Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก

QUASI-CANCELLATIVE CYCLIC-ASSOCIATIVE Γ-AG-GROUPOIDS

ธนวัต แสนยากุล* และ ไพโรจน์ เยียระยง
Thanawat Saenyakul* and Pairote Yiarayong

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม
Mathematics, Faculty of Science and Technology, Pibulsongkram Rajabhat University

Received: 1 May 2023 Revised: 2 August 2023 Accepted: 5 August 2023

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ขยายแนวความคิดของ Γ-กึ่งกรุปไปยังควอซี-ตัดออกและ AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่และพิสูจน์สมบัติพื้นฐานของสิ่งที่กล่าวมาข้างต้น นอกจากนี้ยังได้แนะนำแนวคิดของ Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออกและยังได้ตรวจสอบเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $(x\alpha y)\beta a=(x\alpha y)\beta b$ สำหรับทุก $a,b,x,y\in S$ และ $\alpha,\beta\in\Gamma$
2. $a\beta(y\alpha x)=b\beta(y\alpha x)$ สำหรับทุก $a,b,x,y\in S$ และ $\alpha,\beta\in\Gamma$

คำสำคัญ: AG-กรุปพอยด์, Γ-AG-กรุปพอยด์, AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่, คล้าย-ตัดออก

Abstract

In this paper, we extend the concept of Γ-semigroup to quasi-cancellative and cyclic-associative AG-groupoids and investigate various of its properties. We introduce the concept of quasi-cancellative cyclic-associative Γ-AG-groupoids. Moreover, we prove that the following conditions are equivalent:

* Corresponding author: ธนวัต แสนยากุล
E-mail: thanawat.sae@psru.ac.th

1. $(x\alpha y)\beta a=(x\alpha y)\beta b$ for all $a,b,x,y\in S$ and $\alpha,\beta\in\Gamma$.
2. $a\beta(y\alpha x)=b\beta(y\alpha x)$ for all $a,b,x,y\in S$ and $\alpha,\beta\in\Gamma$.

Keywords: AG-groupoid, Γ-AG-groupoid, cyclic-associative AG-groupoid, quasi-cancellative

บทนำ

ในปี ค.ศ. 1994 Protić & Stevanović (1994) ได้สร้างโครงสร้างคณิตประกอบด้วยเซตที่ไม่ใช่เซตว่างกับการดำเนินการทวิภาค $*$ ที่มีสมบัติ $(x*y)*z=(z*y)*x$ จะเรียกโครงสร้างคณิตนี้ว่ากรุปพอยด์ของอเบล-แกรสส์แมนน์ (Abel-Grassmann's groupoid) หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า AG-กรุปพอยด์ (AG-groupoid) ในปี ค.ศ. 1977 Kazim & Naseeruddin (1972) ได้เรียกโครงสร้างคณิตที่นิยามโดย Protic และ Stevanovic ว่ากึ่งกรุปเกือบซ้าย (left almost semigroups) หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า LA-กึ่งกรุป (LA-semigroups) ในปี ค.ศ. 1978 Mushtaq & Yusuf (1978) ได้พิสูจน์ว่า AG-กรุปพอยด์ตัดออกซ้าย (left cancellative AG-groupoid) จะเป็น AG-กรุปพอยด์ตัดออกขวา (right cancellative AG-groupoid) ในปี ค.ศ. 2016 AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ (cyclic-associative AG-groupoids) ได้ถูกนำเสนอโดย Iqbal et al. (2016)

