

สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 10)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 10$

เป็นจำนวนเฉพาะ

ON THE DIOPHANTINE EQUATION $p^x + (p + 10)^y = z^2$

WHEN p AND $p + 10$ ARE PRIMES

สุธน ตาดิ*

Suton Tadee*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

Received: 15 May 2022

Accepted: 10 August 2022

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 10)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ และพบว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่าสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและถ้า y เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า สมการดังกล่าวมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(p, x, y, z) \in \{(3, 1, 0, 2), (3, 3, 2, 14)\}$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์, ผลเฉลยจำนวนเต็ม

Abstract

This paper, reports the non-negative integer solutions (x, y, z) of the Diophantine equation $p^x + (p + 10)^y = z^2$, when p and $p + 10$ are primes. It proved that if x is an even integer, then this equation has no non-negative integer solution. If y is an even integer, then this equation has only two non-negative integer solutions which are $(p, x, y, z) \in \{(3, 1, 0, 2), (3, 3, 2, 14)\}$.

Keywords: Diophantine equation, integer solution

* ผู้ประสานงาน: สุธน ตาดิ

อีเมล: suton.t@lawasri.tru.ac.th

บทนำ

เมื่อไม่นานมานี้ได้มีผู้สนใจศึกษาค้นคว้าหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $p^x + (p + h)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + h$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ h เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ตัวอย่างเช่น Bacani & Rabago (2015) ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 2)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป $(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2p + 2})$ เมื่อ $\sqrt{2p + 2}$ เป็นจำนวนเต็ม ต่อมา Burshtein (2018a) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 4)^y = z^2$ เมื่อ $p > 3$ และ $p + 4$ เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก นอกจากนี้ Burshtein (2018b) ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 6)^y = z^2$ เมื่อ $p, p + 6$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $x + y = 2, 3, 4$ ในปีเดียวกัน Neres (2018) ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 8)^y = z^2$ เมื่อ $p > 3$ และ $p + 8$ เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก หลังจากนั้น Burshtein (2019) ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยพบว่ามียี่สิบสองกรณีเท่านั้น คือ กรณีที่ไม่มีผลเฉลยและกรณีมีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์ และ Kumar et al. (2019) ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 12)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 12$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ p อยู่ในรูป $6n + 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมา Dokchan & Pakapongpun (2021) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 20)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 20$ เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก และ Mina & Bacani (2021) ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 4k)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 4k$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $k \neq 1$ เป็นจำนวนเต็ม มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, p + 4k, x, y, z) = (3, 11, 5, 4, 122)$ เมื่อ $x > 1$ และ $y > 1$

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 10)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ

วิธีดำเนินการวิจัย

ในปี ค.ศ. 2017 Asthana & Singh (2017) ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 10)^y = z^2$ ในกรณีที่ $p = 3$ พบว่า

ทฤษฎีบท 1 (Asthana & Singh, 2017) สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 13^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสี่ผลเฉลยเท่านั้น คือ

$$(x, y, z) \in \{(1,0,2), (1,1,4), (3,2,14), (5,1,16)\}$$

สำหรับในงานวิจัยนี้จะแยกพิจารณาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^x + (p + 10)^y = z^2 \quad (1)$$

เมื่อ p และ $p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ ใน 2 กรณี คือ กรณีที่ x เป็นจำนวนเต็มคู่ และกรณีที่ y เป็นจำนวนเต็มคู่

ทฤษฎีบท 2 ให้ $p, p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า

1. ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
2. ถ้า y เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว สมการ (1) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(p, x, y, z) \in \{(3,1,0,2), (3,3,2,14)\}$

พิสูจน์

1. ให้ x เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ n ที่ทำให้ $x = 2n$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$(p + 10)^y = z^2 - p^{2n} = (z - p^n)(z + p^n) \quad (2)$$

