2, 2)\} \\
&\cup \left\{ \left( \frac{p(p+q)}{nq-1}, \frac{q(p+q)}{nq-1}, p, q, n \right) : \frac{p+q}{nq-1} \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

$$\cup \left\{ \left( \frac{pq(p+1)}{nq-1}, \frac{q(p+1)}{nq-1}, p, q, n \right) : \frac{p+1}{nq-1} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cup \left\{ \left( \frac{pq(pq+1)}{nq-1}, \frac{pq+1}{nq-1}, p, q, n \right) : \frac{pq+1}{nq-1} \in \mathbb{Z} \right\}$$

when  $n > 1$ .

**Keywords:** Diophantine equation, positive integer solution, Egyptian fraction

## บทนำ

ในการแข่งขัน The William Lowell Putnam Mathematical Competition (Mathematical Association of America, 2019) ได้มีโจทย์ปัญหาหนึ่งที่น่าสนใจ กล่าวคือ จงหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2018} \quad (1)$$

เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มบวก และต่อมา Johnson (2022) ได้ศึกษาและหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวในรูปทั่วไป กล่าวคือ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{q+1}{pq} \quad (2)$$

เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่  $(q+1)|(p-1)$

เมื่อไม่นานมานี้ Prugsapitak (2023, 2024) ได้ศึกษาและแสดงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ที่มีลักษณะคล้ายกัน กล่าวคือ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{q-1}{pq} \quad (3)$$

เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่  $p > q$

ในงานวิจัยนี้จะใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวนเพื่อขยายผลงานวิจัยของ Johnson (2022) และ Prugsapitak (2023, 2024) โดยการศึกษาและค้นหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสองสมการไดโอแฟนไทน์ ต่อไปนี้

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq+1}{pq} \quad (4)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{nq-1}{pq} \quad (5)$$

เมื่อ  $a, b, n$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่  $p > nq$

### วิธีดำเนินการวิจัย

ในการหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ (4) และ (5) นั้น จะใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน โดยเริ่มจากการพิสูจน์บทตั้งต่อไปนี้

**บทตั้ง 1** ให้  $a, b$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{q} \quad (6)$$

มีผลเฉลยคือ  $(a, b) \in \{(2q, 2q), (q(q+1), q+1)\}$

**พิสูจน์** จากสมการ (6) จะได้ว่า

$$(a+b)q = ab \quad (7)$$

และเนื่องจาก  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น  $q|a$  หรือ  $q|b$  โดยไม่เสียนัยสำคัญ สมมติว่า  $q|a$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $a_1$  ซึ่งทำให้  $a = qa_1$  และจากสมการ (7) จะได้ว่า

$$qa_1 = (a_1 - 1)b \quad (8)$$

และเนื่องจาก  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นสามารถแยกพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

**กรณี 1**  $\gcd(q, b) = q$  จะได้ว่า  $q|b$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $b_1$  ซึ่งทำให้  $b = qb_1$  และจากสมการ (8) จะได้ว่า  $a_1 = (a_1 - 1)b_1$  ดังนั้น  $(a_1 - 1)|a_1$  และเนื่องจาก  $\gcd(a_1, a_1 - 1) = 1$  เพราะฉะนั้น  $a_1 - 1 = 1$  และ  $a_1 = b_1$  จะได้ว่า  $a_1 = 2$  และ  $b_1 = 2$  เพราะฉะนั้น  $a = 2q$  และ  $b = 2q$  นั่นคือ  $(a, b) = (2q, 2q)$

**กรณี 2**  $\gcd(q, b) = 1$  ดังนั้นเนื่องจากสมการ (8) และ  $\gcd(a_1, a_1 - 1) = 1$  จะได้ว่า  $q = a_1 - 1$  และ  $a_1 = b$  ดังนั้น  $a_1 = q + 1$  และ  $b = q + 1$  เพราะฉะนั้น  $a = q(q + 1)$  นั่นคือ  $(a, b) = (q(q + 1), q + 1)$

**ทฤษฎีบท 2** ให้  $a, b, n$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่  $p > nq$  จะได้ว่า สมการ (4) มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้

$$1) (a, b, p, q, n) = (2q, 2q, nq + 1, q, n)$$

$$2) (a, b, p, q, n) = (q(q + 1), q + 1, nq + 1, q, n)$$

$$3) (a, b, p, q, n) = (pq, p, p, q, 1)$$

$$4) (a, b, p, q, n) = (p(p + q)/(nq + 1), q(p + q)/(nq + 1), p, q, n)$$

เมื่อ  $(p + q)/(nq + 1)$  เป็นจำนวนเต็ม

$$5) (a, b, p, q, n) = (pq(p + 1)/(nq + 1), q(p + 1)/(nq + 1), p, q, n)$$

เมื่อ  $(p + 1)/(nq + 1)$  เป็นจำนวนเต็ม

$$6) (a, b, p, q, n) = (pq(pq + 1)/(nq + 1), (pq + 1)/(nq + 1), p, q, n)$$

เมื่อ  $(pq + 1)/(nq + 1)$  เป็นจำนวนเต็ม

**พิสูจน์** เนื่องจาก  $p > nq$  ดังนั้น ถ้า  $p = nq + 1$  จากสมการ (4) และบทตั้ง 1 จะได้ว่า  $(a, b, p, q, n) \in \{(2q, 2q, nq + 1, q, n), (q(q + 1), q + 1, nq + 1, q, n)\}$