ในปี ค.ศ. 2008 Hila (2008) ได้ให้ลักษณะเฉพาะของควอซี-ไอดีล (quasi-ideal) ใน Γ-กึ่งกรุปและบางลักษณะเฉพาะของ Γ-กึ่งกรุปปรกติ (regular Γ-semigroup) ในไอดีลซ้าย (left ideal), ไอดีลขวา (right ideal), ควอซี-ไอดีลและไบ-ไอ-ดีล (bi-ideal) นอกจากนี้ยังได้นำเสนอแนวความคิดของ Γ-ไอดีล (Γ-ideal) และ Γ-ไบ-ไอดีล (Γ-bi-ideal) ใน Γ-กึ่งกรุป ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 Shah & Rehman (2010a) ได้แนะนำแนวคิด Γ-AG-กรุปพอยด์ (Γ-AG-groupoids) และได้เสนอบทนิยามของ Γ-ไอดีลและ Γ-ไบ-ไอดีล นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์ว่าทุก Γ-ไอดีลใน Γ-AG-กรุปพอยด์ปรกติ (regular Γ-AG-groupoid) S จะเป็น Γ-เฉพาะ (Γ-prime) ก็ต่อเมื่อลดทอนไม่ได้เข้ม (strongly irreducible) ในปีเดียวกันนั้น Shah & Rehman (2010b) ได้ตรวจสอบสมบัติบางประการของ Γ-ไอดีลและ M-ระบบ (M–systems) ใน Γ-AG-กรุปพอยด์ ในปี ค.ศ. 2013 Shah & Rehman (2013) ได้นำเสนอแนวความคิดของ Γ-AG-กรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่เฉพาะที่ (locally associative Γ-AG-groupoid) และสรุปผลลัพธ์บางประการของ

Γ-AG-กรุปพอยด์เปลี่ยนหมู่เฉพาะที่ ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Shah et al. (2014) ได้ศึกษาแนวคิดของ Γ-ไอดีลวิภัชนัย (fuzzy Γ-ideal), Γ-ไอดีลวิภัชนัยเฉพาะ (prime fuzzy Γ-ideal) และ Γ-ไอดีลวิภัชนัยกึ่งเฉพาะ (sem iprime fuzzy Γ-ideal) ของ Γ-AG-กรุปพอยด์ S ยังได้พิสูจน์ว่าถ้า S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์ที่มีเอกลักษณ์ซ้ายแล้วสำหรับทุก Γ-ไอดีลวิภัชนัยของ S เป็นนิจพล (idempotent) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก Γ-ไอดีลวิภัชของ S เป็น Γ-ไอดีลวิภัชนัยกึ่งเฉพาะในปีเดียวกันนั้น Heidari & Davvaz (2014) ได้นำเสนอแนวความคิด Γ-กึ่งกรุป n ภาค (n-ary Γ-semigroup) เป็นลักษณะเฉพาะของ Γ-กึ่งกรุป n ภาค และ Γ-กึ่งกรุป (Γ-semigroup) นอกจากนั้นยังได้อธิบายสมบัติบางประการของ Γ-กึ่งกรุป n ภาค ต่อมาในปี ค.ศ. 2019 Basar (2019) ได้นำเสนอแนวคิดของ (m,n)-ไอดีล ((m,n)-ideal) นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์ว่าสำหรับแต่ละ LA-Γ-กึ่งกรุปอันดับยูนิแทรี (unitary ordered LA-Γ-semigroup) $(S,\Gamma,\ \cdot,\leq)$ ถ้า A เป็น (m,n)-ไอดีลของ S และ B เป็น (m,n)-ไอดีล ((m,n)-ideal) ของ A แล้ว B เป็น (m,n)-ไอดีลของ S ต่อมาในปี ค.ศ. 2021 Jantanan et al. (2021) ได้เสนอแนวคิดของ m-ซ้าย-Γ-ไอดีล (m-left-Γ-ideal), n-ขวา-Γ-ไอดีล (n-right-Γ-ideal) และ (m,n)-ควอซี-Γ-ไอดีล ((m,n)-quasi-Γ-ideals) ในอันดับ LA-Γ-กึ่งกรุป (ordered LA-Γ-semigroup) และตรวจสอบสมบัติบางประการของของ m-ซ้าย-Γ-ไอดีล, n-ขวา-Γ-ไอดีล และ (m,n)-ควอซี-Γ-ไอดีล