จากสมการ (2) และ $p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ที่ทำให้

$$z - p^n = (p + 10)^u \quad (3)$$

$$z + p^n = (p + 10)^{y-u} \quad (4)$$

จากสมการ (3) และ (4) จะได้ว่า $y \geq 2u$ และ

$$2p^n = (p + 10)^u[(p + 10)^{y-2u} - 1] \quad (5)$$

จากสมการ (5) ถ้า $u > 0$ จะได้ว่า $(p + 10) | 2p^n$ และจาก $p, p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p + 10 = 2$ หรือ $p + 10 = p$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ทั้งสองกรณี เพราะฉะนั้น $u = 0$ จะได้ว่า

$$2p^n = (p + 10)^y - 1 \quad (6)$$

จากสมการ (6) จะได้ว่า $y \geq 1, n \geq 1$ และ

$$2p^n = (p + 9)[(p + 10)^{y-1} + (p + 10)^{y-2} + \dots + 1] \quad (7)$$

จากสมการ (7) จะได้ว่า $p | (p + 9)$ เพราะฉะนั้น $p | 9$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p = 3$ จากทฤษฎีบท 1 และ x เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

2. ให้ y เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ m ที่ทำให้ $y = 2m$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$p^x = z^2 - (p + 10)^{2m} = (z - (p + 10)^m)(z + (p + 10)^m) \quad (8)$$

จากสมการ (8) และ p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ที่ทำให้

$$z - (p + 10)^m = p^v \quad (9)$$

$$z + (p + 10)^m = p^{x-v} \quad (10)$$

จากสมการ (9) และ (10) จะได้ว่า $x \geq 2v$ และ

$$2(p + 10)^m = p^v[p^{x-2v} - 1] \quad (11)$$

จากสมการ (11) ถ้า $v > 0$ จะได้ว่า $p | 2(p + 10)^m$ และจาก $p, p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p = 2$ หรือ $p = p + 10$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ทั้งสองกรณี เพราะฉะนั้น $v = 0$ จะได้ว่า

$$2(p + 10)^m = p^x - 1 \quad (12)$$

จากสมการ (12) จะได้ว่า $x \geq 1$ และ

$$2(p+10)^m = (p-1)(p^{x-1} + p^{x-2} + \dots + 1) \quad (13)$$

ถ้า $p > 3$ และจากสมการ (12) จะได้ว่า $m \geq 1$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (13) และ $p+10$ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $(p+10)|(p-1)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $p = 3$ จากทฤษฎีบท 1 และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่าสมการ (1) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(p, x, y, z) \in \{(3, 1, 0, 2), (3, 3, 2, 14)\}$

บทแทรก 3 ให้ $p, p+10$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า ถ้า $p \equiv 2 \pmod{3}$ แล้ว สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

สมมติว่า x เป็นจำนวนเต็มคี่ และจาก $p \equiv 2 \pmod{3}$ จะได้ว่า $p^x \equiv 2 \pmod{3}$ และ $p+10 \equiv 0 \pmod{3}$ จึงทำให้ $(p+10)^y \equiv 0 \pmod{3}$ ดังนั้น $p^x + (p+10)^y \equiv 2 \pmod{3}$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv 2 \pmod{3}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0$ หรือ $1 \pmod{3}$ ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มคู่ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

หมายเหตุ จากบทแทรก 3 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $41^x + 51^y = z^2$ และ $47^x + 57^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทแทรก 4 ให้ d เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, w เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า ถ้า $p, p+10$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \equiv 2 \pmod{3}$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^x + (p+10)^y = w^{2d} \quad (14)$$

ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ a, b, c ที่ทำให้ $p^a + (p+10)^b = c^{2d}$ ดังนั้น $(x, y, z) = (a, b, c^d)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ (1) ซึ่งขัดแย้งกับบทแทรก 3 เพราะฉะนั้น สมการ (14) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทแทรก 5 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า
ถ้า $p \equiv 1 \pmod{5}$ แล้ว สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

