

## บางรูปแบบของจำนวนประกอบ SOME FORMS OF COMPOSITE NUMBERS

สุธน ตาดี\*  
Suton Tadee \*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี  
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาารูปแบบบางรูปแบบของจำนวนประกอบโดยใช้แนวทางการพิสูจน์ของ Nelsen (2021) ซึ่งได้เคยแสดงว่า  $n^4 + 4^n$  เป็นจำนวนประกอบ สำหรับ  $n \geq 2$  ผลการวิจัยพบว่า สำหรับ  $m, n, k \in \mathbb{N}$

- 1) ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $n^{4k} + 4^m$  และ  $9^n + \frac{(kn)^4}{4}$  เป็นจำนวนประกอบ
- 2) ถ้า  $m, n$  เป็นจำนวนคี่ และ  $mn \neq 1$  แล้ว  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบ

**คำสำคัญ:** จำนวนประกอบ, จำนวนเฉพาะ

### Abstract

This research was to examine some forms of composite numbers by using the Nelsen's proof (2021), which has previously shown that  $n^4 + 4^n$  was composite for  $n \geq 2$ . The results reveal that for  $m, n, k \in \mathbb{N}$ ,

- 1) if  $n$  was even, then  $n^{4k} + 4^m$  and  $9^n + \frac{(kn)^4}{4}$  were composite,
- 2) if  $m, n$  were odd and  $mn \neq 1$ , then  $n^{4k} + 4^m$  was composite.

**Keywords:** composite number, prime number

---

\* ผู้ประสานงาน: สุธน ตาดี  
อีเมลล์: suton.t@lawasri.tru.ac.th

## บทนำ

ในการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน หัวข้อหนึ่งที่น่าสนใจ คือ การแสดงว่าจำนวนนับใดเป็นจำนวนเฉพาะ จำนวนนับใดเป็นจำนวนประกอบ เช่น Shirmohammadi (2014) ได้สร้างหลักเกณฑ์ในการจำแนกจำนวนเฉพาะกับจำนวนประกอบ และ Fortunado (2016) ได้ทำการวิเคราะห์เซตของจำนวนเฉพาะและจำนวนประกอบ เป็นต้น โดยเป็นที่ทราบกันดีว่าจะเรียกจำนวนนับ  $p$  ซึ่ง  $p \neq 1$  ว่าจำนวนเฉพาะ (prime number) เมื่อไม่มีจำนวนนับ  $d$  ที่  $d$  หาร  $p$  ลงตัว และ  $1 < d < p$  และ เรียกจำนวนนับที่มากกว่า 1 และ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะว่า จำนวนประกอบ (composite number) (Niven et al., 1991) หรือจะกล่าวอีกนัยหนึ่งตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1** ให้  $a \in \mathbb{N}$  จะได้ว่า

$a$  เป็นจำนวนประกอบ ก็ต่อเมื่อ มี  $x, y \in \mathbb{N}$  ซึ่ง  $1 < x \leq y < a$  ที่ทำให้  $a = xy$

ในปี ค.ศ. 1962 Makowski (Horton, 1962) ได้เสนอปัญหาต่อไปนี้

จงแสดงว่า  $n^4 + 4^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) เป็นจำนวนเฉพาะ เพียงกรณีที่  $n = 1$  เท่านั้น และต่อมา Nelsen (2021) ได้พิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยแสดงว่า  $n^4 + 4^n$  เป็นจำนวนประกอบ สำหรับ  $n \geq 2$  ซึ่งได้ใช้ความรู้ทางเรขาคณิตแทนการเขียนพิสูจน์แบบบรรยาย ซึ่งเรียกการพิสูจน์ในลักษณะนี้ว่า “Proofs without words”

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหารูปแบบอื่นของจำนวนนับที่เป็นจำนวนประกอบซึ่งเป็นการขยายผลจากที่ Nelsen (2021) ได้พิสูจน์ไว้

## วิธีดำเนินการวิจัย

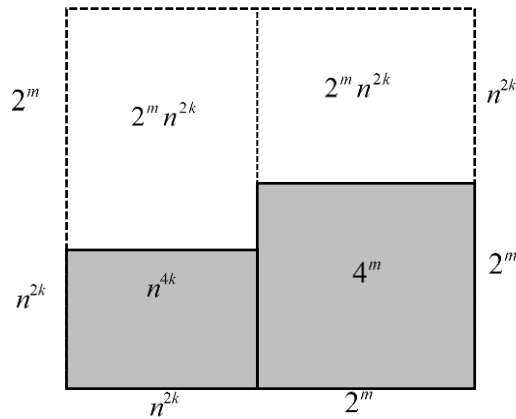
ในงานวิจัยนี้จะแสดงว่า จำนวนนับที่อยู่ในรูป  $n^{4k} + 4^m$  จะเป็นจำนวนประกอบ ต้องมีเงื่อนไขใดบ้าง เมื่อ  $m, n, k \in \mathbb{N}$  ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบ ดังนั้นเหลือพิจารณากรณีที่  $n$  เป็นจำนวนคี่ ซึ่งจะใช้แนวทางการพิสูจน์ของ Nelsen (2021)