จากที่กล่าวมาข้างต้นจึงได้ขยายแนวความคิดของ Γ-กึ่งกรุปไปยังควอซี-ตัดออกและ AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ และมีการตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของ Γ-กึ่งกรุปไปยังควอซี-ตัดออกและ AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ นอกจากนี้ยังได้นำเสนอแนวความคิดของ Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออกและได้พิสูจน์ว่าสำหรับทุก $a,b,x,y\in S$ และ $\alpha,\beta\in\Gamma$ จะได้ $(x\alpha y)\ \beta a=(x\alpha y)\beta b$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha\beta(y\alpha x)=b\beta(y\alpha x)$

ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้เป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับบทนิยามของ Γ-AG-กรุปพอยด์และ Γ-พารามีเดียลโดยเริ่มต้นศึกษาจากบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม 2.1 (Shah & Rehman, 2010a) กำหนดให้ S และ Γ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก S ว่า Γ-AG-กรุปพอยด์ (Γ-AG-groupoid) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $\cdot : S\times\Gamma\times S\to S$ โดยที่ $\cdot(a,\alpha,b)\mapsto a\alpha b$ สำหรับทุก $a,b\in S$ และ $\alpha\in\Gamma$ และสำหรับ a,b และ c ใน S มีสมบัติ Γ-ผกผันซ้าย (Γ-left invertive) $(a\alpha b)\beta c=(c\alpha b)\beta a$ สำหรับทุก $\alpha,\beta\in\Gamma$

บทนิยาม 2.2 (Shah & Rehman, 2010a) ให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์ จะเรียก S ว่า Γ-พารามีเดียล (Γ-paramedial) ก็ต่อเมื่อ $(a\alpha b)\beta(c\gamma d)=(d\alpha c)\beta(b\gamma a)$ สำหรับทุก $a,b,c,d\in S$ และ $\alpha,\beta\in\Gamma$

บทตั้ง 2.3 (Shah & Rehman, 2013) กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์ ถ้า $a,b,c,d\in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ แล้ว $(a\alpha b)\beta(c\gamma d)=(a\alpha c)\beta(b\gamma d)$

ทฤษฎีบทหลัก Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ในหัวข้อนี้เป็นการขยายแนวคิดของควอซี-ตัดออกและ AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่เพื่อสร้างนิยามของ Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ดังนี้

บทนิยาม 3.1 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก (quasi-cancellative cyclic-associative Γ-AG-groupoid) ถ้าสำหรับทุก $a,b,c\in S$ และ $\alpha,\beta\in\Gamma$ แล้วมีสมบัติ ดังนี้

1. $a\alpha(b\beta c)=c\alpha(a\beta b)$
2. ถ้า $a\alpha a=a\alpha b$ และ $b\beta b=b\beta a$ แล้ว $a=b$
3. ถ้า $a\alpha a=b\alpha a$ และ $b\beta b=a\beta b$ แล้ว $a=b$

ต่อไปนี้จะเป็นการแนะนำสมบัติพื้นฐานบางประการของ Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออกเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาโครงสร้างทางพีชคณิตของ Γ-AG-กรุปพอยด์ ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 3.2 ถ้า S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่แล้วจะเป็น Γ-พารามีเดียลเสมอ

การพิสูจน์ ให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่สำหรับทุก $a,b,c,d \in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(a\alpha b)\beta(c\gamma d) &= d\beta((a\alpha b)\gamma c) \\
&= c\beta(d\gamma(a\alpha b)) \\
&= c\beta(b\gamma(d\alpha a)) \\
&= (d\alpha a)\beta(c\gamma b) \\
&= b\beta((d\alpha a)\gamma c) \\
&= b\beta((c\alpha a)\gamma d) \\
&= d\beta(b\gamma(c\alpha a)) \\
&= d\beta(a\gamma(b\alpha c)) \\
&= (b\alpha c)\beta(d\gamma a) \\
&= a\beta((b\alpha c)\gamma d) \\
&= a\beta((d\alpha c)\gamma b) \\
&= (d\alpha c)\beta(b\gamma a)
\end{aligned}
$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่าถ้า S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่แล้วจะเป็น Γ-พารามีเดียลเสมอ

