

การหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบจำลองตัวแทนที่ใช้การถดถอยกระบวนการเกาส์ เขียนและวิธีฝูงอนุภาคสำหรับปัญหาการออกแบบทางวิศวกรรม Surrogate Model Optimization Using Gaussian Process Regression and Particle Swarm Optimization for Engineering Design Problems

พุทธา จินครวั¹, นันทวัฒน์ วีระยุทธ², สุกัญญา เจียมวรณันท์กุล³, พรเทพ ชมชื่น³ และ กิตติพงษ์ บุญโล่ง^{1*}

Puttha Jeenkour¹, Nantawatana Weerayuth², Sukanya Jiamworanunkul³, Porntep Chomcheon³, and
Kittipong Boonlong^{1*}

¹ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา 169 ถนนลงหาดบางแสน ต.แสนสุข อ.เมือง
จ.ชลบุรี ประเทศไทย

²ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี 85 หมู่ 4 ต.เมืองศรีไค อ.วารินชำราบ
จ.อุบลราชธานี ประเทศไทย

³สาขาวิชาการจัดการสิ่งแวดล้อมและความปลอดภัย คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม 39/1
ถนนรัชดาภิเษก แขวงจันทรเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร ประเทศไทย

*ผู้รับผิดชอบประสานงาน : kittipong@eng.buu.ac.th

วันที่รับบทความ: 26 เมษายน 2569 / วันที่แก้ไขบทความ: 29 พฤษภาคม 2569 / วันที่ตอบรับการตีพิมพ์: 25 มิถุนายน 2569

บทคัดย่อ งานวิจัยนี้ได้นำเสนอการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบจำลองตัวแทน (Surrogate Model Optimization; SMO) เพื่อการออกแบบทางวิศวกรรม SMO ที่ถูกนำเสนอในบทความนี้มีกระบวนการหาคำตอบเพื่อให้ได้คำตอบที่สร้างชิ้นจำนวนน้อย และมีการปรับสเกลตัวแปรก่อนทำแบบจำลองตัวแทน เพื่อให้มีตัวแปรแต่ละตัวมีผลกระทบต่อค่าตอบใกล้เคียงกัน โดยประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธีการเรียนรู้ของเครื่องแบบการถดถอยร่วมกับขั้นตอนวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด โดยขั้นตอนวิธีการเรียนรู้ของเครื่องแบบถดถอยที่เลือกเพื่อประเมินได้แก่ การถดถอยด้วยกระบวนการเกาส์เขียน (GPR), การถดถอยซัพพอร์ตเวกเตอร์ (SVR), และโครงข่ายประสาทเทียม (ANN) ขณะที่ขั้นตอนวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดที่ใช้คือ Particle Swarm Optimization (PSO) ซึ่งจากการทดสอบด้วยปัญหาฟังก์ชันมาตรฐานพบว่า SMO ที่ใช้ GPR ร่วมกับ PSO มีประสิทธิภาพสูงที่สุด และดีกว่าเทคนิคทางด้านการออกแบบการทดลองซึ่งก็คือวิธีทากูชิ โดยจาก 3 ปัญหาฟังก์ชันมาตรฐาน SMO ใช้ GPR ร่วมกับ PSO ดังกล่าวมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเท่ากับ 0.0001, 0.0000, 0.0856 ขณะที่วิธีทากูชิมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเท่ากับ 0.0000, 0.1249, 1.0000 ตามลำดับ SMO ที่ใช้ GPR ร่วมกับ PSO สามารถแก้ไขปัญหาการออกแบบทางวิศวกรรมมาตรฐานและปัญหาการออกแบบคำนวณเชิงตัวเลขโดย Solidworks ได้อย่างดี โดยให้ค่าวัตถุประสงค์การออกแบบที่มีความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) เพียง 0.63 % และ 0.58 % สำหรับ 2 ปัญหาการออกแบบทางวิศวกรรมมาตรฐานซึ่งทราบผลเฉลยแม่นยำตรง ดังนั้น SMO ที่ใช้ GPR ร่วมกับ PSO จึงเหมาะสมสำหรับการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบจำลองตัวแทนสำหรับปัญหาการออกแบบวิศวกรรม

คำสำคัญ : การหาค่าเหมาะที่สุดแบบจำลองตัวแทน, การเรียนรู้ของเครื่อง, การถดถอย, ขั้นตอนวิธีหาค่าเหมาะที่สุดแบบฝูงอนุภาค, การออกแบบวิศวกรรม

Abstract: This research proposes surrogate model optimization (SMO) for engineering design by the use of machine learning regression algorithms and an optimization algorithm. The SMO proposed in this research features an optimization process designed to use only a small number of generated solutions. Additionally, variable scaling is applied prior to constructing the surrogate model to ensure that each variable has a similar impact on finding the optimal solution. The machine learning regression algorithms to be evaluated are gaussian process regression (GPR), support vector regression (SVR), and artificial neural network (ANN), while the optimization algorithm used is particle swarm optimization (PSO). After testing with benchmark function optimization problems, GPR with PSO has the highest performance and outperforms the design of experiment (DOE) technique, Taguchi method. For three standard benchmark functions, the proposed SMO using GPR and PSO yielded average errors of 0.0001, 0.0000, and 0.0856, whereas the Taguchi method resulted in average errors of 0.0000, 0.1249, and 1.0000, respectively. Thereafter, SMO using GPR and PSO can effectively solve engineering design benchmark problems and engineering design problems with the numerical calculation by Solidworks software. It produced design objective values with deviations of only 0.63% and 0.58% from the exact solutions for two standard engineering design problems where the exact solutions are known. Therefore, SMO using GPR combined with PSO is considerably suitable for surrogate model optimization in engineering design problems.

Keywords: Surrogate Model Optimization, Machine Learning, Regression, Particle Swarm Optimization, Engineering Design

1. บทนำ

ในการออกแบบทางวิศวกรรม (Engineering Design) ปัญหาส่วนใหญ่มีลักษณะซับซ้อนและไม่เป็นเชิงเส้น โดยความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการออกแบบ (Design Variables) เงื่อนไขบังคับ (Constraints) และวัตถุประสงค์ (Objectives) มักไม่สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคณิตศาสตร์แบบชัดแจ้ง (Explicit Functions) ได้โดยตรง แต่ต้องอาศัยการประเมินผ่านแบบจำลองเชิงตัวเลข เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method: FEM) [1,2] ซึ่งมีต้นทุนด้านเวลาและทรัพยากรการคำนวณสูง

โดยเฉพาะในปัญหาที่มีความซับซ้อนเชิงโครงสร้างหรือมีจำนวนตัวแปรมาก [3] ดังนั้นเพื่อเป็นการลดภาระทางคอมพิวเตอร์ จำนวนการประเมินคำตอบด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขจึงควรมีน้อยครั้งที่ที่สุด การนำแนวทางการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดด้วยแบบจำลองตัวแทน (Surrogate Model Optimization: SMO) จึงเป็นทางเลือกที่ได้รับความนิยมและมีประสิทธิภาพสูงในปัจจุบัน [4] การผสมผสานเทคนิคการเรียนรู้ของเครื่อง (Machine Learning: ML) เข้ากับ SMO ได้รับความสนใจอย่างแพร่หลาย เนื่องจากสามารถสร้าง

แบบจำลองประมาณค่าที่มีความแม่นยำและคำนวณได้รวดเร็ว

ก่อนหน้านี้มีงานวิจัยที่ประยุกต์การเรียนรู้ของเครื่อง (Machine Learning: ML) เข้ากับ SMO เนื่องจากสามารถสร้างแบบจำลองประมาณค่า (Approximation Models) ที่มีความแม่นยำและคำนวณได้รวดเร็ว [5] เช่น งานวิจัยที่ใช้โมเดลตัวแทนแบบหลายรูปแบบ (Multi-Surrogate Models) ในการปรับปรุง Truss Structure ซึ่งสามารถลดระยะเวลาการคำนวณลงได้อย่างมีนัยสำคัญในขณะที่ยังคงความเสถียรและความแม่นยำสูง [6] รวมถึงยังมีการประยุกต์ใช้โมเดลตัวแทน GPR ร่วมกับการสุ่มตัวอย่างแบบปรับตัว (Adaptive Sampling) ในการออกแบบवादัลลดแรงดันก๊าซธรรมชาติ เพื่อปรับปรุงประสิทธิภาพในการลดเสียงรบกวน [7] นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยจำนวนหนึ่งซึ่งใช้ GPR ในการจำลองใน SMO ดังเช่น การใช้ GPR ร่วมกับ Bayesian Optimization เพื่อพยากรณ์และปรับปรุงค่าความหนืดของวัสดุเรซินคอมโพสิตอุดฟันให้เหมาะสมกับการใช้งานทางคลินิก [8] การประยุกต์ใช้ GPR ควบคู่กับอัลกอริทึมพันธุกรรมแบบหลายวัตถุประสงค์ (Multi-objective Genetic Algorithms) ในการออกแบบโครงสร้างอนุภาคแบบครึ่งคลื่น (HWR) เพื่อทดแทนการจำลองที่ใช้เวลานาน [9] การใช้ GPR เพื่อหาจุดเหมาะสมที่สุดในการออกแบบรูระบายความร้อนแบบพัดบนผนังโค้งเว้า ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการปกป้องพื้นผิวจากความร้อนสูง [10] เป็นต้น