ต่อไปจะพิจารณา  $p > nq + 1$  และเนื่องจาก  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะฉะนั้น  $\gcd(p, nq + 1) = 1$  และจากสมการ (4) จะได้ว่า

$$(a + b)pq = (nq + 1)ab \quad (9)$$

เพราะฉะนั้น  $p|a$  หรือ  $p|b$  โดยไม่เสียนัยสำคัญ สมมติว่า  $p|a$  ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก  $a_1$  ซึ่งทำให้  $a = pa_1$  และจากสมการ (9) จะได้ว่า

$$(pa_1 + b)q = (nq + 1)a_1b \quad (10)$$

และเนื่องจาก  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นสามารถแยกพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

**กรณี 1**  $\gcd(p, b) = p$  จะได้ว่า  $p|b$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $b_1$  ซึ่งทำให้  $b = pb_1$  และจากสมการ (10) จะได้ว่า

$$(a_1 + b_1)q = (nq + 1)a_1b_1 \quad (11)$$

และจาก  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $\gcd(q, nq + 1) = 1$  ดังนั้น  $q|a_1$  หรือ  $q|b_1$  โดยไม่เสียนัยสำคัญ สมมติว่า  $q|a_1$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $a_2$  ซึ่งทำให้  $a_1 = qa_2$  และจากสมการ (11) จะได้ว่า

$$b_1(1 - a_2) = qa_2(nb_1 - 1) \quad (12)$$

ถ้า  $nb_1 - 1 > 0$  ดังนั้น  $1 - a_2 > 0$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก  $a_2$  เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น  $nb_1 - 1 = 0$  เพราะฉะนั้น  $n = b_1 = 1$  และเนื่องจากสมการ (12) จะได้ว่า  $a_2 = 1$  ดังนั้น  $a_1 = q$  เพราะฉะนั้น  $a = pq$  และ  $b = p$  นั่นคือ  $(a, b, p, q, n) = (pq, p, p, q, 1)$

**กรณี 2**  $\gcd(p, b) = 1$  จากสมการ (10) จะได้ว่า

$$pa_1q = b((nq + 1)a_1 - q) \quad (13)$$

เนื่องจาก  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นสามารถแยกพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

**กรณีย่อย 2.1**  $\gcd(q, b) = q$  จะได้ว่า  $q|b$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $b_1$  ซึ่งทำให้  $b = qb_1$  และจาก  $\gcd(p, b) = 1$  ดังนั้น  $\gcd(p, b_1) = 1$  และจากสมการ (13) จะได้ว่า

$$pa_1 = (nq + 1)a_1b_1 - qb_1 \quad (14)$$

ดังนั้น  $a_1|qb_1$  และเนื่องจาก  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นสามารถแยกพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

**กรณีย่อย 2.1.1**  $\gcd(q, a_1) = 1$  จาก  $a_1|qb_1$  ดังนั้น  $a_1|b_1$  จะมีจำนวนเต็มบวก  $b_2$  ทำให้  $b_1 = a_1b_2$  และจาก  $\gcd(p, b_1) = 1$  ดังนั้น  $\gcd(p, b_2) = 1$  และจากสมการ (14) จะได้ว่า  $p = b_2((nq + 1)a_1 - q)$  และจาก  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น  $p = (nq + 1)a_1 - q$  และ  $b_2 = 1$  จะได้ว่า  $a_1 = (p + q)/(nq + 1)$  และ  $b_1 = a_1$  เพราะฉะนั้น

$a = p(p+q)/(nq+1)$  และ  $b = q(p+q)/(nq+1)$  นั่นคือ  $(a, b, p, q, n) = (p(p+q)/(nq+1), q(p+q)/(nq+1), p, q, n)$  เมื่อ  $(p+q)/(nq+1)$  เป็นจำนวนเต็ม