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ถ้า $a,b,x \in S$ และ $\alpha \in \Gamma$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $x\alpha a = x\alpha b$
2. $a\alpha x = b\alpha x$

การพิสูจน์ $(1 \Rightarrow 2)$ ให้ $a,b,x \in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ โดยที่ $x\alpha a = x\alpha b$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(a\alpha x)\beta(a\alpha x) &= (a\alpha a)\beta(x\alpha x) \\
&= x\beta(x\alpha(a\alpha a)) \\
&= x\beta(a\alpha(a\alpha x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x\beta(a\alpha(x\alpha a)) \\
&= a\beta((x\alpha a)\alpha x) \\
&= (x\alpha b)\beta(x\alpha a) \\
&= x\beta(a\alpha(x\alpha b)) \\
&= x\beta(x\alpha(b\alpha a)) \\
&= (b\alpha x)\beta(a\alpha x) \\
&= x\beta((a\alpha x)\alpha b) \\
&= (a\alpha x)\beta(b\alpha x)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(b\alpha x)\gamma(b\alpha x) &= (b\alpha b)\gamma(x\alpha x) \\
&= x\gamma(x\alpha(b\alpha b)) \\
&= x\gamma(b\alpha(b\alpha x)) \\
&= x\gamma(b\alpha(x\alpha b)) \\
&= b\gamma((x\alpha b)\alpha x) \\
&= (x\alpha a)\gamma(x\alpha b) \\
&= x\gamma(b\alpha(x\alpha a)) \\
&= x\gamma(x\alpha(a\alpha b)) \\
&= (a\alpha x)\gamma(b\alpha x) \\
&= x\gamma((b\alpha x)\alpha a) \\
&= (b\alpha x)\gamma(a\alpha x)
\end{aligned}
$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a\alpha x = b\alpha x$

$(2 \Rightarrow 1)$ ให้ $a,b,x \in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ โดยที่ $a\alpha x = b\alpha x$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(a\alpha x)\beta(b\alpha x) &= b\beta(x\alpha(a\alpha x)) \\
&= x\beta((a\alpha x)\alpha b) \\
&= x\beta((b\alpha x)\alpha a) \\
&= (b\alpha x)\beta(a\alpha x) \\
&= (b\alpha a)\beta(x\alpha x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x\beta\left(b\alpha\left(a\alpha x\right)\right) \\
&= a\beta\left(\left(x\alpha b\right)\alpha x\right) \\
&= \left(x\alpha a\right)\beta\left(x\alpha a\right) \\
&= x\beta\left(a\alpha\left(x\alpha a\right)\right) \\
&= x\beta\left(x\alpha\left(a\alpha a\right)\right) \\
&= \left(a\alpha x\right)\beta\left(a\alpha x\right)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\left(b\alpha x\right)\gamma\left(a\alpha x\right) &= a\gamma\left(x\alpha\left(b\alpha x\right)\right) \\
&= x\gamma\left(\left(b\alpha x\right)\alpha a\right) \\
&= x\gamma\left(\left(a\alpha x\right)\alpha b\right) \\
&= \left(a\alpha x\right)\gamma\left(b\alpha x\right) \\
&= \left(a\alpha b\right)\gamma\left(x\alpha x\right) \\
&= x\gamma\left(a\alpha\left(b\alpha x\right)\right) \\
&= b\gamma\left(\left(x\alpha a\right)\alpha x\right) \\
&= \left(x\alpha b\right)\gamma\left(x\alpha b\right) \\
&= x\gamma\left(b\alpha\left(x\alpha b\right)\right) \\
&= x\gamma\left(x\alpha\left(b\alpha b\right)\right) \\
&= \left(b\alpha x\right)\gamma\left(b\alpha x\right)
\end{aligned}
$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a\alpha x = b\alpha x$