บทความนี้จะนำเทคนิคการวิเคราะห์การถดถอย (Regression) และการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดมาใช้ในวิธี SMO ที่นำเสนอ ในวิธี SMO ที่นำเสนอนี้ คำตอบที่สร้างขึ้นจะถูกนำมาใช้เพื่อระบุฟังก์ชันประมาณค่า (Approximated Functions) ของตัวแปรการออกแบบสำหรับเงื่อนไขบังคับและวัตถุประสงค์ ซึ่งจะส่งผลให้เทคนิคการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดสามารถแก้ปัญหาได้ในเวลาสั้น ยังทำการประเมินเทคนิคการวิเคราะห์การถดถอยจำนวน 3 เทคนิค ได้แก่ Gaussian Process Regression (GPR) [7,8,10], Support Vector Regression (SVR) [11,12], และ Artificial Neural Network:

ANN) [13,14] วิธีฝูงอนุภาค (Particle Swarm Optimization: PSO) [15,16] จะถูกนำมาใช้ในกระบวนการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันประมาณค่า โดยจะทำการประเมินเทคนิคการวิเคราะห์การถดถอยใช้ใน SMO ผ่านปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันที่ชัดเจนและปัญหาการออกแบบทางวิศวกรรม ในขณะที่เดียวกันก็จะนำวิธี SMO ไปเปรียบเทียบกับวิธีการออกแบบการทดลอง (Design of Experiments, DOE) แบบทากูชิ (Taguchi Method) [18] ด้วย

ทั้งนี้ที่ผ่านมามีงานวิจัยเกี่ยวกับ SMO จำนวนมาก โดยมีงานวิจัยจำนวนหนึ่งที่ใช้คำตอบที่สร้างขึ้นจำนวนมาก โดยอาจจะใช้หลักการของการเลือกสร้างแบบ DOE เช่น Orthogonal Array [19], ซึ่งแต่ละรอบการหาคำตอบจะต้องสร้างคำตอบใหม่จำนวนหนึ่งซึ่งอาจจะต้องใช้คำตอบจำนวนมากในกระบวนการหาคำตอบ โดย [19] ใช้คำตอบจำนวน 2,100 คำตอบเพื่อทำการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาที่มี 4 ตัวแปรออกแบบ นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยที่ใช้แบบจำลองตัวแทนเป็นตัวช่วยในขั้นตอนวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดดังเช่น [20] ซึ่งการค้นหาคำตอบจะเป็นไปตามกระบวนการขั้นตอนวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดที่ใช้ ซึ่งอาจจะต้องใช้คำตอบจำนวนมาก งานวิจัย [20] แก้ปัญหาที่มี 5 ตัวแปรออกแบบ โดยใช้ 1,600 คำตอบจากจำนวนประชากรในแต่ละรุ่น (Population size) เท่ากับ 32 จำนวนรุ่นในการวิวัฒนาการ (Generations): เท่ากับ 50 รุ่น โดยบทความนี้จะนำเสนอ SMO ที่มีกระบวนการที่ใช้คำตอบจำนวนน้อยรวมถึงมีการปรับสเกลของตัวแปรก่อนการจำลองตัวแทนด้วยเทคนิคการวิเคราะห์การถดถอยเพื่อให้แต่ละตัวแปรมีผลกระทบต่อการกระบวนการใกล้เคียงกันด้วย

2. การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดจากแบบจำลองตัวแทน

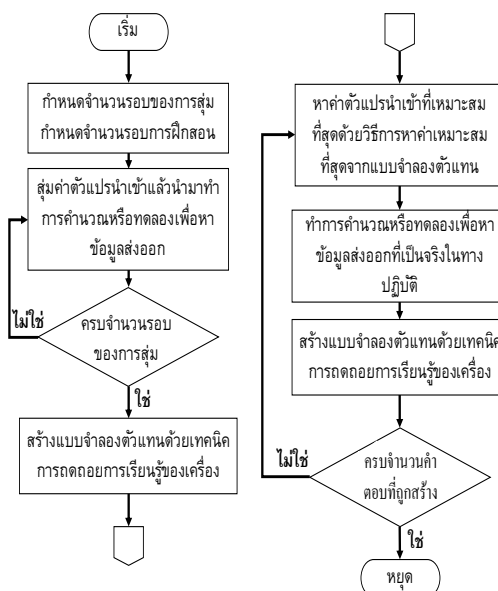
การหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบจำลองตัวแทน (SMO) ดังรูปที่ 1 โดยเริ่มต้นจากการสุ่มค่าของตัวแปรนำเข้า (Input Variable; IV) และนำไปทำการคำนวณหรือทดลองเพื่อหาข้อมูลส่งออก ซึ่งเป็นค่าวัตถุประสงค์ (Objective Value; OV) หรือเงื่อนไขบังคับ (Constraint) ที่

จะทำการหาค่าเหมาะสมที่สุด โดยทำซ้ำจนกระทั่งครบจำนวนรอบที่กำหนด โดยเริ่มต้นค่าตอบจะถูกสร้างโดยการสุ่มจำนวนหนึ่งดังแสดงในด้านซ้ายของรูปที่ 1 จากนั้นก็จะนำชุดข้อมูลที่ได้นี้มาสร้างเป็นแบบจำลองตัวแทนด้วยการฝึกสอนจากเทคนิคการถดถอยการเรียนรู้ของเครื่อง (Machine Learning Regression) ดัง

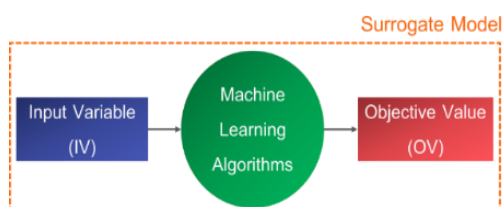
รูปที่ 2 เพื่อประมาณเป็นฟังก์ชันความสัมพันธ์ของ Input ซึ่งก็คือตัวแปรออกแบบและ Output เป็น Constraint กับ Objective จากนั้นใช้ขั้นตอนวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization Algorithm) มาใช้ในการหาค่าตัวแปรนำเข้าที่เหมาะสมที่สุดจากแบบจำลองตัวแทน (Surrogate Model) ซึ่งอาจจะเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดขึ้นอยู่กับปัญหา ต่อจากนั้นนำค่าตัวแปรนำเข้าที่เหมาะสมที่สุดนี้ไปทำการคำนวณหรือทำการทดลองอีกครั้ง เพื่อหาข้อมูลส่งออกที่เป็นจริงในทางปฏิบัติ ซึ่งอาจจะได้จากการทดลองหรือการคำนวณเชิงตัวเลข แล้วจึงนำข้อมูลที่ได้นี้มารวมเข้ากับชุดข้อมูลก่อนหน้าเพื่อฝึกสอนในรอบถัดไป ทำซ้ำจนกระทั่งครบจำนวนค่าตอบที่กำหนด ค่าตอบที่สร้างขึ้นจะเพิ่มขึ้นทีละ 1 ในแต่ละรอบการสร้างแบบจำลองดังกล่าว โดยค่าของข้อมูลนำเข้าในการทดลองรอบไหนที่ทำให้ได้ค่าข้อมูลส่งออกที่เหมาะสมที่สุด ค่าของตัวแปรนำเข้านั้นจะเป็น Output ของการหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยใช้ SMO ทั้งนี้ SMO ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็น DOE [21] ซึ่งใช้เพื่อช่วยในการลดจำนวนครั้งการทดลองได้อีกด้วย

สำหรับจำนวนค่าตอบเริ่มต้น โดยการสุ่มในบทความนี้น้อยกว่ากับจำนวนตัวแปรออกแบบบวก 2 ซึ่งโดยหลักการก็คือต้องการให้ได้ความสัมพันธ์เริ่มต้นที่เป็นลักษณะระนาบโค้งเพื่อหลีกเลี่ยงค่าตอบเริ่มต้นที่ได้จาก PSO เป็นค่าตอบที่ขีดขอบใดขอบหนึ่งของขอบเขตตัวแปรออกแบบ ทั้งนี้โดยทฤษฎีแล้วความสัมพันธ์แบบระนาบสามารถประมาณโดยทศพหุนามที่ใช้จำนวนข้อมูลเท่ากับจำนวนตัวแปรออกแบบบวก 1 ในที่นี้จึงเพิ่มจำนวนค่าตอบเริ่มต้นโดยการสุ่มจึงเพิ่มไปอีกอย่างน้อย 1

ตัวด้วยเหตุผลดังกล่าว ข้อมูลก่อนทำการจำลองความสัมพันธ์ ระหว่างตัวแปรออกแบบและ Objective Value จะต้องปรับสเกล โดยในบทความนี้ข้อมูลจะถูกปรับสเกลให้เป็น Z-score เพื่อให้ตัวแปรทุกตัวและ Objective Value เป็นค่าสเกลเดียวกันมีความสำคัญใกล้เคียงกันในการประมาณความสัมพันธ์ ด้วยการ ใช้ StandardScaler ใน Library “sklearn” คำสั่งย่อย สำหรับเปลี่ยนค่าปกติเป็น Z-score และเปลี่ยนจากค่า Z-score กลับมาเป็นค่าปกติ ด้วยกระบวนการแบบนี้ตัวแปรที่ผ่านการหาค่าเหมาะสมที่สุด เป็นค่าแบบ Z-score จึงต้องผ่านการเปลี่ยนจากค่าเพื่อทำให้เป็นตัวแปรปกติ เพื่อไปคำนวณหา Objective Value ที่แท้จริงต่อไป