**ทฤษฎีบท 2** ให้  $m, n, k \in \mathbb{N}$  จะได้ว่า

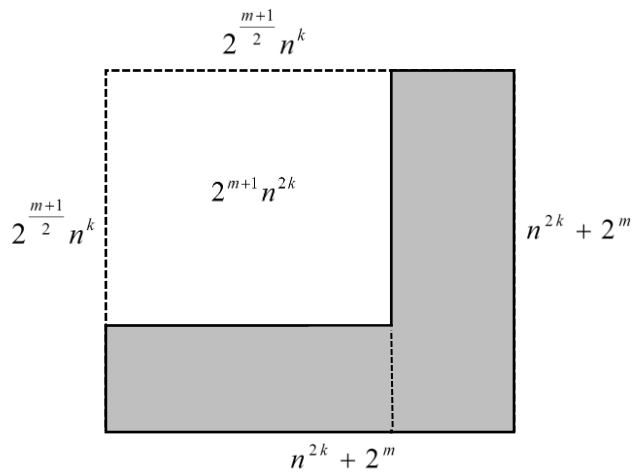
1. ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบ
2. ถ้า  $m, n$  เป็นจำนวนคี่ และ  $mn \neq 1$  แล้ว  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบ

### พิสูจน์

1. ให้  $n$  เป็นจำนวนคู่ จะเห็นได้ชัดว่า  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนคู่ที่มากกว่า 2 ดังนั้น  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบ
2. ให้  $m, n$  เป็นจำนวนคี่ และ  $mn \neq 1$  พิจารณารูปเรขาคณิตต่อไปนี้



รูปที่ 1



รูปที่ 2

$$n^{2k} + 2^m - 2^{\frac{m+1}{2}} n^k \quad \boxed{\quad \quad \quad n^{4k} + 4^m \quad \quad \quad}$$

$$n^{2k} + 2^m + 2^{\frac{m+1}{2}} n^k$$

รูปที่ 3

จะได้ว่า  $n^{4k} + 4^m = AB$

เมื่อ  $A = n^{2k} + 2^m - 2^{\frac{m+1}{2}} n^k$  และ  $B = n^{2k} + 2^m + 2^{\frac{m+1}{2}} n^k$

พิจารณา  $A = n^{2k} + 2^m - 2^{\frac{m+1}{2}} n^k = \left(n^k - 2^{\frac{m-1}{2}}\right)^2 + 2^{m-1}$

และ  $B = n^{2k} + 2^m + 2^{\frac{m+1}{2}} n^k = \left(n^k + 2^{\frac{m-1}{2}}\right)^2 + 2^{m-1}$

และเนื่องจาก  $m, n, k \in \mathbb{N}$  โดยที่  $m$  เป็นจำนวนคี่ และ  $m, n$  ไม่เท่ากับ 1 พร้อมกัน

ดังนั้น  $A, B \in \mathbb{N}$  โดยที่  $1 < A < B < n^{4k} + 4^m$

เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบ

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 2 หากพิจารณากรณีที่  $k = 1$  และ  $m = n$  จะได้รูปแบบ  
ที่ Nelsen (2021) ได้พิสูจน์ไว้

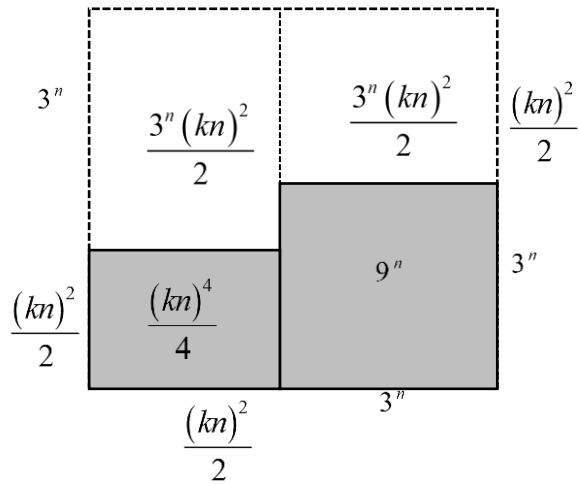
นอกจากนี้ ยังพบว่า มีรูปแบบอื่นของจำนวนประกอบดังปรากฏในทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3** ให้  $n, k \in \mathbb{N}$  จะได้ว่า

