

ลักษณะการสั่นอิสระของแผ่นวัสดุผสมแบบชั้นที่มีรูหลายรูด้วยการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์

Free Vibration Characteristics of Layered Composite Plates with Multiple Holes Using Finite Element Analysis

วรพต รักษ์คุณ¹ กันต์ธร พรหมสัติ^{1*} ธนยศฐ์ เศรษฐบุต² เตียรพัทธ์ พันธกล้า¹ สุทินี เรือนคำ³
สิรภพ เดชชนินทร์³ สหัฐวรรษ ศรีสารคาม³ และ เบญญามิณญ์ สุขพรหม³

Woraprot Rukkhun¹ Guntorn Promsatit^{1*} Thunyaseth Sethaput² Teerapat Punkla¹ Sutinee Rueankham³
Siraphop Deschanin³ Sahudsawat Srisarakam³ and Benjamin Sukphrom³

Received: June 19, 2026

Revised: September 21, 2026

Accepted: September 21, 2026

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการสั่นอิสระและประเมินความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุผสมแบบชั้นชนิด Kevlar 49 ที่มีรูสี่เหลี่ยมมุมมนหลายรูแบบสมมาตร โดยใช้การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับการวิเคราะห์โมดัลในโปรแกรม ANSYS ขอบเขตของการศึกษาเน้นความถี่ธรรมชาติห้าโหมดแรกและพิจารณาผลของพารามิเตอร์ทางโครงสร้าง ได้แก่ เงื่อนไขขอบเขต จำนวนชั้นภายใต้ความหนาต่อชั้นคงที่ มุมการวางชั้นวัสดุ อัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของแผ่น อัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของรู อัตราส่วนพื้นที่เจาะรูเชิงนามจำนวนรูในทิศทาง x และ y รวมถึงระยะห่างระหว่างรู ขั้นตอนการศึกษาประกอบด้วยการพัฒนาแบบจำลองจากกรณีพื้นฐานไปสู่แบบจำลองที่ซับซ้อน การทดสอบการรู้เข้าของเมช และการตรวจสอบความถูกต้องกับข้อมูลอ้างอิงก่อนการศึกษาพารามิเตอร์ ผลการศึกษาพบว่าเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่นทุกด้านให้ความถี่ธรรมชาติที่สูงที่สุด ภายใต้ความหนาต่อชั้นคงที่ การเพิ่มจำนวนชั้นทำให้ความหนาแน่นของลามีเนตเพิ่มขึ้นและสัมพันธ์กับความถี่ธรรมชาติที่สูงขึ้น ขณะที่การวางชั้นแบบไขว้และแบบมุมให้ความถี่ธรรมชาติสูงกว่ากรณีวางชั้นทิศทางเดียวในแบบจำลองที่ศึกษา การเพิ่มอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของแผ่น อัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของรู อัตราส่วนพื้นที่เจาะรูและจำนวนรูมีแนวโน้มลดความถี่ธรรมชาติ ส่วนผลของรัศมีมุมมนขึ้นกับโหมดและรูปร่างรู เนื่องจากการเปลี่ยนรูปทรงรูส่งผลต่อทั้งความแข็งเชิงโมดัล มวลเชิงโมดัล และรูปร่างโหมด ผลลัพธ์นี้สามารถใช้เป็นข้อมูลตั้งต้นสำหรับการออกแบบและเป็นฐานเปรียบเทียบสำหรับการทดลองหรือการจำลองขั้นสูงในอนาคต

คำสำคัญ: การสั่นอิสระ วัสดุผสมแบบชั้น ไฟไนต์เอลิเมนต์ ความถี่ธรรมชาติ รูหลายรู

¹อาจารย์ กองวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ส่วนการศึกษา โรงเรียนนายเรือพระจุลจอมเกล้า

Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Academic Division, Chulachomklao Royal Military Academy.

²ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและระบบการผลิต สถาบันเทคโนโลยีนานาชาติสิรินธร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Assistant Professor, School of Manufacturing Systems and Mechanical Engineering, Sirindhorn International Institute of Technology, Thammasat University.

³นักศึกษา ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและระบบการผลิต สถาบันเทคโนโลยีนานาชาติสิรินธร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Student, School of Manufacturing Systems and Mechanical Engineering, Sirindhorn International Institute of Technology, Thammasat University.

*Corresponding Author Email: guntorn.pr@crma.ac.th

Abstract

This study investigates the free vibration characteristics and natural frequencies of a Kevlar 49 layered composite plate with symmetric multiple rounded-rectangular holes using finite element modal analysis in ANSYS. The first five eigenfrequencies are considered together with the effects of boundary condition, number of plies at constant ply thickness, laminate orientation, fillet ratio, plate length-to-width ratio, cut-out length-to-width ratio, nominal perforation ratio, number of holes in the x- and y-directions, and hole spacing. The finite element model was developed progressively from simple to more complex geometries. Mesh convergence was assessed separately from model validation before the parametric study. The results show that the fully clamped boundary condition gives the highest natural frequencies. With the ply thickness held constant, increasing the number of plies also increases the total laminate thickness and is associated with higher natural frequencies. Cross-ply and angle-ply laminates give higher natural frequencies than the unidirectional cases considered. Increasing the plate aspect ratio, cut-out aspect ratio, perforation ratio, and number of holes generally decreases the natural frequency. The effect of fillet radius depends on the vibration mode and hole configuration because geometric changes affect modal stiffness, modal mass, and mode shape simultaneously. The results provide a benchmark for composite-plate design and for future experimental or higher-fidelity numerical studies.