เนื่องจาก $p \equiv 1 \pmod{5}$ ดังนั้น $p + 10 \equiv 1 \pmod{5}$ จะได้ว่า $p^x \equiv 1 \pmod{5}$
และ $(p + 10)^y \equiv 1 \pmod{5}$ เพราะฉะนั้น $p^x + (p + 10)^y \equiv 2 \pmod{5}$ และจากสมการ
(1) จะได้ว่า $z^2 \equiv 2 \pmod{5}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1$ หรือ $4 \pmod{5}$ นั่นคือ
สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

หมายเหตุ จากบทแทรก 5 สังเกตว่า $p + 10$ จะเป็นหรือไม่เป็นจำนวนเฉพาะก็ได้ สมการ (1)
ยังคงไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ตัวอย่างเช่น $11^x + 21^y = z^2$
และ $17^x + 27^y = z^2$ เป็นต้น

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์
 $p^x + (p + 10)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ พบว่า 1) ถ้า x เป็นจำนวน
เต็มคู่แล้ว สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ 2) ถ้า y เป็นจำนวนเต็มคู่
แล้ว สมการดังกล่าวมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ
 $(p, x, y, z) \in \{(3, 1, 0, 2), (3, 3, 2, 14)\}$ 3) ถ้า $p \equiv 2 \pmod{3}$ แล้ว สมการดังกล่าวและสมการ
ไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 10)^y = w^{2d}$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ d
เป็นจำนวนเต็มบวก และ 4) ถ้า $p \equiv 1 \pmod{5}$ แล้ว สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวน
เต็มที่ไม่เป็นลบ

อภิปรายผล

ผลเฉลยที่ค้นพบในงานวิจัยนี้ ยังไม่ใช่ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
ของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 10)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 10$ เป็นจำนวนเฉพาะ
เพราะหากรณีที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น จึงยังเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการหาผลเฉลย
สำหรับกรณีดังกล่าว นอกจากนี้ ยังคงมีสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $p^x + (p + h)^y = z^2$
เมื่อ p และ $p + h$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ h เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ยังไม่ทราบผลเฉลย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- Asthana, S. & Singh, M. M. (2017). On the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 114(2), 301-304.
- Bacani, J. B., & Rabago, J. F. T. (2015). The complete set of solutions of the Diophantine equation $p^x + q^y = z^2$ for twin primes p and q , *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 104(4), 517-521.
- Burshtein, N. (2018a). The Diophantine equation $p^x + (p + 4)^y = z^2$ when $p > 3$ and $p + 4$ are primes is insolvable in positive integers x, y, z . *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 16(2), 283-286.
- Burshtein, N. (2018b). Solutions of the Diophantine equation $p^x + (p + 6)^y = z^2$ when $p, p + 6$ are primes and $x + y = 2, 3, 4$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 17(1), 101-106.
- Burshtein, N. (2019). All the solutions of the Diophantine equations $p^x + p^y = z^2$ and $p^x - p^y = z^2$ when $p \geq 2$ is prime. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 19(2), 111-119.
- Dokchan, R., & Pakapongpun, A. (2021). On the Diophantine equation $p^x + (p + 20)^y = z^2$ where p and $p + 20$ are primes., *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 16(1), 179-183.
- Kumar, S., Gupta, D., & Kishan, H. (2019). On the solutions of exponential Diophantine equation $p^x + (p + 12)^y = z^2$. *International Transactions in Mathematical Sciences and Computers*, 11(1), 1-19.

- Mina, R. J. S. & Bacani, J. B. (2021). On the solutions of the Diophantine equation $p^x + (p + 4k)^y = z^2$ for prime pairs p and $p + 4k$. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 14(2), 471-479.
- Neres, F. (2018). On the solvability of the Diophantine equation $p^x + (p + 8)^y = z^2$ when $p > 3$ and $p + 8$ are primes. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 18(1), 9-13.