รูปที่ 1 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยใช้แบบจำลองตัวแทน



รูปที่ 2 การสร้างแบบจำลองตัวแทนด้วยเทคนิคการถดถอยการเรียนรู้ของเครื่อง

3. ปัญหาทดสอบและผลการจำลอง

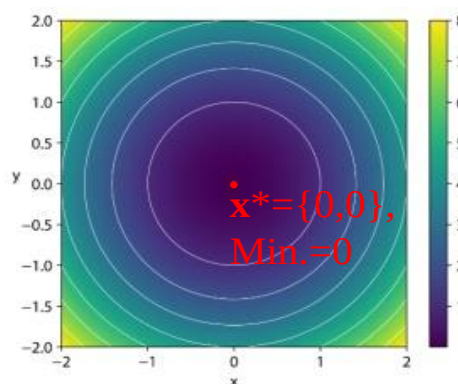
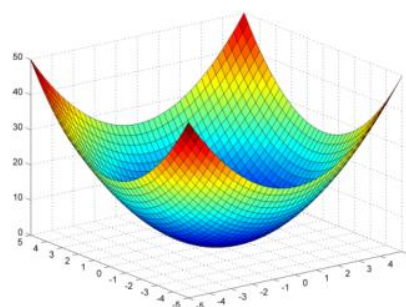
ปัญหาที่ใช้ทดสอบแบ่งได้เป็น 3 กลุ่ม กลุ่มแรกเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดมาตรฐาน ซึ่งใช้เพื่อทดสอบหา Machine Learning Algorithm ที่เหมาะสม ขณะที่กลุ่มที่ 2 เป็นปัญหาการออกแบบทางด้านวิศวกรรมมาตรฐาน ส่วนกลุ่มที่ 3 เป็นปัญหาการออกแบบทางด้านวิศวกรรมโดยคำนวณ Finite Element Method (FEM) โดยโปรแกรม Solidworks ขณะที่ SMO ถูกพัฒนาด้วยโปรแกรม Python โดยจำนวน Generated Solution ที่ใช้ในแต่ละปัญหาจะแตกต่างกัน โดยขึ้นอยู่กับจำนวนตัวแปร และจำนวนเงื่อนไขบังคับ (Constraints) โดยปัญหา 2 กลุ่มแรกใช้เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของ SMO ซึ่งทางปฏิบัติแล้วหากทราบ Explicit Function ของ Objective และ Constraint แล้วไม่จำเป็นต้องใช้ SMO เพราะสามารถใช้ Optimization Algorithm ร่วมกับโปรแกรมที่เหมาะสม เช่น Python, Java, Matlab เนื่องจากการคำนวณ Objective และ Constraint ใช้เวลาน้อยเพราะทราบ Explicit Function แล้ว โดยในทางปฏิบัติแล้ว SMO เหมาะที่ใช้อยู่กับปัญหา กลุ่มที่ 3 ซึ่งใช้เวลานานในการคำนวณ Objective และ Constraint ดังการคำนวณโดย FEM ซึ่งจำเป็นต้องใช้จำนวน Generated Solutions ให้น้อยที่สุดเพราะมีผลโดยตรงกับเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ

3.1 การทดสอบกับปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดฟังก์ชันมาตรฐาน

ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดฟังก์ชันมาตรฐานที่นำมาทดสอบทั้งหมด 3 ฟังก์ชันทดสอบ (Test Function) ประกอบด้วย Sphere Function, Multi-modal Function, และ Rosenbrock Function โดยปัญหามาตรฐานทดสอบเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ SMO กับการหาค่าเหมาะที่สุดทางสถิติซึ่งเป็นวิธีการออกแบบการทดลอง (Design of Experiments, DOE) ซึ่งใช้วิธีที่เรียกว่าวิธีการทาคุชิ (Taguchi's Method) [18] ปัญหามาตรฐาน

ทั้งหมดมีตัวแปรตัดสินใจ 2 ตัวแปร โดยเฉพาะ Multi-Modal Function ที่เป็นปัญหาการหาค่าสูงสุด ส่วนที่เหลือจะเป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุด โดยการอธิบายปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดฟังก์ชันมาตรฐานเป็นดังต่อไปนี้

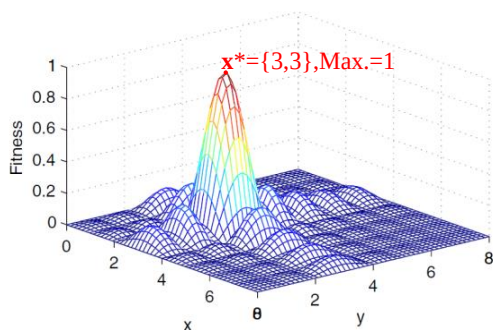
ปัญหาที่ 1 คือ Sphere Function (รูปที่ 3) เป็นปัญหาง่ายที่สุด แต่ละตัวแปรเป็นอิสระต่อกันอธิบายด้วยสมการที่ (1) โดยที่ $x_1, x_2 \in [-10, 10]$, คำตอบที่ดีที่สุดคือ $\mathbf{x}^* = \{0, 0\}$ ซึ่งให้ $f^* = 0$



รูปที่ 3 Sphere Function

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (1)$$

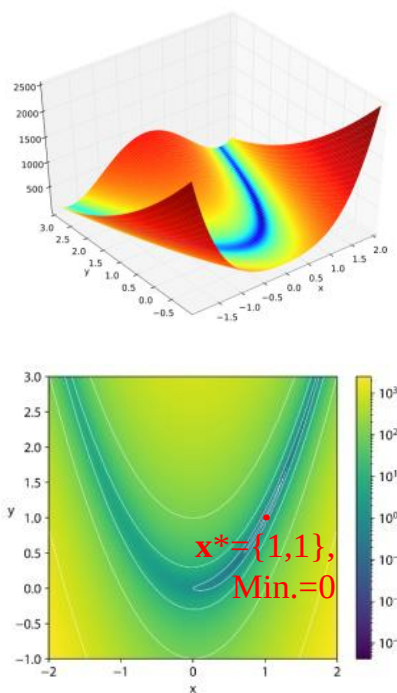
ปัญหาที่ 2 คือ Multi-Modal Function [18] (รูปที่ 4) โดยอธิบายด้วยสมการที่ (2) โดยที่ $x_1, x_2 \in [0, 8]$ คำตอบที่ดีที่สุดคือ $\mathbf{x}^* = \{3, 3\}$ ซึ่งให้ $f^* = 1$



รูปที่ 4 Multi-Modal Function

$$f(x_1, x_2) = \left| \frac{\sin[\pi(x_1-3)]}{\pi(x_1-3)} \right| \left| \frac{\sin[\pi(x_2-3)]}{\pi(x_2-3)} \right| \quad (2)$$

ปัญหาที่ 3 คือ Rosenbrock Function (รูปที่ 5) เป็นฟังก์ชันการที่ (3) โดยที่ $x_1, x_2 \in [-5, 5]$ ค่าตอบดีที่สุดคือ $x^*=\{1,1\}$ ซึ่งให้ $f^*=0$ ทั้งนี้แต่ละปัญหาจะทำการรันซ้ำ 10 ครั้งของแต่ละ Algorithm ที่ใช้



รูปที่ 5 Rosenbrock Function

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2^2 - x_1^2)^2 - (1 - x_1)^2 \quad (3)$$

ในการคำนวณจะใช้ซอฟต์แวร์ Python โดย Learning Regression Algorithm ใน SMO ที่เลือกเพื่อประเมินได้แก่ การถดถอยด้วยกระบวนการเกาส์เซียน (GPR), การถดถอยซัพพอร์ตเวกเตอร์ (SVR), และโครงข่ายประสาทเทียม (ANN) โดย GPR และ SVR จะเรียกใช้จาก Library “sklearn” โดย GPR ซึ่งมีการประมาณความแปรปรวนร่วมของข้อมูลจะใช้ Radial Basis Function (RBF) ในการประมาณดังกล่าว โดยที่จะมีออกมา Hyper Parameter ที่จะทำการ Optimization ได้แก่ Length Scale (l), Variance (σ^2), และ Noise Variance (σ_n^2) โดย Optimizer ที่ใช้ภายใน GPR คือ L-BFGS-B algorithm ขณะที่ SVR ใช้ Kernel เป็น RBF เพื่อให้ประมาณความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยใช้ Regularization Parameter (C) และ Epsilon (ϵ) เท่ากับ 100.0 และ 0.1 ตามลำดับ ส่วน ANN จะถูกเรียกใช้การ Library “TensorFlow” โดย ANN ใช้ 2 Input Node ตามจำนวนตัวแปร และ 1 Output Node ตามจำนวน Objective ซึ่งเท่ากับ 1 โดย ANN มี 2 Hidden Layer โดยแต่ละ Layer ประกอบด้วย 20 Node และมี Activation Function เป็น Hyperbolic Tangent Function เพื่อการประมาณความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ขณะที่ Output Layer ใช้ Linear Function เป็น Activation Function โดย ANN ใช้ Learning Rate=0.001 ขณะที่ Optimizer ที่ใช้คือ Adaptive Moment Estimation (Adam)