Keywords: Free Vibration, Layered Composite Plate, Finite Element Analysis, Natural Frequency, Multiple Holes

1. บทนำ

วัสดุผสมแบบชั้นถูกนำมาใช้ในงานโครงสร้างวิศวกรรมจำนวนมาก เนื่องจากสามารถให้สัดส่วนความแข็งแรงต่อน้ำหนักสูงกว่าวัสดุทั่วไป และสามารถปรับสมบัติทางกลให้เหมาะกับทิศทางการรับแรงได้ผ่านการเลือกเส้นใย เมทริกซ์ และรูปแบบการวางชั้นวัสดุ [1-2] ทฤษฎีแผ่นลามิเนตและแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นวัสดุผสมจึงเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างน้ำหนักเบาในงานอากาศยาน ยานยนต์ และงานทะเล [3-4] ในสภาพใช้งานจริง โครงสร้างเหล่านี้ไม่ได้รับเพียงแรงสถิตเท่านั้น หากยังต้องเผชิญแรงพลวัตและการสั่นสะเทือนซึ่งอาจนำไปสู่ความเสียหายหรือการเสื่อมสภาพของโครงสร้างได้ ในทางปฏิบัติ แผ่นวัสดุผสมมักต้องมีรูเจาะหรือช่องเปิดเพื่อการลดน้ำหนัก การเดินสายไฟ การตรวจสอบความเสียหาย หรือข้อกำหนดทางการผลิต รูเจาะเหล่านี้เปลี่ยนความแข็งแรงเฉพาะที่ การกระจายมวล และสภาพการโก่งตัวของแผ่น จึงส่งผลต่อความถี่ธรรมชาติและรูปแบบโหมดของโครงสร้าง การเข้าใจผลของรูเจาะ โดยเฉพาะรูสี่เหลี่ยมมุมมนหลายรู จึงมีความสำคัญต่อการออกแบบเพื่อหลีกเลี่ยงย่านความถี่ที่อาจเกิดการสั่นพ้อง

การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสมสำหรับปัญหาโครงสร้างที่มีรูปทรงซับซ้อน เนื่องจากสามารถแบ่งโครงสร้างออกเป็นองค์ประกอบย่อยและคำนวณการตอบสนองของระบบภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดได้ [5-6] สำหรับปัญหาการสั่นของแผ่นลามิเนต การเลือกทฤษฎีแผ่น สมบัติออร์โททรอปิก ลำดับชั้นวัสดุ และวิธีสร้างเมช มีผลโดยตรงต่อค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่คำนวณได้ [4], [7] งานวิจัยก่อนหน้านี้ได้ศึกษาความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุผสมภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ เชิงตัวเลข และการทดลอง เช่น การใช้ Extended Kantorovich Method สำหรับแผ่นลามิเนตสี่เหลี่ยม [8] การศึกษาผลของรูเจาะกลางแผ่น [9] และการเปรียบเทียบผลการทดลองกับผลจำลองของแผ่นวัสดุผสมที่มีหรือไม่มีช่องเปิด [10] อย่างไรก็ตาม ผลของพารามิเตอร์หลายตัวร่วมกันในแผ่น Kevlar 49 ที่มีรูสี่เหลี่ยมมุมมนหลายรูแบบสมมาตรยังเป็นที่ต้องการข้อมูลเชิงเปรียบเทียบเพิ่มเติม

จากช่องว่างดังกล่าว งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์คุณลักษณะการสั่นอิสระของแผ่นคอมโพสิตลามิเนต Kevlar 49 ที่มีรูสี่เหลี่ยมมุมมนหลายรูปแบบสมมาตร โดยใช้การวิเคราะห์เชิงโมดัลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แบบจำลองได้รับการพัฒนาและตรวจสอบความถูกต้องก่อนนำไปใช้ในการวิเคราะห์เชิงพารามิเตอร์ เพื่อประเมินอิทธิพลของตัวแปรสำคัญ ได้แก่ ขนาดและจำนวนรูเจาะ เงื่อนไขการรองรับ อัตราส่วนเรขาคณิตของแผ่น จำนวนชั้น และรูปแบบการวางชั้นวัสดุ ที่มีต่อความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดของแผ่นคอมโพสิต

2. วัตถุประสงค์

2.1 เพื่อประเมินความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุผสมแบบชั้นชนิด Kevlar 49 ที่มีรูหลายรูปแบบสมมาตรด้วยการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์

2.2 เพื่อศึกษาผลของพารามิเตอร์สำคัญ ได้แก่ เงื่อนไขขอบเขต จำนวนชั้นภายใต้ความหนาต่อชั้นคงที่ มุมการวางชั้นวัสดุ รัศมีมุมมน รูปทรงและจำนวนรูเจาะ รวมถึงระยะห่างระหว่างรู ต่อความถี่ธรรมชาติห้าโหมดแรก

2.3 ข้อมูลเปรียบเทียบที่สามารถใช้เป็นฐานสำหรับการจำลองหรือการทดลองเพิ่มเติมในอนาคต