**กรณีย่อย 2.1.2**  $\gcd(q, a_1) = q$  ดังนั้น  $q|a_1$  จะมีจำนวนเต็มบวก  $a_2$  ซึ่งทำให้  $a_1 = qa_2$  และจากสมการ (14) ดังนั้น  $pa_2 = ((nq+1)a_2 - 1)b_1$  และเนื่องจาก  $\gcd(a_2, (nq+1)a_2 - 1) = \gcd(p, b_1) = 1$  ทำให้  $a_2 = b_1$  และ  $p = (nq+1)a_2 - 1$  จะได้ว่า  $a_2 = (p+1)/(nq+1)$  เพราะฉะนั้น  $a_1 = q(p+1)/(nq+1)$  และ  $b_1 = (p+1)/(nq+1)$  ดังนั้น  $a = pq(p+1)/(nq+1)$  และ  $b = q(p+1)/(nq+1)$  นั่นคือ  $(a, b, p, q, n) = (pq(p+1)/(nq+1), q(p+1)/(nq+1), p, q, n)$  เมื่อ  $(p+1)/(nq+1)$  เป็นจำนวนเต็ม

**กรณีย่อย 2.2**  $\gcd(q, b) = 1$  และเนื่องจาก  $\gcd(q, nq+1) = 1$  และสมการ (13) จะได้ว่า  $q|a_1$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $a_2$  ซึ่งทำให้  $a_1 = qa_2$  และจากสมการ (13) จะได้ว่า

$$pqa_2 = b((nq+1)a_2 - 1) \quad (15)$$

เนื่องจาก  $\gcd(p, b) = 1$  และ  $\gcd(q, b) = 1$  เพราะฉะนั้น  $\gcd(pq, b) = 1$  และเนื่องจาก  $\gcd(a_2, (nq+1)a_2 - 1) = 1$  และสมการ (15) ได้ว่า  $a_2 = b$  และ  $pq = (nq+1)a_2 - 1$  ดังนั้น  $a_2 = (pq+1)/(nq+1)$  ทำให้  $a_1 = q(pq+1)/(nq+1)$  เพราะฉะนั้น  $a = pq(pq+1)/(nq+1)$  และ  $b = (pq+1)/(nq+1)$  นั่นคือ

$$(a, b, p, q, n) = (pq(pq+1)/(nq+1), (pq+1)/(nq+1), p, q, n)$$

เมื่อ  $(pq+1)/(nq+1)$  เป็นจำนวนเต็ม

ลำดับต่อไปจะหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ (5) และเนื่องจาก Prugsapitak (2023, 2024) ได้พิสูจน์กรณีที่  $n = 1$  แล้ว ดังนั้นในที่นี้จะพิจารณากรณีที่  $n > 1$

**ทฤษฎีบท 3** ให้  $a, b, n$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่  $n > 1$  และ  $p > nq$  จะได้ว่าสมการ (5) มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้

$$1) (a, b, p, q, n) = (2p, p, p, 2, 2)$$

$$2) (a, b, p, q, n) = (p(p+q)/(nq-1), q(p+q)/(nq-1), p, q, n)$$

เมื่อ  $(p+q)/(nq-1)$  เป็นจำนวนเต็ม

$$3) (a, b, p, q, n) = (pq(p+1)/(nq-1), q(p+1)/(nq-1), p, q, n)$$

เมื่อ  $(p+1)/(nq-1)$  เป็นจำนวนเต็ม

$$4) (a, b, p, q, n) = (pq(pq+1)/(nq-1), (pq+1)/(nq-1), p, q, n)$$

เมื่อ  $(pq+1)/(nq-1)$  เป็นจำนวนเต็ม

**พิสูจน์** จากสมการ (5) จะได้ว่า

$$(a+b)pq = (nq-1)ab \quad (16)$$

เนื่องจาก  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $p > nq$  ดังนั้น  $\gcd(p, nq-1) = 1$  เพราะฉะนั้นจากสมการ (16) จะได้ว่า  $p|a$  หรือ  $p|b$  โดยไม่เสียนัยสำคัญ สมมติว่า  $p|a$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $a_1$  ซึ่งทำให้  $a = pa_1$  และจากสมการ (16) จะได้ว่า

$$(pa_1 + b)q = (nq-1)a_1b \quad (17)$$

และเนื่องจาก  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นสามารถแยกพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

**กรณี 1**  $\gcd(p, b) = p$  จะได้ว่า  $p|b$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $b_1$  ซึ่งทำให้  $b = pb_1$  และจากสมการ (17) จะได้ว่า

$$(a_1 + b_1)q = (nq-1)a_1b_1 \quad (18)$$

และจาก  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ และ  $\gcd(q, nq-1) = 1$  ดังนั้น  $q|a_1$  หรือ  $q|b_1$  โดยไม่เสียนัยสำคัญ สมมติว่า  $q|a_1$  ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก  $a_2$  ซึ่งทำให้  $a_1 = qa_2$  และจากสมการ (18) จะได้ว่า

$$b_1(1 + a_2) = qa_2(nb_1 - 1) \quad (19)$$

เนื่องจาก  $\gcd(b_1, nb_1 - 1) = \gcd(a_2, 1 + a_2) = 1$  ดังนั้น  $b_1 = a_2$  หรือ  $b_1 = q$  หรือ  $b_1 = qa_2$