ในการหาคำตอบของการหาค่าเหมาะที่สุดแบบจำลองตัวแทน (SMO) ในแต่ละกรณีจะมีใช้คำตอบที่สร้างขึ้น (Generated Solution) จำนวน 25 คำตอบ เช่นเดียวกับ Taguchi’s Method โดย SMO ใช้ 4 คำตอบเริ่มต้นโดยสุ่ม ขณะที่ Taguchi’s Method ใช้ Orthogonal Array OA (9, 2, 3, 2) และ Reduced Rate (RR) = 0.6 เช่นเดียวกันกับ [18] ซึ่ง Taguchi’s Method ทำการหาคำตอบ 3 รอบ ซึ่งจะมีคำตอบที่สร้างขึ้นเท่ากับ $9+8+8=25$ คำตอบ ตารางที่ 1 ถึง ตารางที่ 3 แสดงค่าเฉลี่ย, SD, ค่าดีที่สุด และค่าแย่ที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้ของแต่ละปัญหา

ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบเฉพาะ Regression Technique ที่ใช้ใน SMO โดย T-test พบว่า GPR ให้ผลลัพธ์ดีกว่า $p\text{-value} < 0.05$ เมื่อนำ SMO ที่ใช้ GPR และ PSO เปรียบเทียบกับ Taguchi Method ทั้งสองให้ผลคำตอบที่ตรงกับ Exact Solution ใน Sphere Function ขณะที่สำหรับ Multi-modal Function และ Rosenbrock Function โดย T-test พบว่า GPR ให้ผลลัพธ์ดีกว่า $p\text{-value} < 0.05$ โดยคำตอบที่ได้จาก SMO ใช้ GPR และ PSO ให้คำตอบที่ตรงกับ Exact Solution ใน Sphere Function และ Multi-modal Function ขณะที่ Rosenbrock Function นั้น เนื่องจากส่วนแรกของ Objective function f ในสมการที่ (3) มีค่าคงที่ ซึ่งก็คือ 100 อยู่ด้วย ทำให้ผลของเทอมแรกจะสูงกว่าเทอมหลัง รวมถึงลักษณะปัญหาที่มีการเกี่ยวเนื่องกัน (Coupling) ระหว่างตัวแปรทั้งสองค่อนข้างสูงซึ่งแสดงในเทอมแรกของสมการดังกล่าว แต่ก็ถือได้ว่า GPR+PSO ให้คำตอบที่ดีใกล้เคียงกับคำตอบที่แท้จริงพอสมควร

ตารางที่ 1 ผลลัพธ์คำตอบ Sphere Function

f	Taguchi Method	Regression Techniques		
		GPR	SVR	ANN
Avg.	0.0000	0.0001	0.0356	0.0414
SD.	0.0000	0.0002	0.0369	0.0687
Best	0.0000	0.0000	0.0011	0.0036
Worst	0.0000	0.0008	0.0871	0.1443

ตารางที่ 2 ผลลัพธ์คำตอบ Multi-Modal Function

f	Taguchi Method	Regression Techniques		
		GPR	SVR	ANN
Avg.	0.8751	1.0000	0.8583	0.8362
SD.	0.0000	0.0000	0.1443	0.3266
Best	0.8751	1.0000	0.9977	0.9996
Worst	0.8751	1.0000	0.5772	0.2164

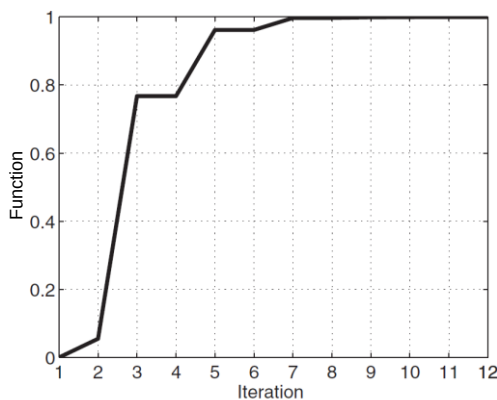
ตารางที่ 3 ผลลัพธ์คำตอบที่ Rosenbrock Function

f	Taguchi Method	Regression Techniques		
		GPR	SVR	ANN
Avg.	1.0000	0.0856	2.5664	5.7304
SD.	0.0000	0.0467	2.2866	3.1807
Best	1.0000	0.0021	0.0707	0.3059
Worst	1.0000	0.1332	5.1215	8.6309

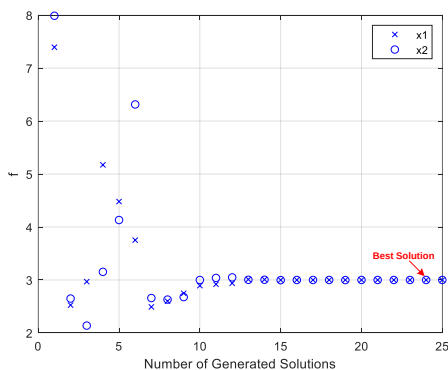
ทั้งนี้เนื่องด้วยว่า GPR มีการประมาณความแปรปรวนร่วมภายในทั้งตัวแปรเข้าและตัวแปรออกจากข้อมูลที่ใช้ เนื่องด้วย GPR สามารถจัดการจุดข้อมูลที่คล้ายคลึงกันได้ดีเนื่องจากใช้ความแปรปรวนร่วม ในการทำนายสามารถลดผลกระทบของจุดข้อมูลที่คล้ายกันได้ แตกต่างจาก SVR และ ANN ซึ่งจุดข้อมูลที่คล้ายกันนี้อาจจะมีผลกับ Loss ทำให้ฟังก์ชันประมาณโดย SVR และ ANN พยายามจะไปใกล้หรือผ่านจุดข้อมูลนี้เพื่อจะได้ค่า Loss ที่ลดลง โดยเฉพาะกรณีที่จำนวนข้อมูลน้อย ทั้งนี้เนื่องด้วยว่างานวิจัยนี้ได้นำเสนอ SMO ที่พยายามใช้คำตอบที่สร้างขึ้นจำนวนน้อยจึงทำให้มีชุดข้อมูลขนาดเล็กในการประมาณฟังก์ชันความสัมพันธ์ นอกจากนี้ประสิทธิภาพของ SVR ขึ้นอยู่กับการตั้งค่าพารามิเตอร์หลายๆ อย่างมาก เช่น ค่า C , ϵ และพารามิเตอร์ของ Kernel เช่น γ ใน RBF Kernel ซึ่งการวิเคราะห์ความไวของตัวแปรก็ควรพัฒนาขึ้นในงานวิจัยในอนาคต ขณะที่ ANN มีแนวโน้มสูงมากที่จะเกิด Overfitting ในชุดข้อมูลขนาดเล็กเพราะ ANN มีพารามิเตอร์เยอะเกินกว่าปริมาณข้อมูล

เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบการหาคำตอบโดย SMO ใช้ GPR และ PSO และ Taguchi's Method โดยเลือกเฉพาะ Multi-modal Function โดยจากงานวิจัยก่อนหน้านี้ [18] ได้ทำการหาคำตอบโดยใช้ทั้งหมด 12 รอบ (Iteration) ซึ่งใช้คำตอบทั้งหมด 97 คำตอบ ซึ่งได้คำตอบดีที่สุดคือ $x_1 = x_2 = 3.0037$ ให้ค่า $f = 0.999955$ ดัง เมื่อเปรียบเทียบกับการค้นหาคำตอบ ขณะที่รูปที่ 7 แสดงคำตอบที่สร้างขึ้นแต่ละครั้งของ SMO ที่ใช้ GPR และ

PSO โดยจากทั้งหมด 25 คำตอบที่สร้างขึ้น SMO นี้สามารถให้คำตอบที่ดีที่สุดเช่นเดียวกับ Exact Solution คือ $x_1=x_2=3.0000$ และ $f=1.000000$ โดยคำตอบที่ดีที่สุดได้ในครั้งที่ 24 ซึ่งจะได้ว่าเมื่อเปรียบเทียบกัน SMO สามารถลดจำนวนคำตอบที่ต้องใช้ถึง 74.23% อีกทั้งยังให้คำตอบที่ดีกว่าด้วย ดังนั้นเฉพาะ SMO ที่ใช้ GPR และ PSO จะถูกใช้กับปัญหาการออกแบบทางด้านวิศวกรรมต่อไป



รูปที่ 6 การหาคำตอบของ Taguchi's Method สำหรับ Multi-Modal Function

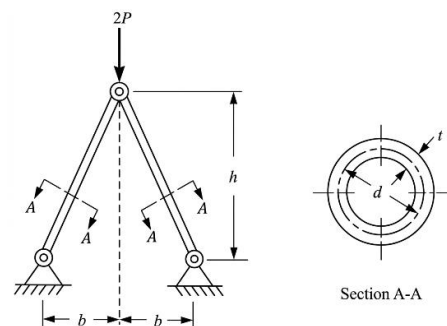


รูปที่ 7 Generated Solution แต่ละครั้งของ SMO (GPR+PSO) สำหรับ Multi-Modal Function