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วัสดุผสมประกอบด้วยวัสดุตั้งแต่สองชนิดขึ้นไปซึ่งยังคงเอกลักษณ์ของแต่ละเฟสไว้ แต่ให้สมบัติรวมที่เหนือกว่าหรือแตกต่างจากวัสดุตั้งต้น วัสดุผสมเสริมเส้นใยและวัสดุผสมแบบชั้นมีความสำคัญเป็นพิเศษในงานโครงสร้างเนื่องจากสามารถควบคุมทิศทางการรับแรงและความแข็งแรงได้จากการวางทิศเส้นใยและลำดับชั้น [1-2] สำหรับแผ่นลามิเนต สมบัติเชิงโครงสร้างจึงไม่ได้ขึ้นกับวัสดุเพียงอย่างเดียว แต่ยังขึ้นกับรูปแบบการเรียงชั้นด้วย เช่น $[0]_n$ และ $[90]_n$ หมายถึงแผ่นลามิเนตที่วางเส้นใยในทิศทาง 0 องศาหรือ 90 องศาซ้ำกันจำนวน n ชั้น ส่วน $[0/90]_{ms}$, $[30/-30]_{ms}$ และ $[45/-45]_{ms}$ หมายถึงการวางชั้นแบบสลับมุม โดยตัวเลขแสดงมุมการวางเส้นใยของแต่ละชั้น เครื่องหมายบวกและลบแสดงทิศทางของมุมที่เอียงคนละด้าน ขณะที่สัญลักษณ์ m และ s ใช้แสดงการทำซ้ำของชุดชั้นและลักษณะสมมาตรของลำดับชั้นตามลำดับ แนวคิดดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีแผ่นลามิเนตและงานรวบรวมด้านการสั่นของแผ่นและเปลือกวัสดุผสม ซึ่งชี้ให้เห็นว่าการวางชั้นและเงื่อนไขขอบเขตมีอิทธิพลต่อความถี่และความถี่ธรรมชาติอย่างมาก [3-4], [7]

สำหรับแผ่นวัสดุผสมแบบชั้น ความสัมพันธ์เชิงโครงสร้างสามารถอธิบายด้วยเมทริกซ์ความแข็งลามิเนต $[A]$, $[B]$ และ $[D]$ ซึ่งแทนความแข็งในระนาบ ความสัมพันธ์เชื่อมโยงระหว่างการยืดตัวกับการดัด และความแข็งดัด ตามลำดับ โดยความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์ต่อหน่วยความยาว (N) โมเมนต์ลัพธ์ต่อหน่วยความยาว (M) ความเครียดที่ระนาบกึ่งกลาง (ϵ^0) และความโค้ง (κ) เขียนได้ดังนี้ [3], [7]

$$N = [A]\epsilon^0 + [B]\kappa \quad (1)$$

$$M = [B]\epsilon^0 + [D]\kappa \quad (2)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (3)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (4)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (5)$$

สำหรับลามิเนตจำนวน n ชั้น องค์ประกอบของเมทริกซ์ดังกล่าวได้จากการรวมความแข็งรีดิวซ์ที่แปลงแกนแล้วของแต่ละชั้น $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ ตลอดความหนา โดย z_k และ z_{k-1} เป็นพิกัดผิวบนและผิวล่างของชั้นที่ k ตามลำดับ [3]

ดังนั้น การเปลี่ยนมุมและลำดับการวางชั้นจะเปลี่ยน $\bar{Q}_{ij}$ และส่งผลต่อ $[A]$, $[B]$ และ $[D]$ โดยตรง สำหรับลามิเนตสมมาตร เมทริกซ์ Coupling $[B]$ มีค่าเป็นศูนย์ตามอุดมคติ ขณะที่ $[D]$ เป็นส่วนสำคัญของความแข็งแกร่งและมีส่วนกำหนดเมทริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบ การเปลี่ยน Layup จึงสามารถทำให้ความถี่ธรรมชาติเปลี่ยนไป แม้ว่าวัสดุพื้นฐานและมวลรวมจะใกล้เคียงกัน [3], [7]

ในปัญหาการสั่นอิสระ ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างขึ้นกับทั้งความแข็งและมวลของระบบ โดยในกรอบไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถเขียนเป็นปัญหาค่าไอเกนได้ดังสมการ

$$([K] - \omega^2[M])\Phi = 0 \quad (6)$$

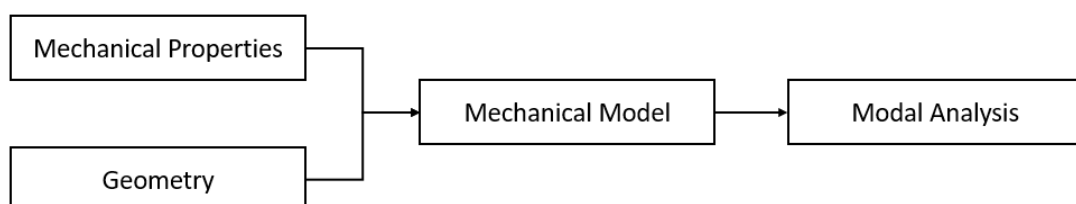
ซึ่ง $[K]$ คือเมทริกซ์ความแข็ง $[M]$ คือเมทริกซ์มวล ω คือความถี่เชิงมุม และ Φ คือรูปร่างโหมด สำหรับโหมดที่ i สามารถพิจารณาความสัมพันธ์ในรูป Rayleigh quotient ได้ว่า

$$\omega_i^2 = \frac{\{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_i\}}{\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\}} \quad (7)$$