**กรณีย่อย 1.1**  $b_1 = a_2$  และจากสมการ (19) จะได้ว่า

$$1 + a_2 = q(na_2 - 1) \quad (20)$$

เพราะฉะนั้น  $1 + a_2 > na_2 - 1$  หรือ  $2 > (n - 1)a_2$  ดังนั้น  $n = 2$  และ  $a_2 = 1$  และจากสมการ (20) ได้ว่า  $q = 2$  ดังนั้น  $a_1 = 2$  และ  $b_1 = 1$  เพราะฉะนั้น  $a = 2p$  และ  $b = p$  นั่นคือ  $(a, b, p, q, n) = (2p, p, p, 2, 2)$

**กรณีย่อย 1.2**  $b_1 = q$  และจากสมการ (19) จะได้ว่า  $1 + a_2 = a_2(nq - 1)$  และจาก  $\gcd(a_2, 1 + a_2) = 1$  ดังนั้น  $a_2 = 1$  ดังนั้น  $nq = 3$  และจาก  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะฉะนั้น  $n = 1$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก  $n > 1$

**กรณีย่อย 1.3**  $b_1 = qa_2$  และจากสมการ (19) จะได้ว่า  $1 + a_2 = nqa_2 - 1$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก  $nq > 3$  และ  $a_2 \geq 1$  ดังนั้น  $nqa_2 - 1 > 3a_2 - 1 \geq 1 + a_2$

**กรณี 2**  $\gcd(p, b) = 1$  สามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกับกรณี 2 ของทฤษฎีบท 2 โดยเปลี่ยนจาก  $nq + 1$  เป็น  $nq - 1$

### ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในทฤษฎีบท 2 และ 3 ได้แสดงผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสองสมการไดโอแฟนไทน์ (4) และ (5) ตามลำดับ และจะสังเกตได้ว่าผลเฉลยในทฤษฎีบท 2 ข้อ 4 – 6 และในทฤษฎีบท 3 ข้อ 2 – 4 มีความคล้ายกันตามลำดับ แต่จะแตกต่างกันเฉพาะตัวส่วนเท่านั้น โดยเปลี่ยนจาก  $nq + 1$  เป็น  $nq - 1$  นอกจากนี้จะเห็นว่าเศษส่วนในทฤษฎีบท 2 และ 3 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมของเศษส่วนที่มีตัวเศษเป็นหนึ่ง (Unit fraction) โดยที่ตัวส่วนเป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกัน ซึ่งเศษส่วนที่อยู่ในรูปแบบการเขียนดังกล่าวเรียกว่า เศษส่วนอียิปต์ (Egyptian fraction) เช่น จากทฤษฎีบท 2 สามารถเขียน  $\frac{7}{39}$  ให้อยู่ในรูป  $\frac{1}{78} + \frac{1}{6}$  และทฤษฎีบท 3 สามารถเขียน  $\frac{5}{57}$  ให้อยู่ในรูป  $\frac{1}{228} + \frac{1}{12}$  เป็นต้น ซึ่งเศษส่วนอียิปต์นี้มีประวัติศาสตร์ที่ยาวนานและได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์จำนวนมาก (Clemente & Fortuny, 2021)

## สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ทำให้ทราบผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสองสมการไดโอแฟนไทน์ (4) และ (5) ภายใต้เงื่อนไขที่  $a, b, n$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $p, q$  เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่  $p > nq$  โดยในการพิสูจน์ใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน และสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาค้นคว้าต่อไป คือ กรณีที่  $p \leq nq$  และการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{m}{pq}$  เมื่อ  $m$  เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

## เอกสารอ้างอิง

- Clemente, F., & Fortuny, J. M. (2021). Egyptian fractions and representation registers in the construction of the fraction concept. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(7), 1 – 17.
- Johnson, J. W. (2022). A Diophantine equation with an elementary solution. *The College Mathematics Journal*, 53(5), 361 – 363.
- Prugsapitak, S. (2023). The Egyptian fraction of the form  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{q-1}{pq}$ . *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 18(4), 595 – 597.
- Prugsapitak, S. (2024). Corrigendum to the Egyptian fraction of the form  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{q-1}{pq}$ . *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 19(1), 237.
- Mathematical Association of America. (2019). *The William Lowell Putnam Mathematical Competition*. Retrieved August 12, 2023 from <https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/Putnam/CompetitionArchive/2018PutnamProblems.pdf>.