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ถ้า $a,b,x,y \in S$, $\alpha,\beta \in \Gamma$ และ $(x\alpha x)\beta a = \left(x\alpha x\right)\beta b$ แล้ว $a\Gamma x = b\Gamma x$

การพิสูจน์ ให้ $a,b,x \in S$ และ $\alpha,\beta \in \Gamma$ โดยที่ $(x\alpha x)\beta a = \left(x\alpha x\right)\beta b$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\left(a\alpha x\right)\alpha(a\alpha x) &= \left(a\beta a\right)\beta(x\alpha x) \\
&= \left((x\alpha x)\beta a\right)\beta a \\
&= \left(\left(x\alpha x\right)\beta b\right)\beta a
\end{aligned}
$$

$$= (a\beta b)\beta(x\alpha x)$$
$$= (a\alpha x)\beta(b\alpha x)$$

และ

$$\begin{aligned}(b\beta x)\beta(b\alpha x) &= (b\beta b)\beta(x\alpha x)\\ &= ((x\alpha x)\beta b)\beta b\\ &= ((x\alpha x)\beta a)\beta b\\ &= (b\beta a)\beta(x\alpha x)\\ &= (b\beta x)\beta(a\alpha x)\end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a\Gamma x = b\Gamma x$

ทฤษฎีบท 3.5 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ถ้า $a,b,x,y \in S$, $\alpha,\beta \in \Gamma$ และ $(x\alpha x)\beta a = (x\alpha x)\beta b$ แล้ว $x\alpha a = x\alpha b$

การพิสูจน์ ให้ $a,b,x \in S$ และ $\alpha,\beta \in \Gamma$ โดยที่ $(x\alpha x)\beta a = (x\alpha x)\beta b$ จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ $a\alpha x = b\alpha x$ โดยทฤษฎีบท 3.3 ทำให้ได้ว่า $x\alpha a = x\alpha b$

ทฤษฎีบท 3.6 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ถ้า $(x\alpha y)\beta a = (x\alpha y)\beta b$ แล้ว $a\beta(y\alpha x) = b\beta(y\alpha x)$ สำหรับทุก $a,b,x,y \in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma,\lambda \in \Gamma$

การพิสูจน์ ให้ $a,b,x,y \in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma,\tau \in \Gamma$ โดยที่ $(x\alpha y)\beta a = (x\alpha y)\beta b$ พิจารณา

$$\begin{aligned}(a\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta(y\alpha x)) &= ((y\beta x)\alpha a)\gamma((y\beta x)\alpha a)\\ &= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta a)\\ &= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\gamma(a\beta a)\\ &= ((a\beta a)\beta(x\alpha y))\gamma(x\alpha y)\\ &= (((x\alpha y)\beta a)\beta a)\gamma(x\alpha y)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((a\beta b)\beta(x\alpha y))\gamma(x\alpha y) \\
&= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta b) \\
&= (b\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta(y\alpha x))
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(b\beta(y\alpha x))\lambda(b\beta(y\alpha x)) &= ((y\alpha x)\beta b)\lambda((y\alpha x)\beta b) \\
&= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\lambda(b\beta b) \\
&= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\lambda(b\beta b) \\
&= ((b\beta b)\beta(x\alpha y))\lambda(x\alpha y) \\
&= (((x\alpha y)\beta b)\beta b)\lambda(x\alpha y) \\
&= ((b\beta a)\beta(x\alpha y))\lambda(x\alpha y) \\
&= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\lambda(b\beta a) \\
&= (a\beta(y\alpha x))\lambda(b\beta(y\alpha x))
\end{aligned}
$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a\beta(y\alpha x) = b\beta(y\alpha x)$