ซึ่งตัวเศษและตัวส่วนแทนความแข็งเชิงโมดัลและมวลเชิงโมดัลตามลำดับ [4], [6], [7] ดังนั้น การเปลี่ยนรูปทรงรูเจาะ จำนวนรู ตำแหน่งรู หรือการวางชั้นวัสดุอาจเปลี่ยนทั้งความแข็งเชิงโมดัล มวลเชิงโมดัล และรูปร่างโหมดพร้อมกัน การตีความแนวโน้มความถี่ธรรมชาติจึงต้องพิจารณาผลสุทธิของปัจจัยเหล่านี้ ไม่ใช่การเปลี่ยนความแข็งเพียงอย่างเดียว

Phongsrisuk และคณะ [8] ศึกษาการสั่นอิสระของแผ่นวัสดุผสมลามิเนตสี่เหลี่ยมภายใต้เงื่อนไขขอบเขตหลายแบบด้วยวิธี Extended Kantorovich Method ขณะที่ Chikkol Venkateshappa และคณะ [9] ศึกษาแผ่นที่มีรูเจาะกลางทั้งแบบวงกลมและสี่เหลี่ยม และ Sinha และคณะ [10] รายงานการศึกษาทั้งเชิงทดลองและเชิงตัวเลขของแผ่นวัสดุผสมที่มีและไม่มีช่องเปิด งานเหล่านี้ยืนยันว่ารูเจาะและเงื่อนไขการรองรับมีผลต่อความถี่ธรรมชาติอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้ งานของ Ramakrishna และคณะ [11] รวมถึง Lee และคณะ [12] และ Boay [13] แสดงให้เห็นว่าขนาด รูปร่าง และตำแหน่งของช่องเปิดในแผ่นลามิเนตสามารถเปลี่ยนค่าความถี่และลำดับโหมดได้ โดยเฉพาะเมื่อช่องเปิดอยู่ในบริเวณที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการโก่งตัวหลักของโหมดที่พิจารณา

งานศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับแผ่นที่มีช่องเปิด เช่น Sivakumar และคณะ [14] และ Liew และคณะ [15] รายงานว่าการเปลี่ยนขนาดและรูปร่างของ Cut-out ส่งผลต่อความถี่เฉพาะที่และความถี่ธรรมชาติของแผ่นอย่างชัดเจน ส่วน Huang และ Sakiyama [16] และ Hota และ Padhi [17] ขยายการวิเคราะห์ไปยังรูหลายรูปร่างและรูรูปทรงอิสระ ซึ่งช่วยยืนยันว่ารูเจาะไม่ควรถูกประเมินเฉพาะจากพื้นที่ที่ถูกตัดออกเท่านั้น แต่ควรพิจารณารูปร่าง ตำแหน่ง และเงื่อนไขขอบเขตร่วมกันด้วย งานสมัยใหม่ของ Wang และคณะ [18] และ Duan และ Jing [19] ยังแสดงให้เห็นแนวทางการวิเคราะห์แผ่นที่มีรูหลายรูหรือรูรูปทรงทั่วไปด้วยวิธีเชิงตัวเลขและวิธี Ritz ซึ่งเกี่ยวข้องโดยตรงกับแนวทางของบทความนี้

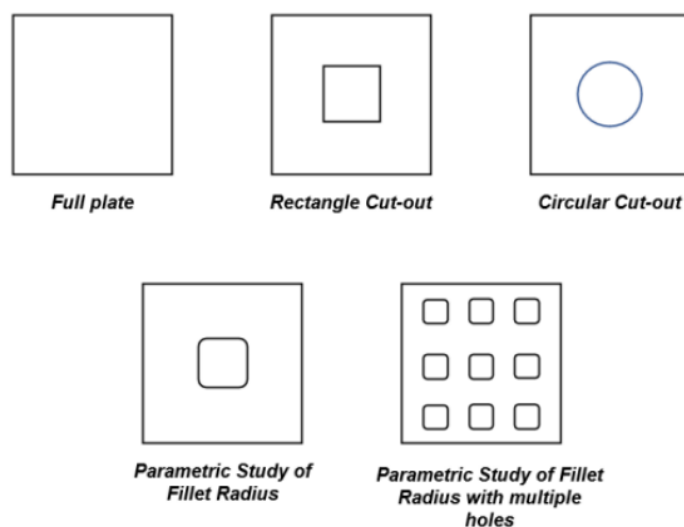


รูปที่ 1 ขั้นตอนการวิเคราะห์โมดัลด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์

4. วิธีดำเนินการวิจัย

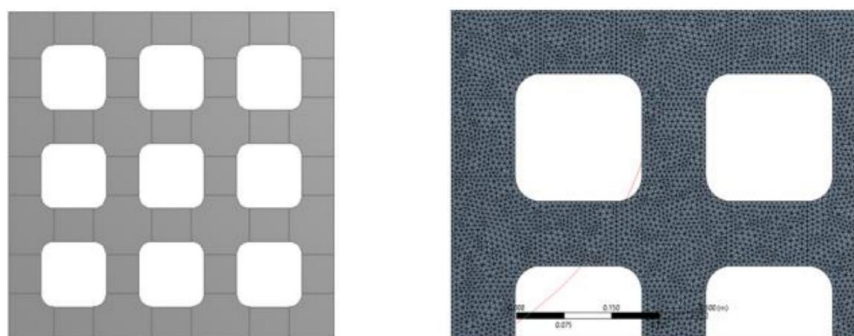
การศึกษาใช้การวิเคราะห์โมดัลโปรแกรม ANSYS โดยเริ่มจากการกำหนดสมบัติเชิงกลแบบออร์โธโทรปิกของวัสดุ Kevlar 49 สร้างรูปทรงแผ่นและรูเจาะ กำหนดลำดับชั้นและมุมวางชั้นของแผ่นวัสดุผสม สร้างเมช กำหนดเงื่อนไขขอบเขต และคำนวณความถี่ธรรมชาติห้าโหมดแรก แบบจำลองถูกพัฒนาจากแผ่นเต็มไปสู่แผ่นที่มีรูสี่เหลี่ยม รวงกลม รูสี่เหลี่ยมมุมมน และรูสี่เหลี่ยมมุมมนหลายรู ดังรูปที่ 2-3