3.2 การทดสอบกับปัญหาการออกแบบทางด้านวิศวกรรม มาตรฐาน

ปัญหาการออกแบบทางด้านวิศวกรรมที่ใช้สำหรับทดสอบก็จะเป็นปัญหาที่สามารถแสดงฟังก์ชัน

ทางคณิตศาสตร์เช่นเดียวกันกับ Benchmark Optimization Problem เพื่อเป็นการแสดงประสิทธิภาพของ SMO ด้วยการใช้ GPR ร่วมกับ PSO โดยปัญหาที่ 1 เป็นการออกแบบ Two-Bar Truss จักรวาลแบบตัว A (รูปที่ 8) จากรูป $b = 30$ inch, Truss ทำจากวัสดุมีความหนาแน่น $\rho = 0.3$ lb/in³, Young's Modulus $E = 30000$ kpsi, แรง $P = 33,000$ kip โดยที่จะมี 3 ตัวแปรในการออกแบบคือขนาด h, d , และ t ในหน่วยนิ้ว โดยที่ $h \in [10,30]$, $d \in [1,3]$, และ $t \in [0.01,0.25]$ ทั้งนี้ Objective ของการออกแบบคือ Truss ต้องมีน้ำหนักน้อยที่สุด ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (4) โดยในส่วนของ Constraint จะถูกกำหนดโดยความเค้น (Stress, σ) ใน Truss, ความเค้น โกง (Buckling Stress, σ_b) และระยะยุบ (δ) ที่แรงกระทำดังสมการที่ (5), (6), และ (7) ตามลำดับ ขณะที่เงื่อนไขบังคับ (Constraint) ทั้งหมดของปัญหานี้คือ σ ต้องไม่เกิน Yield Strength (S_y) ของ Truss โดยที่ $S_y = 100$ kpsi ดังสมการที่ (8), σ ต้องไม่เกินความเค้น โกง σ_b ดังสมการที่ (9) และระยะ δ ต้องไม่เกิน $\delta_{max} = 0.25$ in ดังสมการที่ (10)



รูปที่ 8 การออกแบบ Two-Bar Truss

$$f = W = 2\pi d t \rho \sqrt{b^2 + h^2} \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{2P\sqrt{b^2 + h^2}}{2\pi t d h} \quad (5)$$

$$\sigma_b = \frac{\pi^2 E (d^2 + t^2)}{8(b^2 + h^2)} \quad (6)$$

$$\delta = \frac{P(b^2 + h^2)^{3/2}}{2\pi t d h^2 E} \quad (7)$$

$$g_1 = \sigma - S_y \leq 0 \quad (8)$$

$$g_2 = \sigma - \sigma_b \leq 0 \quad (9)$$

$$g_3 = \delta - \delta_{max} \leq 0 \quad (10)$$

โดย Objective เหมาะสมที่สุดมีค่าประมาณ 11.8093 lb โดยที่ $h, d, t = 30, 2.204, 0.067$ นิ้ว ตามลำดับ [22]

SMO (GPR+PSO) ใช้คำตอบเริ่มต้นโดยการสุ่ม 10 ตัว โดยใช้คำตอบทั้งหมด 50 ตัว ตารางที่ 4 แสดงคำตอบที่ได้จาก SMO (GPR+PSO) กับปัญหา โดยพบว่าได้คำตอบที่ได้น้ำหนักของ Truss 11.8836 lb แตกต่างกัน 0.63% โดยที่ค่าตัวแปรออกแบบที่ได้โดย SMO ก็มีค่าใกล้เคียงกับคำตอบแท้จริงจาก [22]

ตารางที่ 4 คำตอบที่ได้จาก SMO (GPR+PSO) กับปัญหาการออกแบบ Two-Bar Truss

Variable	Value (in)	Constraints	Value
h	29.4950	g_1	-0.0161
d	2.2216	g_2	-3.3195
t	0.0675	g_3	-0.0500

สำหรับปัญหาที่ 2 [16] ถึงเก็บลมอัดซึ่งมีความดัน 3000 psi และมีปริมาตรอย่างต่ำ 750 ft^3 ถึงทรงกระบอกที่ปิดปลายทั้ง 2 ด้านด้วยครึ่งทรงกลมดั่ง ด้วยการใช้แผ่นโลหะม้วน แผ่นโลหะม้วนถูกเชื่อมตามแนวยาวเพื่อให้ได้ทรงกระบอก วัตถุประสงค์ (Objective) คือเพื่อให้ต้นทุนรวม ตัวแปรออกแบบได้แก่ ความหนาส่วนหน้าหลัง (ครึ่งทรงกลม) x_1 , ความหนาส่วนทรงกระบอก x_2 , รัศมีภายใน x_3 , และความยาวทรงกระบอก x_4 โดยที่ตัวแปร x_1 และ x_2 มีค่าไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีค่าเท่ากับจำนวนเต็มคูณ 0.0625 in, Objective ของการออกแบบแสดงดังสมการที่ (11) ขณะที่ Constraint แสดงดังสมการที่ (12)-(15)

$$f = 0.6224x_1x_3x_4 + 1.7781x_2x_3^2 + 3.1661x_1^2x_4 + 19.84x_1^2x_3 \quad (11)$$

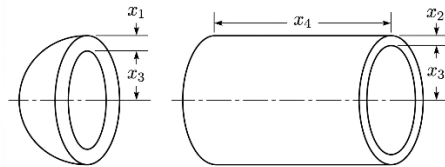
$$g_1 = -x_1 + 0.0193x_3 \quad (12)$$

$$g_2 = -x_2 + 0.0095x_3 \leq 0 \quad (13)$$

$$g_3 = -\pi x_3^2x_4 - \frac{4}{3}\pi x_3^3 + 1296000 \leq 0 \quad (14)$$

$$g_4 = x_4 - 240 \leq 0 \quad (15)$$

โดยที่ $1 \times 0.0625 \leq x_1, x_2 \leq 99 \times 0.0625$ และ $10 \leq x_3, x_4 \leq 200$ คำตอบที่ดีที่สุดจริง $\mathbf{x}^* = \{0.8125, 0.4375, 42.098446, 176.636596\}$ โดยให้ค่า $f(\mathbf{x}^*) = 6059.714335$



รูปที่ 9 ถังรับแรงดัน (Pressure Vessel)

SMO (GPR+PSO) ใช้คำตอบเริ่มต้นโดยการสุ่ม 40 ตัว โดยใช้คำตอบทั้งหมด 150 ตัว ตารางที่ 5 แสดงคำตอบที่ได้จาก SMO (GPR+PSO) กับปัญหาการออกแบบถังรับแรงดัน (Pressure Vessel) โดยพบว่าคำตอบที่ได้จาก SMO; $\mathbf{x}_{smo} = \{0.08125, 0.4375, 41.9011, 179.5759\}$, $f_{smo} = 6095.0246$ ใกล้เคียงกับคำตอบแท้จริง คำตอบที่ดีที่สุด $\mathbf{x}^* = \{0.8125, 0.4375, 42.098446, 176.636596\}$, $f(\mathbf{x}^*) = 6059.714335$ ซึ่งมีค่า f แตกต่างกัน 0.58% ถือว่าคำตอบโดย SMO เชื่อถือได้

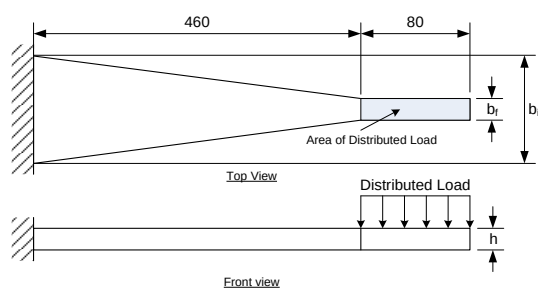
ตารางที่ 5 คำตอบที่ได้จาก SMO (GPR+PSO) กับปัญหาการออกแบบถังรับแรงดัน (Pressure Vessel)

Variable	Value (in)	Constraints	Value
x_1	0.8125	g_1	-0.0038
x_2	0.4375	g_2	-0.0378
x_3	41.9011	g_3	-2635.97
x_4	179.5759	g_4	-60.4241
Objective f			6095.0246

3.3 ปัญหาที่คำนวณโดย Finite Element Method

การออกแบบ Cantilever Beam วัสดุ Cast Alloy Steel รูปร่างสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูปที่ 10 ถูกใช้เป็นการศึกษาสำหรับการทดสอบกับปัญหาการออกแบบคำนวณ Finite Element Method (FEM) โดย Solidworks