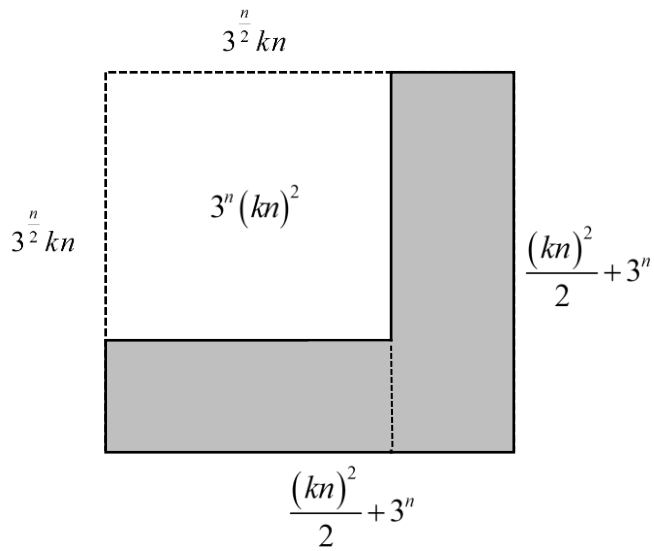
ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $9^n + \frac{(kn)^4}{4}$  เป็นจำนวนประกอบ

**พิสูจน์** ให้  $n$  เป็นจำนวนคู่

พิจารณารูปเรขาคณิตต่อไปนี้



รูปที่ 4



รูปที่ 5

$$3^n + \frac{(kn)^2}{2} - 3^{\frac{n}{2}} kn \quad \boxed{9^n + \frac{(kn)^4}{4}}$$

$$3^n + \frac{(kn)^2}{2} + 3^{\frac{n}{2}} kn$$

รูปที่ 6

จะได้ว่า  $9^n + \frac{(kn)^4}{4} = CD$

เมื่อ  $C = 3^n + \frac{(kn)^2}{2} - 3^{\frac{n}{2}} kn$  และ  $D = 3^n + \frac{(kn)^2}{2} + 3^{\frac{n}{2}} kn$

เนื่องจาก  $n$  เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น จะมี  $n_1 \in \mathbb{N}$  ซึ่งทำให้  $n = 2n_1$

ดังนั้น  $C = 3^n + \frac{(kn)^2}{2} - 3^{\frac{n}{2}} kn = (3^{n_1} - kn_1)^2 + k^2 n_1^2$

และ  $D = 3^n + \frac{(kn)^2}{2} + 3^{\frac{n}{2}} kn = (3^{n_1} + kn_1)^2 + k^2 n_1^2$

ดังนั้น  $C, D \in \mathbb{N}$  โดยที่  $1 < C < D < 9^n + \frac{(kn)^4}{4}$

เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า  $9^n + \frac{(kn)^4}{4}$  เป็นจำนวนประกอบ

### สรุปผลการวิจัย

จากการใช้แนวทางการพิสูจน์ของ Nelsen (2021) ทำให้ได้รูปแบบของจำนวนประกอบเพิ่มขึ้นอีก 2 รูปแบบ ดังปรากฏในทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2** ให้  $m, n, k \in \mathbb{N}$  จะได้ว่า

1. ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบ
2. ถ้า  $m, n$  เป็นจำนวนคี่ และ  $mn \neq 1$  แล้ว  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบ

**ทฤษฎีบท 3** ให้  $n, k \in \mathbb{N}$  จะได้ว่า

ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $9^n + \frac{(kn)^4}{4}$  เป็นจำนวนประกอบ

### อภิปรายผล

วิธีการพิสูจน์ของ Nelsen (2021) เป็นวิธีพิสูจน์วิธีหนึ่งที่น่าสนใจ สามารถทำความเข้าใจได้ง่าย แต่อย่างไรก็ตามยังคงมีรูปแบบอื่นของจำนวนประกอบที่ไม่สามารถพิสูจน์ด้วย

วิธีของ Nelsen (2021) ได้ เช่น  $n^4 + n^2 + 1$  เป็นจำนวนประกอบ สำหรับจำนวนนับ  $n > 1$  (Niven et al., 1991) เป็นต้น นอกจากนี้ ในทฤษฎีบท 2 ข้อ 2 สำหรับกรณีที่  $m$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $n^{4k} + 4^m$  เป็นจำนวนประกอบหรือไม่ ยังคงเป็นคำถามที่น่าสนใจและควรศึกษาค้นคว้าต่อไป

### กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

### เอกสารอ้างอิง

- Fortunado, I. T. (2016). Analyses and formulas for the set of composite numbers and the set of prime numbers, *Science Journal of Mathematics and Statistics*, Doi: 10.7237/sjms/110.
- Horton, R. E. (1962). Problems and solutions. *Mathematics Magazine*, 35, 249.
- Nelsen, R. B. (2021).  $n^4 + 4^n$  is composite for  $n \geq 2$ . *Mathematics Magazine*, 94, 69.
- Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1991). *An introduction to the theory of number*. 5<sup>th</sup> ed. New York: John Wiley & Sons.
- Shirmohammadi, H. (2014). A simple rule to distinguish prime from composite numbers. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, 3(2), 38 – 42.