แผ่นวัสดุผสมถูกแทนด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเชลล์หลายชั้น (Layered Shell-based Finite Element Model) โดยกำหนดสมบัติวัสดุ ความหนา และมุมของแต่ละชั้นผ่าน Layered Section ของแบบจำลอง ความหนาต่อชั้นกำหนดคงที่เท่ากับ 0.0025 m และกำหนดลำดับการวางชั้นตามกรณีศึกษา เช่น [0]8, [90]8, [0/90]2s, [90/0]2s, [30/-30]2s และ [45/-45]2s การสร้างเมชพิจารณาความเหมาะสมกับรูปทรงของรู โดยเฉพาะบริเวณขอบโค้ง และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตก่อนแก้ปัญหาค่าไอเกนเพื่อหาความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด



รูปที่ 2 ลำดับการพัฒนาแบบจำลองจากแผ่นเต็มไปสู่แผ่นที่มีรูหลายรู

Parametric Study of Fillet Radius in Multiple Cut-Out Holes



รูปที่ 3 ตัวอย่างแบบจำลองแผ่นที่มีรูสี่เหลี่ยมมุมมนหลายรูและเมชบริเวณรู

ตัวแปรหลักที่ใช้ในบทความนี้ครอบคลุมทั้งตัวแปรด้านวัสดุ รูปทรง และเงื่อนไขการรองรับ โดยกำหนดแผ่นพื้นฐานขนาด 1 × 1 m ใช้ความหนาต่อชั้น 0.0025 m และคำนวณห้าโหมดแรก สำหรับการศึกษาจำนวนชั้นใช้ 4, 8, 12 และ 16 ชั้น จึงมีความหนารวมเท่ากับ 0.010, 0.020, 0.030 และ 0.040 m ตามลำดับ ตารางที่ 1 สรุปพารามิเตอร์สำคัญที่ใช้ในแบบจำลองและการศึกษาพารามิเตอร์

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์สำคัญของแบบจำลองและช่วงการศึกษา

รายการ	ค่า/ช่วงที่ใช้ในการศึกษา
วัสดุ	Kevlar 49 Layered Composite
ความยาวของแผ่นพื้นฐาน (a)	1 m
ความกว้างของแผ่นพื้นฐาน (b)	1 m
ความหนาต่อชั้น	0.0025 m
ความหนาแน่น	1,600 kg/m ³
Young's Modulus (E_x, E_y, E_z)	138, 8.96, 8.96 GPa
Poisson's Ratio ($\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$)	0.3, 0.3, 0.5
Shear Modulus (G_{xy}, G_{xz}, G_{yz})	7.1, 7.1, 2.8176 GPa
จำนวนชั้น	4, 8, 12 และ 16 ชั้น
(ความหนาแน่นรวม)	(0.010, 0.020, 0.030 และ 0.040 m ตามลำดับ)
มุมการวางชั้นวัสดุ	[0]8, [90]8, [0/90]2s, [90/0]2s, [30/-30]2s, [45/-45]2s
เงื่อนไขขอบเขต	CCCC, CFCF, CFFF และ SSSS
อัตราสัมมิมมของรู (η)	0 ถึง 0.5 เพิ่มขึ้นทีละ 0.025
อัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของแผ่น (a/b)	1 ถึง 5 เพิ่มขึ้นทีละ 0.25
อัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของรู (a'/b')	0.5 ถึง 2.5 เพิ่มขึ้นทีละ 0.25
อัตราส่วนพื้นที่เจาะรูเชิงนาม ($P.R._{nom}$)	0.0025 ถึง 0.5625
จำนวนรูในทิศทาง x และ y	1 ถึง 4 รูต่อทิศทาง
ระยะห่างระหว่างรู	0.15 ถึง 0.4 เพิ่มขึ้นทีละ 0.05

นิยามของอัตราสัมมิมม η ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีมุม r กับความยาวของรู a' โดย $\eta = r/a'$ ซึ่ง $\eta = 0$ แทนรูสี่เหลี่ยมมุมฉาก และ $\eta = 0.5$ มีลักษณะเข้าใกล้รูวงกลม สำหรับการศึกษาพื้นที่เจาะรู กำหนดอัตราส่วนพื้นที่เจาะรูเชิงนามดังสมการที่ (8) เพื่อใช้ควบคุมขนาดกรอบสี่เหลี่ยมของรูอย่างสม่ำเสมอระหว่างกรณีศึกษา โดยที่ N คือจำนวนรู อย่างไรก็ตาม อัตราส่วนพื้นที่เจาะรูจริงสามารถหาได้จากสมการที่ (9)