จากรูปคานยาวรวมทั้งหมด 540 mm และแยกเป็น 2 ส่วน คือส่วนที่เป็นรูปร่าง Top View เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูซึ่งมีความยาว 460 mm และส่วนที่มี Front View เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาว 80 mm ส่วนนี้จะรับแรง Distributed Load ที่มีแรงลัพธ์รวม 1000 N ตัวแปรที่ต้องการออกแบบคือ ความกว้างเริ่มต้น (b_i) ความกว้างด้านท้าย (b_f) และความหนา (h) โดยที่ $50 \text{ mm} \leq b_i \leq 150 \text{ mm}$, $4 \text{ mm} \leq b_f \leq 40 \text{ mm}$, และ $10 \text{ mm} \leq h \leq 20 \text{ mm}$ ทั้งนี้ปัญหานี้มี 2 เงื่อนไขบังคับ (Constraint) ซึ่งก็คือ Maximum Von Mises Stress ($\sigma_{v,max}$) และ Maximum Deflection (δ_{max}) ของคานต้องไม่เกิน Von Mises Stress ยอมได้ ($\sigma_{v,all}$) และระยะแอ่นคานยอมได้ (δ_{all}) ตามลำดับ ขณะที่ Objective (f) คือน้ำหนักรวมของคาน โดยที่จะออกแบบให้ได้คานที่เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับทั้งสอง และมีน้ำหนักน้อยที่สุด โดยคานนี้ทำจากวัสดุ Cast Alloy Steel ปัญหานี้แยกได้เป็น 2 กรณีตาม Constraint ที่แตกต่างกันดังตารางที่ 6 โดยแสดงดังสมการที่ (16) และ (17) ซึ่งที่แท้จริงแล้ว SMO นี้เหมาะกับลักษณะงานแบบนี้ เพราะใช้เวลานานในการคำนวณ Objective และ Constraint โดย FEM ซึ่งจำเป็นต้องใช้จำนวน Generated Solutions ให้น้อยที่สุดเพราะมีผลโดยตรงกับเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ การคำนวณ Constraint และ Objective ทำโดยใช้ Solidworks สร้างภาพ 3 มิติของคานจากนั้นก็ทำการสร้าง Surface ที่ Fixed และใส่แรงกระทำแล้ว ค่อยด้วยการสร้าง Mesh เพื่อใช้ในการคำนวณ Finite Element Method (FEM) จากนั้นก็สามารถทราบ Von Mises Stress, Maximum Deflection และน้ำหนักของคานต่อไปได้



รูปที่ 10 Cantilever Beam รูปร่างสี่เหลี่ยมคางหมู

ตารางที่ 6 Constraint ของแต่ละกรณีการออกแบบ Cantilever Beam รูปร่างสี่เหลี่ยมคางหมู

Constraints	Case 1	Case 2
$\sigma_{v,all}$ (MPa)	75	150
δ_{all} (mm)	15	7.5

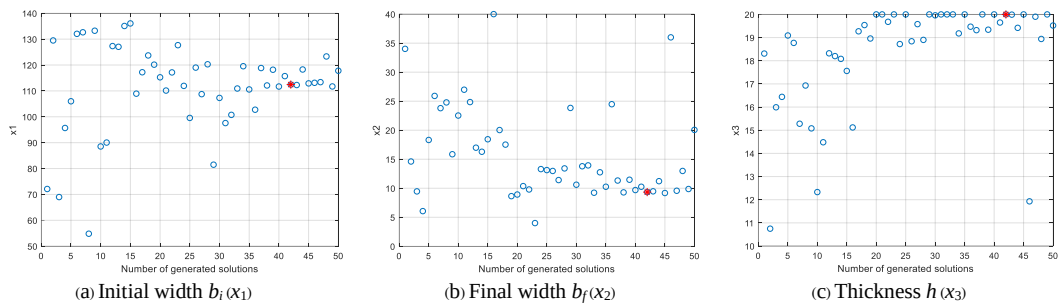
$$g_1 = \sigma_{v,max} - \sigma_{v,all} \leq 0 \quad (16)$$

$$g_2 = \delta_{max} - \delta_{all} \leq 0 \quad (17)$$

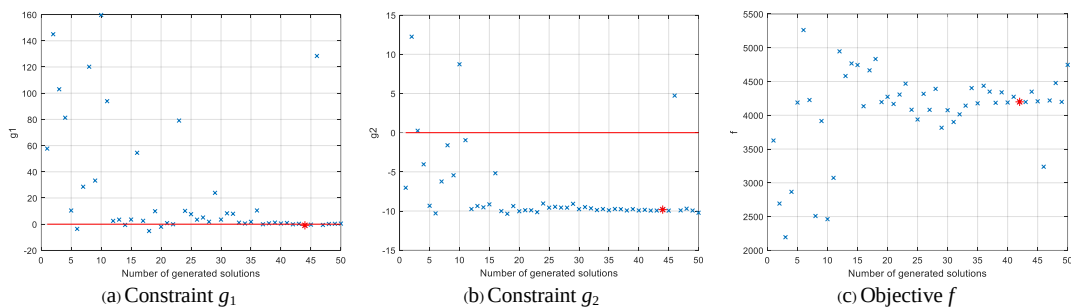
ตารางที่ 7 คำตอบที่ได้จาก SMO (GPR+PSO) ของการออกแบบ Cantilever Beam รูปร่างสี่เหลี่ยมคางหมู

ตัวแปร	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
b_i (mm)	112.45	73.42
b_f (mm)	9.34	8.29
h (mm)	20.00	20.00
g_1	-0.11	-47.40
g_2	-9.94	-0.01
f	4198.80	2840.65

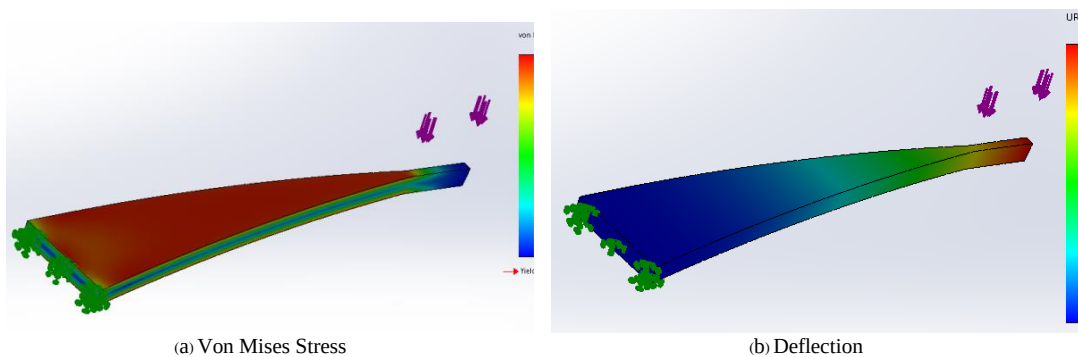
ตารางที่ 7 แสดงคำตอบที่ได้จาก SMO (GPR+PSO) ของการออกแบบ Cantilever Beam รูปร่างสี่เหลี่ยมคางหมู รูปที่ 11-รูปที่ 16 แสดง Generated Solution แต่ละครั้งรอบ SMO, Constraint และ Objective แต่ละครั้งของ SMO, Contour Plot ของ Von Mises Stress ของคำตอบที่ได้จาก SMO, และ Contour Plot ของ Von Mises Stress ของ Deflection of Beam ของคำตอบที่ได้จากทั้ง 2 กรณี



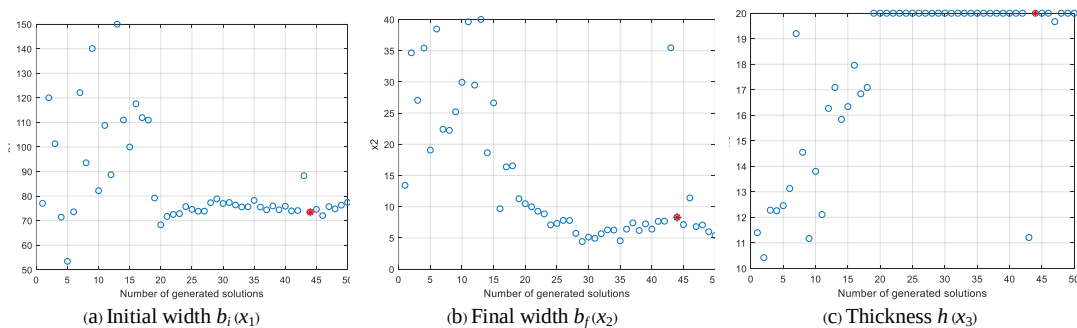
รูปที่ 11 Generated Solution แต่ละครั้งของ SMO สำหรับการออกแบบ Cantilever Beam กรณีที่ 1



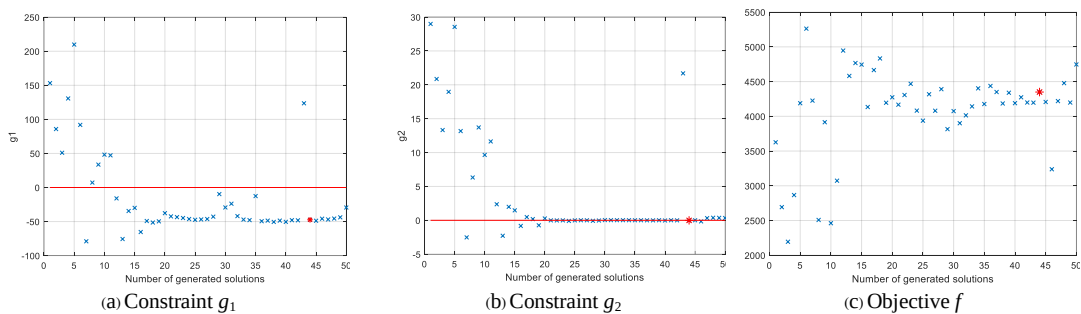
รูปที่ 12 Constraint และ Objective แต่ละครั้งของ SMO สำหรับการออกแบบ Cantilever Beam กรณีที่ 1