ทฤษฎีบท 3.7 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ถ้า $(x\alpha y)\beta a = (x\alpha y)\beta b$ แล้ว $(y\alpha x)\beta a = (y\alpha x)\beta b$ สำหรับทุก $a,b,x,y \in S$ และ $\alpha,\beta \in \Gamma$

การพิสูจน์ ให้ $a,b,x,y \in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma,\lambda \in \Gamma$ โดยที่ $(x\alpha y)\beta a = (x\alpha y)\beta b$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(a\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta(y\alpha x)) &= ((y\alpha x)\beta a)\gamma((y\alpha x)\beta a) \\
&= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta a) \\
&= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\gamma(a\beta a) \\
&= ((a\beta a)\beta(x\alpha y))\gamma(x\alpha y) \\
&= (((x\alpha y)\beta a)\beta a)\gamma(x\alpha y) \\
&= (((x\alpha y)\beta b)\beta a)\gamma(x\alpha y) \\
&= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\gamma(a\beta b) \\
&= ((y\alpha x)\beta a)\gamma((y\alpha x)\beta b)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(b\beta(y\alpha x))\lambda(b\beta(y\alpha x)) &= ((y\alpha x)\beta b)\lambda((y\alpha x)\beta b) \\
&= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\lambda(b\beta b) \\
&= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\lambda(b\beta b) \\
&= ((b\beta b)\beta(x\alpha y))\lambda(x\alpha y) \\
&= (((x\alpha y)\beta b)\beta b)\lambda(x\alpha y) \\
&= (((x\alpha y)\beta a)\beta b)\lambda(x\alpha y) \\
&= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\lambda(b\beta a) \\
&= ((y\alpha x)\beta b)\lambda((y\alpha x)\beta a)
\end{aligned}
$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(y\alpha x)\beta a = (y\alpha x)\beta b$

ทฤษฎีบท 3.8 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ถ้า $a\beta(x\alpha y) = b\beta(x\alpha y)$ แล้ว $a\beta(y\alpha x) = b\beta(y\alpha x)$ สำหรับทุก $a,b,x,y \in S$ และ $\alpha,\beta \in \Gamma$

การพิสูจน์ ให้ $a,b,x,y \in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma,\lambda \in \Gamma$ โดยที่ $a\beta(x\alpha y) = b\beta(x\alpha y)$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(a\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta(y\alpha x)) &= ((y\alpha x)\beta a)\gamma((y\alpha x)\beta a) \\
&= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta a) \\
&= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\gamma(a\beta a) \\
&= ((a\beta a)\beta(x\alpha y))\gamma(x\alpha y) \\
&= (((x\alpha y)\beta a)\beta a)\gamma(x\alpha y) \\
&= (a\beta(x\alpha y))\gamma(a\beta(x\alpha y)) \\
&= ((x\alpha y)\beta a)\gamma((x\alpha y)\beta b) \\
&= ((a\beta b)\beta(x\alpha y))\gamma(x\alpha y) \\
&= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta b) \\
&= (b\beta(y\alpha x))\gamma(a\beta(y\alpha x))
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\left(b\beta\left(y\alpha x\right)\right)\lambda\left(b\beta\left(y\alpha x\right)\right) &= \left(\left(y\alpha x\right)\beta b\right)\lambda\left(\left(y\alpha x\right)\beta b\right)\\
&= \left(\left(y\alpha x\right)\beta\left(y\alpha x\right)\right)\lambda\left(b\beta b\right)\\
&= \left(\left(x\alpha y\right)\beta\left(x\alpha y\right)\right)\lambda\left(b\beta b\right)\\
&= \left(\left(b\beta b\right)\beta\left(x\alpha y\right)\right)\lambda\left(x\alpha y\right)\\
&= \left(\left(\left(x\alpha y\right)\beta b\right)\beta b\right)\lambda\left(x\alpha y\right)\\
&= \left(b\beta\left(x\alpha y\right)\right)\lambda\left(b\beta\left(x\alpha y\right)\right)\\
&= \left(\left(x\alpha y\right)\beta b\right)\lambda\left(\left(x\alpha y\right)\beta a\right)\\
&= \left(\left(b\beta a\right)\beta\left(x\alpha y\right)\right)\lambda\left(x\alpha y\right)\\
&= \left(\left(y\alpha x\right)\beta\left(y\alpha x\right)\right)\lambda\left(b\beta a\right)\\
&= \left(a\beta\left(y\alpha x\right)\right)\lambda\left(b\beta\left(y\alpha x\right)\right)
\end{aligned}
$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $a\beta\left(y\alpha x\right)=b\beta\left(y\alpha x\right)$