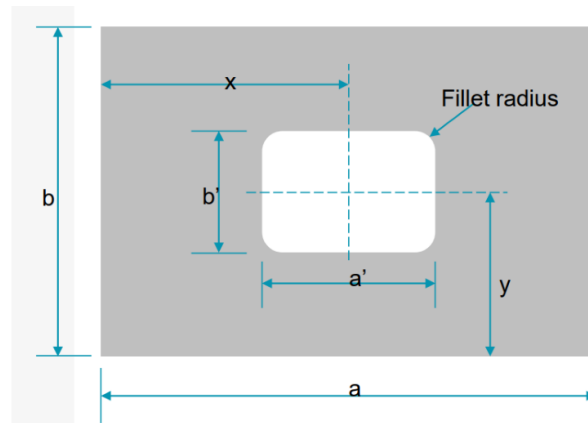
$$P.R._{nom} = \frac{Na'b'}{ab} \quad (8)$$

$$P.R._{actual} = \frac{N[a'b' - (4 - \pi)r^2]}{ab} \quad (9)$$

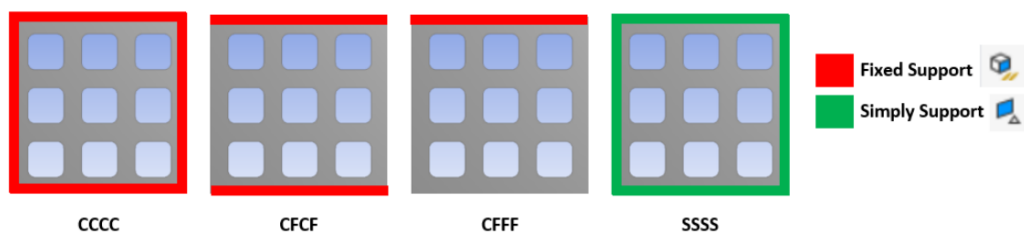
ดังนั้นค่า $P.R._{nom}$ และ $P.R._{actual}$ จะต่างกันเมื่อ $r > 0$ ขณะที่เงื่อนไขขอบเขตใช้สัญลักษณ์ C, S และ F แทนขอบยึดแน่น ขอบรองรับอย่างง่าย และขอบอิสระตามลำดับ ดังรูปที่ 4 และรูปที่ 5

ก่อนการศึกษาพารามิเตอร์ ได้ดำเนินการตรวจสอบแบบจำลองเป็นสองขั้นตอนแยกกัน ได้แก่ 1) การทดสอบการลู่เข้าของเมช โดยพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของค่าความถี่ธรรมชาติระหว่างการปรับเมชให้ละเอียดขึ้นอย่างต่อเนื่อง และ 2) การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง โดยนำผลจากเมชที่ลู่เข้าแล้วไปเปรียบเทียบกับผลอ้างอิงหรือผลการทดลองจากงานวิจัยเดิม สำหรับแผ่นเต็มใช้ผลของ Phongsrisuk และคณะ[8] สำหรับแผ่นที่มีรูสี่เหลี่ยมใช้ผลการทดลองของ Sinha และคณะ [10] และสำหรับแผ่นที่มีรูวงกลมใช้ผลการทดลองของ Chikkol Venkateshappa

และคณะ [9] นอกจากนี้ กรณีรูวงกลมได้เปรียบเทียบกับวิธีสร้างเมชหลายแบบ ได้แก่ Triangle, Rectangle, Mapped, Sphere of Influence, Mapped and Rectangle และ Mapped and Triangle เพื่อเลือกวิธีที่เหมาะสมกับขอบโค้งและรูเจาะกลางแผ่น [5-6]



รูปที่ 4 นิยามตัวแปรของรูสี่เหลี่ยมมุมมนและอัตรารัศมีมุมมน



รูปที่ 5 เงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการศึกษา

ผลการทดสอบการลู่เข้าของเมชสำหรับแผ่นเต็ม ดังตารางที่ 2 โดยค่าความถี่จากแบบจำลองเปลี่ยนจาก 101.44 Hz ที่เมช 8×8 เป็น 101.33 Hz ที่เมช 16×16 หรือเปลี่ยนแปลงประมาณ 0.11% และคงที่ที่ 101.33 Hz เมื่อปรับละเอียดต่อเป็น 32×32 และ 64×64 ดังนั้นเมช 16×16 จึงให้ค่าที่อยู่ในช่วงลู่เข้าโดยใช้จำนวนโหนดและภาระการคำนวณต่ำกว่าเมชที่ละเอียดกว่า การพิจารณาการลู่เข้านี้อาศัยการเปลี่ยนแปลงของผลจำลองระหว่าง Successive Mesh Refinements โดยไม่ใช้ค่าความคลาดเคลื่อนเทียบเอกสารอ้างอิงเป็นเกณฑ์การลู่เข้า