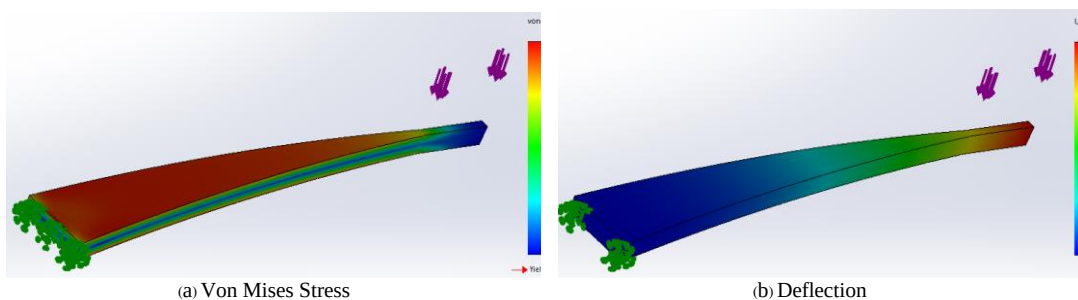
รูปที่ 13 Contour Plot ของ Von Mises Stress และ Deflection ของคำตอบที่ได้จาก SMO สำหรับการออกแบบ Cantilever Beam กรณีที่ 1



รูปที่ 14 Generated Solution แต่ละครั้งของ SMO สำหรับการออกแบบ Cantilever Beam กรณีที่ 2



รูปที่ 15 Constraint และ Objective แต่ละครั้งของ SMO สำหรับการออกแบบ Cantilever Beam กรณีที่ 2



รูปที่ 16 Contour Plot ของ Von Mises Stress ของคำตอบที่ได้จาก SMO สำหรับการออกแบบ Cantilever Beam กรณีที่ 2

ขณะที่การทดสอบกับปัญหาการออกแบบคำนวณโดย Solidworks ที่มี 2 Constraint g_1 และ g_2 ซึ่งกำหนดโดย Von Mises Stress ยอมได้ ($\sigma_{v,all}$) และระยะแอ่นคานยอมได้ (δ_{all}) โดยมี 2 กรณีศึกษา มี $\sigma_{v,all}$ และ δ_{all} ที่แตกต่างกัน ตารางที่ 7 แสดง คำตอบที่ได้จาก SMO (GPR+PSO) ของการออกแบบ Cantilever Beam รูปร่างสี่เหลี่ยมคางหมูทั้ง 2 กรณี ซึ่งทั้ง 2 กรณี เนื่องจากค่าความหนาผลมากที่สุดต่อค่า Moment of Inertia (I) คำตอบทั้ง 2 กรณีจึงได้ค่าความหนาสูงสุด 20 mm สำหรับกรณีที่ 1 เมื่อพิจารณาการดูเข้าของ Generated Solution แต่ละครั้งของ SMO ดังรูปที่ 11 ขณะการดูเข้าของ Constraint และ Objective แสดงดังรูปที่ 12 เมื่อพิจารณาการดูเข้าของ g_1, g_2, f ได้ดูเข้าสู่ค่าหนึ่ง โดยพบว่า g_1 ดูเข้าสู่ 0 ซึ่งหมายถึงว่า g_1 มีผลต่อคำตอบมากกว่า g_2 ซึ่ง g_1 เป็น Constraint ที่กำหนดโดย Stress ขณะที่รูปที่ 13 แสดง Contour Plot ของ Von Mises Stress และ Deflection ของคำตอบที่ได้ เมื่อพิจารณา Bending Moment (M) ช่วงที่เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นตลอด

ช่วงความยาว 460 mm โดย $M = 500,000$ Nmm สูงสุดที่ตำแหน่ง Fixed ($x = 0$) ลดลงแบบเป็นเชิงเส้นที่ตำแหน่งสิ้นสุดสี่เหลี่ยมคางหมู ที่ $x = 460$ mm จะมี $M = 40,000$ Nmm เนื่องจากว่าคานมีความหนาคงที่ $h = 20$ mm สิ่งที่มีผลต่อค่า I ก็คือ b_1 และ b_2 ซึ่งเพื่อลด Objective f (น้ำหนักคาน) ก็ต้องออกแบบให้รับ Stress ได้อย่างสม่ำเสมอตลอดคาน เนื่องจากว่า Stress แปรผันโดยตรงกับ M และความกว้าง b ที่ x ใด ๆ b/b_1 ควรเท่ากับ $500,000/40,000 = 12.5$ ซึ่งจากคำตอบกรณีที่ 1 ในตารางที่ 7 จะได้ว่า $b/b_1 = 12.04$ ซึ่งก็ใกล้เคียงกัน เนื่องจากตำแหน่ง $x = 460$ mm เป็นช่วงเปลี่ยนหน้าตัดอาจจะมี Stress Concentration ค่า b_2 ที่สูงขึ้นเพื่อรองรับ Stress Concentration ที่เกิดขึ้น จึงทำให้ค่า b/b_1 ต่ำกว่าสัดส่วน Moment เล็กน้อย ส่วนกรณีที่ 2 ค่า $\sigma_{v,all}$ เพิ่มขึ้นจาก 75 MPa เป็น 150 MPa ขณะที่ δ_{all} ลดลงจาก 15 mm เป็น 7.5 mm ซึ่งเป็นการลด Impact ของ g_1 แต่เพิ่ม Impact ของ g_2 โดย Generated Solution และ Constraint และ Objective แต่ละครั้งของ SMO แสดงดังรูปที่ 14 และ รูปที่ 15 โดย $x_1, x_2, x_3, g_1, g_2, f$ ดูเข้าสู่ค่าที่

เหมาะสมค่าหนึ่ง โดยที่ g_2 อยู่เข้าสู่ศูนย์ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า g_2 มีผลต่อการค้นหาคำตอบมากกว่า g_1 โดยหากเทียบกับ กรณีที่ 1 เพื่อลด Deflection คานจึงต้องมี b_f ที่หนาขึ้น โดยคำตอบของกรณีที่ 2 มี $b_f/b_j = 8.86$ ขณะที่เนื่องด้วย $\sigma_{v,all}$ สูงขึ้นจึงสามารถลดค่า b_f ลงได้ หากเปรียบเทียบ Contour Plot ของ Von Mises Stress กรณีที่ 1 และ 2 ดัง รูปที่ 13 ซ้าย และ รูปที่ 16 ซ้าย ตามลำดับ พบว่าการกระจายของ Stress ผิดบนคานช่วงสี่เหลี่ยมคางหมูกรณีที่ 1 สม่าเสมอว่ากรณีที่ 2 ซึ่งส่วนที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน ก็คือตำแหน่งที่ใกล้ $x = 460$ mm จากผลการทดสอบที่ได้ จึงถือได้ว่าคำตอบโดย SMO เชื่อถือได้ทั้ง 2 กรณี

4. สรุปผล

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอการหาค่าเหมาะที่สุด แบบจำลองตัวแทน (SMO) เพื่อการออกแบบทางด้านวิศวกรรม โดยใช้เทคนิค ขั้นตอนวิธีการเรียนรู้ของ เครื่องแบบการถดถอย (Machine Learning Regression, MLR) ร่วมกับขั้นตอนวิธีหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งก็คือ ซึ่ง เทคนิค MLR ที่เลือกพิจารณาได้แก่ GPR, SVR และ ANN โดย Optimization Algorithm ที่ใช้คือ PSO จากหลังจาก การทดสอบด้วยปัญหาฟังก์ชันมาตรฐานพบว่า SMO ที่ใช้ GPR ร่วมกับ PSO ให้ผลดีกว่า SMO ที่ใช้ MLR ตัวอื่น ร่วมกับ PSO รวมถึง SMO ที่ใช้ GPR ร่วมกับ PSO ก็ ให้ผลที่ดีกว่าวิธีมาตรฐานอย่าง Taguchi Method สำหรับ SMO ที่ใช้ GPR ร่วมกับ PSO สามารถแก้ไขปัญหาการ ออกแบบทางด้านวิศวกรรมมาตรฐานและปัญหาการ ออกแบบคำนวณโดย Solidworks ได้อย่างดี ทั้งนี้เนื่อง ด้วยว่า SMO ที่นำเสนอมีกระบวนการที่ใช้คำตอบน้อย รวมถึงมีการปรับสเกลของตัวแปรซึ่งในบทความนี้ใช้ Z-score โดย SMO ใช้ 25 คำตอบสำหรับฟังก์ชันมาตรฐานที่มี 2 ตัวแปร ขณะที่ปัญหาการออกแบบทางด้านวิศวกรรม มาตรฐานที่มี 3 ตัวแปร, 4 ตัวแปร และปัญหาที่คำนวณ โดย FEM ที่มี 4 ตัวแปร SMO ใช้ 50, 150 และ 50 คำตอบ ตามลำดับ ซึ่งถือว่าน้อยเมื่อเทียบกับงานวิจัยที่ใช้ SMO

ทางด้าน FEM-Based Engineering Design ก่อนหน้านี้เช่น [19] 2,100 คำตอบเพื่อทำการหาค่าเหมาะที่สุดที่มี 4 ตัวแปรออกแบบ ขณะที่ [20] ใช้ 1,600 คำตอบสำหรับหา 5 ตัวแปรออกแบบเหมาะที่สุด แม้ว่าปัญหาทดสอบแตกต่างกัน แต่ก็ถือได้ว่า SMO ที่นำเสนอในบทความนี้สามารถ ลดจำนวนการคำนวณ Objective หรือ FEM ได้