ทฤษฎีบท 3.9 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ถ้า $a\beta(x\alpha y)=b\beta(x\alpha y)$ แล้ว $\left(y\alpha x\right)\beta a=\left(y\alpha x\right)\beta b$ สำหรับทุก $a,b,x,y\in S$ และ $\alpha,\beta\in\Gamma$

การพิสูจน์ ให้ $a,b,x,y\in S$ และ $\alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\Gamma$ โดยที่ $a\beta(x\alpha y)=b\beta(x\alpha y)$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\left(a\beta\left(y\alpha x\right)\right)\gamma\left(a\beta\left(y\alpha x\right)\right) &= \left(\left(y\alpha x\right)\beta a\right)\gamma\left(\left(y\alpha x\right)\beta a\right)\\
&= \left(\left(y\alpha x\right)\beta\left(y\alpha x\right)\right)\gamma\left(a\beta a\right)\\
&= \left(\left(x\alpha y\right)\beta\left(x\alpha y\right)\right)\gamma\left(a\beta a\right)\\
&= \left(\left(a\beta a\right)\beta\left(x\alpha y\right)\right)\gamma\left(x\alpha y\right)\\
&= \left(\left(\left(x\alpha y\right)\beta a\right)\beta a\right)\gamma\left(x\alpha y\right)\\
&= \left(\left(x\alpha y\right)\beta a\right)\gamma\left(\left(x\alpha y\right)\beta a\right)\\
&= \left(b\beta\left(x\alpha y\right)\right)\gamma\left(a\beta\left(x\alpha y\right)\right)\\
&= \left(\left(\left(x\alpha y\right)\beta b\right)\beta a\right)\gamma\left(x\alpha y\right)\\
&= \left(\left(x\alpha y\right)\beta\left(x\alpha y\right)\right)\gamma\left(a\beta b\right)\\
&= \left(\left(y\alpha x\right)\beta a\right)\gamma\left(\left(y\alpha x\right)\beta b\right)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(b\beta(y\alpha x))\lambda(b\beta(y\alpha x)) &= ((y\alpha x)\beta b)\lambda((y\alpha x)\beta b) \\
&= ((y\alpha x)\beta(y\alpha x))\lambda(b\beta b) \\
&= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\lambda(b\beta b) \\
&= ((b\beta b)\beta(x\alpha y))\lambda(x\alpha y) \\
&= (((x\alpha y)\beta b)\beta b)\lambda(x\alpha y) \\
&= ((x\alpha y)\beta b)\lambda((x\alpha y)\beta b) \\
&= (a\beta(x\alpha y))\lambda(b\beta(x\alpha y)) \\
&= (((x\alpha y)\beta a)\beta b)\lambda(x\alpha y) \\
&= ((x\alpha y)\beta(x\alpha y))\lambda(b\beta a) \\
&= ((y\alpha x)\beta b)\lambda((y\alpha x)\beta a)
\end{aligned}
$$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $(y\alpha x)\beta a = (y\alpha x)\beta b$