หลังจากเลือกเมชที่ลู่เข้าแล้ว จึงตรวจสอบความถูกต้องกับข้อมูลอ้างอิงแยกเป็นอีกขั้นตอนหนึ่ง ดังตารางที่ 3 สำหรับแผ่นเต็ม ค่าความถี่ธรรมชาติจากแบบจำลองเท่ากับ 101.33 Hz เทียบกับค่าละเอียดจากเอกสารอ้างอิง 101.588 Hz ให้ความคลาดเคลื่อนประมาณ 0.25% กรณีแผ่นที่มีรูสี่เหลี่ยมให้ความคลาดเคลื่อน 0.39% สำหรับ Cut-out Ratio = 0 และ 2.35% สำหรับ Cut-out Ratio = 0.4 ส่วนกรณีรูวงกลม วิธี Mapped and Triangle ให้ความคลาดเคลื่อนต่ำที่สุด 0.11% ขณะที่ Sphere of Influence ให้ความคลาดเคลื่อน 0.98% แต่ใช้จำนวนโหนดและเวลาเตรียมแบบจำลองน้อยกว่า การเปรียบเทียบดังกล่าวใช้เพื่อประเมินความถูกต้องของแบบจำลองและความเหมาะสมของวิธีสร้างเมชสำหรับรูปทรงที่มีขอบโค้ง

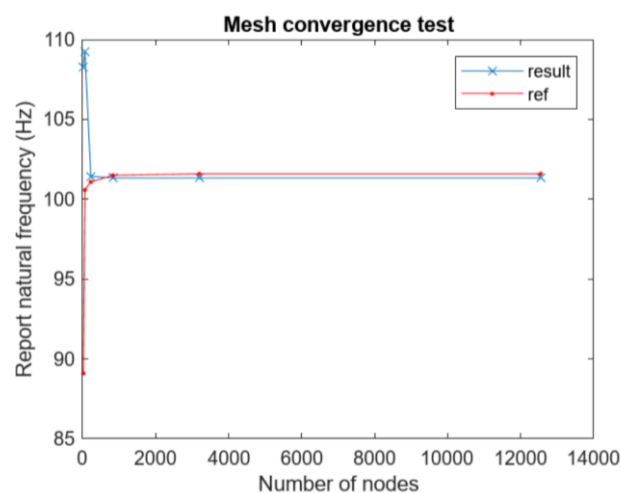
จากผลดังกล่าว การทดสอบการลู่เข้ายืนยันว่าค่าความถี่ธรรมชาติไม่ไวต่อการเพิ่มความละเอียดของเมช หลังช่วงที่เลือก และการตรวจสอบความถูกต้องแยกต่างหากให้ค่าความคลาดเคลื่อนของกรณีตรวจสอบหลักต่ำกว่า 5% จึงใช้แบบจำลองดังกล่าวในการศึกษาผลของพารามิเตอร์ ได้แก่ เงื่อนไขการรองรับ จำนวนชั้นภายใต้ความหนาต่อชั้นคงที่ รูปแบบการวางชั้น อัตราส่วนรูเจาะ จำนวนรูเจาะ และตำแหน่งของรูเจาะ ต่อค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นวัสดุผสมหลายชั้นที่มีรูหลายรู ผลการทดสอบการลู่เข้าของเมชและตัวอย่างผลจำลองสำหรับแผ่นที่มีรูวงกลมแสดงดังรูปที่ 6 และรูปที่ 7 ตามลำดับ

ตารางที่ 2 ผลการทดสอบการลู่เข้าของเมชสำหรับแผ่นเต็ม

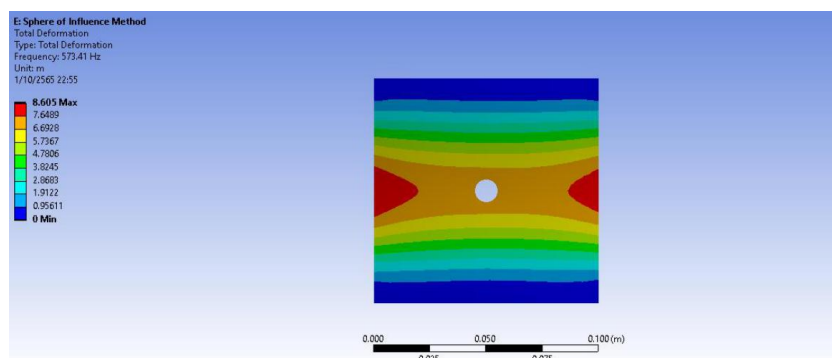
ขนาดเมช	จำนวนโนด	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	การเปลี่ยนแปลงจากเมชก่อนหน้า
2 x 2	21	108.03	-
4 x 4	65	109.23	1.11%
8 x 8	225	101.44	7.13%
16 x 16	833	101.33	0.11%
32 x 32	3,201	101.33	0.00%
64 x 64	12,545	101.33	0.00%

ตารางที่ 3 ผลการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

กรณีตรวจสอบ	ค่าจากเอกสารอ้างอิง/ ทดลอง (Hz)	ค่าจากแบบจำลอง (Hz)	ความคลาด เคลื่อน
แผ่นเต็ม (เมชที่ลู่เข้า 16 x 16)	101.588	101.33	0.25%
แผ่นมีรูสี่เหลี่ยม Cut-out Ratio = 0	370.166	371.610	0.39%
แผ่นมีรูสี่เหลี่ยม Cut-out Ratio = 0.4	487.293	498.759	2.35%
แผ่นมีรูวงกลม Sphere of Influence	579.1126	573.41	0.98%
แผ่นมีรูวงกลม Mapped and Triangle	579.1126	578.45	0.11%



รูปที่ 6 การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติตามความละเอียดของเมชกับค่าจากเอกสารอ้างอิง