นอกจากนี้ควรพัฒนาโดยศึกษาผลของจำนวน คำตอบต่อการเข้าสู่ของ SMO การเพิ่มกระบวนการสร้างความหลากหลายของคำตอบ ผลของค่าสเกลอื่นเช่น Min-Max Scaler นอกจากนี้ควรมีการศึกษาการวิเคราะห์ความไวของตัวแปรเช่นศึกษาความไวของตัวแปร c_1, c_2, w ใน PSO รวมทั้ง C, ϵ และ เช่น γ ใน RBF Kernel ของ SVR ในส่วนของ GPR ควรมีการวิเคราะห์ความไวต่อ Kernel ที่ใช้ในประมาณ Covariance นอกจากนี้ควรนำค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ_p ของตำแหน่งทำนายมาพิจารณาถึงความน่าเชื่อถือของตำแหน่งดังกล่าวด้วย รวมถึงควรประยุกต์ใช้ SMO กับปัญหาการออกแบบทางด้านวิศวกรรมที่มีรูปร่างซับซ้อนขึ้น ปัญหาการออกแบบทางด้านวิศวกรรมที่มีหลายวัตถุประสงค์ รวมถึงศึกษา กับ ปัญหาที่มีหลายตัวแปรออกแบบ ทั้งนี้เนื่องจากว่า จำเป็นต้องใช้หลายคำตอบสำหรับ Optimization แต่เนื่อง ด้วย GPR มีข้อจำกัด หากใช้หลายคำตอบเนื่องจากต้อง คำนวณหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมขอ คำตอบ ซึ่งควรมีงานวิจัยในอนาคตที่ศึกษาผลของเวลา ภายใน GPR เมื่อจำนวนคำตอบที่ใช้มากเพื่อหาแนวทาง ในการพัฒนาต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] H. Zhu, Z. Zhou, M. Wang, X. Yu, Y. Wu. C. Chen, and J. Qiao, "Integrated Design Optimization Method for Pavement Structure and Materials Based on Further Development of Finite Element and Particle Swarm Optimization Algorithm," Construction and Building Materials, vol. 426, 136080, 2024.

- [2] X. Li., H. Su., J. Yang, G. Gao, and Y. Wang, “NURBS- boundary- based Quadtree Scaled Boundary Finite Element Method Study for Irregular Design Domain,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 159, pp. 418-433, February 2024.
- [3] S. Zhang, C. Deng, F. Wei, J. Li, X. Luo, and J. Ma, “Efficient Structure Optimization of Downhole Thermal Management System via Transfer Learning Surrogate Modeling,” *Journal of Energy Storage*, vol. 151, 120543, 2026.
- [4] R. Dai, J. Jie, Z. Wang, H. Zheng, and W. Wang, “Automated Surrogate- assisted Particle Swarm Optimizer With an Adaptive Parental Guidance Strategy for Expensive Engineering Optimization Problems,” *Journal of Computational Design and Engineering*, vol. 12, no. 3, pp. 145- 183, March 2025.
- [5] P. Manmatharasan, G. Bitsuamlak, and K. Grolinger, “AI- driven Design Optimization for Sustainable Buildings: A Systematic Review,” *Energy and Buildings*, vol. 332, 115440, April 2025.
- [6] C. Yang, J. Yang, and Y. Qin, “Research on Comparative of Multi-surrogate Models to Optimize Complex Truss Structures,” *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 28, no. 6, pp. 2268-2278, 2024.
- [7] H. Xie, T. Wang, D. Meng, W. Zeng, and L. Guo, “Efficient Optimization of Noise-reducing Orifice Plates in Nature Gas Pressure Regulators Based on Adaptive Multi- scale Sampling- kriging Model,” *Scientific Reports*, vol. 16, 5872, 2026.
- [8] T. Kohno, N. Funayama, L. Xiao, S. Yamaguchi, and S. Imazato, “Predicting and Optimizing Viscosity of Dental Resin Composites With Gaussian Process Regression and Bayesian Optimization,” *Dental Materials*, vol. 42, no. 7, pp. 1112-1119, 2026.
- [9] J. J. Dang, S. Park, Y. Kim, “Design Optimization of Half- wave Resonator (Hwr) With a Machine Learning-based Framework Using Gaussian Process Regression and Multi- objective Genetic Algorithms,” *Nuclear Engineering and Technology*, vol. 58, no. 9, 104393, 2026.
- [10] Y. Yang, X. Song, Z. Deng, and J. Yu, “Gaussian Process Regression- Based Optimization of Fan- Shaped Film Cooling Holes on Concave Walls,” *Fluid Dynamics and Materials Processing*, vol. 22, no. 1, 9, 2026.
- [11] Z. Zheng, Q. Xu, Y. Feng, Y. Dai, Z. Chen, and Y. Wu, “Optimization Design of a Pre-swirl Duct for a Container Ship: A Simulation-based Design Method Integrating a Support Vector Regression Surrogate Model,” *Ocean Engineering*, vol. 352, part 1, 124574, 2026.
- [12] E. Mohammadipour, F. Adib, and M. Ghorbani, “Machine Learning–guided Optimization of PEO Coating Parameters Using Support Vector Regression for Enhanced Corrosion Resistance of AZ31 Magnesium Alloy,” *Results in Engineering*, vol. 29, 109408, 2026.
- [13] Z. Wang, C. Zheng, J. A. Mulyanto, Y. Wu, M. Chen, G. Yang, “Artificial Neural Network Surrogate Modeling and NSGA-II Algorithm-driven Aerodynamic Optimization for Wind-resilient and Sustainable Supertall Buildings,” *Advanced Engineering Informatics*, vol. 69, part D, 104047, 2026.

- [14] A. Allouhi, M. B. Amine, K. A. T. Aoul, “Metaheuristic Multi-objective Optimization With Artificial Neural Networks Surrogate Modeling for Optimal Energy- economic Performance for CSP Technology,” *Energy and AI*, vol. 20, 100488, 2025.
- [15] J. Kennedy, R. Eberhart, R. “Particle Swarm Optimization”. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp.1942–1948, 1995.
- [16] F. Ülker, S. Emiroglu, and Y. Uyaroglu, “A Combined Double Chaotic Maps and Subswarm Based Enhanced Particle Swarm Optimization for Global Optimization and Engineering Design Problems,” *Alexandria Engineering Journal*, vol. 142, pp. 91-113. April 2026.
- [17] K. Djermouni, S. Tamalouzt, A. Berboucha, K. F. Sayeh, L. Abad, Y. Belkhier, M. Benbouzid, “Improving Real-time Photovoltaic Power Delivery Through Integrated Advanced Fault Localization and Particle Swarm Optimization,” *Applied Energy*, vol. 414, 127786, 2026.
- [18] W. C. Weng, F. Yang, and A. Elsherbeni, “Electromagnetics and Antenna Optimization Using Taguchi’s Method,” *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics*, vol. 2, no 1, pp.1-94, 2007.
- [19] C. Lyu, Y. Song, D. Yang, W. Wang, S. Zhu, Y. Ge, L. Wang, “Surrogate Model of Liquid Cooling System for Lithium- Ion Battery Using Extreme Gradient Boosting,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 213, 118675, 2022.
- [20] M. Matsunaga, C. Fujio, H. Ogawa, Y. Higa, and T. Handa, “Nozzle Design Optimization for Supersonic Wind Tunnel by Using Surrogate- Assisted Evolutionary Algorithms,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 130, 107879, 2022.
- [21] L. Mustapha, H. Thorel, and Y., E. Herpe, “Design of Experiments to Assess the Effect of Culture Components on Metabolism Expression and Albumin Secretion in Heparg Cell Line,” *Pharmacological Research - Reports*, vol. 5, 100084, 2026.
- [22] A. R. Parkinson, R. J. Balling, and J. D. Hedengren *Optimization Methods for Engineering Design*, Brigham Young University Press, 2013.

ประวัติผู้ประพันธ์



ผศ.ดร.พุฒา จินท้าว

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะ
วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
งานวิจัยที่สนใจ: ไตรโบโลยี การ
สั่นสะเทือนเชิงกล, การออกแบบเครื่องจักรกล



นันทวัฒน์ วีระยุทธ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะ
วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัย
อุบลราชธานี

งานวิจัยที่สนใจ: การหาค่าเหมาะที่สุดสำหรับการ
ออกแบบเชิงสหวิทยาการ, การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธี
ไฟไนต์เอลิเมนต์, วิทยาการหุ่นยนต์และแมคคาทรอนิกส์



ผศ.ดร.สุกัญญา เจียมวรรณันท์กุล
สาขาวิชาการจัดการสิ่งแวดล้อมและ
ความปลอดภัย คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม

งานวิจัยที่สนใจ: วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์เคมี



ผศ.ดร.พรเทพ ชมชื่น
สาขาวิชาการจัดการสิ่งแวดล้อมและ
ความปลอดภัย คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม

งานวิจัยที่สนใจ: เทคโนโลยีชีวภาพแบบสะอาด



รศ.ดร.กิตติพงษ์ บุญโล่ง
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะ
วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา
งานวิจัยที่สนใจ: การหาค่าเหมาะที่สุด

การต้นสะพานเชิงกล, การเรียนรู้ของเครื่อง