ทฤษฎีบท 3.10 กำหนดให้ S เป็น Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออก ถ้า $a,b,x,y \in S$ และ $\alpha,\beta \in \Gamma$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $(x\alpha y)\beta a = (x\alpha y)\beta b$
2. $a\beta(y\alpha x) = b\beta(y\alpha x)$

การพิสูจน์ $(1 \Rightarrow 2)$ ให้ $a,b,x,y \in S$ โดยที่ $(x\alpha y)\beta a = (x\alpha y)\beta b$ สำหรับทุก $\alpha,\beta \in \Gamma$ โดยทฤษฎีบท 3.6 จะได้ว่า $a\beta(y\alpha x) = b\beta(y\alpha x)$

$(2 \Rightarrow 1)$ ให้ $a,b,x,y \in S$ โดยที่ $a\beta(y\alpha x) = b\beta(y\alpha x)$ สำหรับทุก $\alpha,\beta \in \Gamma$ โดยทฤษฎีบท 3.9 จะได้ว่า $(x\alpha y)\beta a = (x\alpha y)\beta b$

สรุปผลการวิจัย

ในบทความนี้ได้ขยายแนวคิด AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออกเพื่อสร้างบทนิยามของ Γ-AG-กรุปพอยด์วัฏจักร-เปลี่ยนหมู่ควอซี-ตัดออกและพิสูจน์สมบัติบางประการของบทนิยามข้างต้น นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์ว่า $(x\alpha y)\beta a=\left(x\alpha y\right)\beta b$ ก็ต่อเมื่อ $a\beta\left(y\alpha x\right)=b\beta\left(y\alpha x\right)$ สำหรับทุก $a,b,x,y\in S$ และ $\alpha,\beta\in\Gamma$

เอกสารอ้างอิง

Basar, A. (2019). A note on (m,n)-Γ-ideals of ordered AL-Γ-semigroups. *Konuralp Journal of Mathematics*, *7*(1), 107-111.

Heidari, D., & Davvaz, B. (2014). n-ary Γ-semigroups, operators and Green's relations. *Afrika Matematika*, 25, 841-856.

Hila, K. (2008). On regular, semiprime and quasi-reflexive Γ-semigroup and minimal quasi-ideals. *Lobachevskii Journal of Mathematicsis*, *29*(3), 141–152.

Iqbal, M., & Ahmad, I. (2021). On quasi-cancellative AG-groupoids. *Quasigroups and Related*, 29, 209-212.

Iqbal, M., Ahmad, I., Shah, M., & Ali, M. I. (2016). On cyclic associative Abel-Grassman groupoids. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, *12*(5), 1-16.

Jantanan, W., Chinram, R., & Petchkaew, P. (2021). On (m,n)-quasi-gamma-ideals in ordered LA-gamma-semigroupoid. *Journal of Mathematics and Computer Science*, *11*(3), 3377-3390.

Kazim, M. A., & Naseeruddin, M. (1977). On almost semigroups. *Portugaliae Math.*, 2, 41-47.

Mushtaq, Q., & Yusuf, M. S. (1978). On LA-semigroups. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, 8, 65-70.

Protic, P. V., & Stevanovic, N. (1994). On Abel-Grassmann's groupoids (exposition). *Proceedings of the II Mathematical Conference in Priština pp.*, 27-29.

Shah, T., Rehman, I., & Khan, A. (2014). Fuzzy Γ-ideals in Γ-AG-groupoid. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *43*(4), 625-634.

Shah, T., & Rehman, I. (2010a). On Γ-ideals and Γ-bi-ideals. *International Journal of Algebra*, *4*(6), 267-276.

Shah, T., & Rehman, I. (2010b). On M-systems in Γ-AG-groupods. *Proceedings of the Pakistan Academy of Sciencesi*, *47*(1), 33-39.

Shah, T., & Rehman, I. (2013). Decomposition of locally associative Γ-AG-groupods. *Novi Sad Journal of Mathematics*, *43*(1), 1-8.