รูปที่ 7 ตัวอย่างผลจำลองแผ่นที่มีรูวงกลมและการเปรียบเทียบวิธีเมช

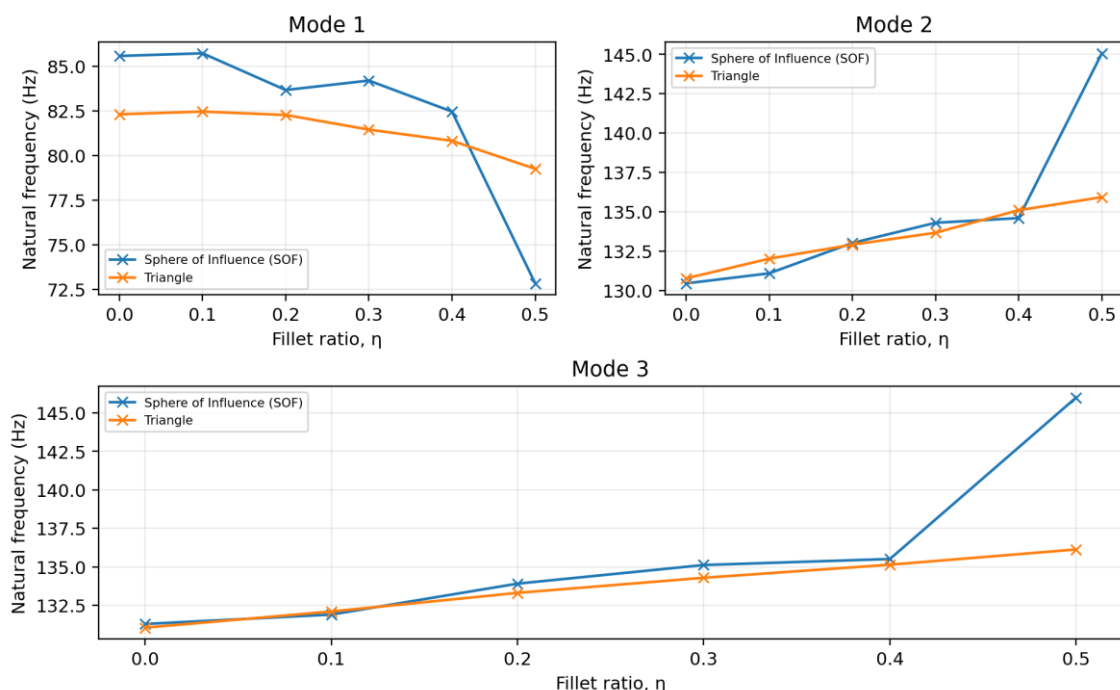
5. ผลการวิจัย

ในการนำเสนอผลต่อไปนี Mode 1-5 หมายถึงลำดับค่าไอเกนจากความถี่ธรรมชาติต่ำไปสูงของแต่ละชุดพารามิเตอร์ เลขลำดับโหมดจึงใช้ระบุอันดับความถี่ในแต่ละกรณีและไม่ควรถูกตีความโดยอัตโนมัติว่าเป็นรูปร่างโหมดทางกายภาพเดียวกันตลอดช่วงพารามิเตอร์ โดยเฉพาะเมื่อความถี่ของโหมดที่อยู่ติดกันมีค่าใกล้เคียงกัน การอธิบายจึงพิจารณารูปร่างโหมดประกอบกับแนวโน้มของความถี่ธรรมชาติเพื่อลดความคลาดเคลื่อนจาก Mode Switching หรือ Mode Crossing

ผลของอัตรารัศมีมุมมนแสดงให้เห็นว่ารูปร่างไม่ได้ส่งผลเฉพาะจากพื้นที่วัสดุที่ถูกตัดออก แต่ยังเปลี่ยนการกระจายความแข็ง การกระจายมวล และรูปร่างโหมดด้วย ตามความสัมพันธ์

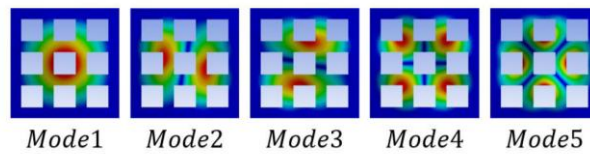
$$\omega_i^2 = \frac{k_{i,\text{modal}}}{m_{i,\text{modal}}} \quad (10)$$

การเปลี่ยนรูปร่างจึงอาจทำให้ความแข็งเชิงโมดัลและมวลเชิงโมดัลเปลี่ยนในสัดส่วนที่ต่างกันในแต่ละโหมด สำหรับรูสี่เหลี่ยมมุมมนเดี่ยว ความถี่ธรรมชาติของ Mode 1 มีแนวโน้มลดลงเมื่อ η เพิ่มขึ้น ขณะที่ Mode 2 และ Mode 3 มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น เพิ่มขึ้น โดยรูปที่ 8 แสดงการเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีสร้างเมชแบบ Sphere of Influence (SOF) และวิธีสร้างเมชแบบสามเหลี่ยม (Triangle) ในสามโหมดแรก โดย SOF หมายถึง Sphere of Influence และ Triangle หมายถึงวิธีสร้างเมชแบบสามเหลี่ยม ส่วนแผ่นที่มีรูหลายรูแบบสมมาตร Mode 1-4 โดยทั่วไปมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตาม η ผลที่แตกต่างกันระหว่างโหมดจึงสะท้อนผลสุทธิของความแข็งเชิงโมดัล มวลเชิงโมดัล ตำแหน่งรู และรูปร่างโหมด มากกว่าผลจากปริมาณเนื้อวัสดุที่ถูกตัดออกเพียงอย่างเดียว

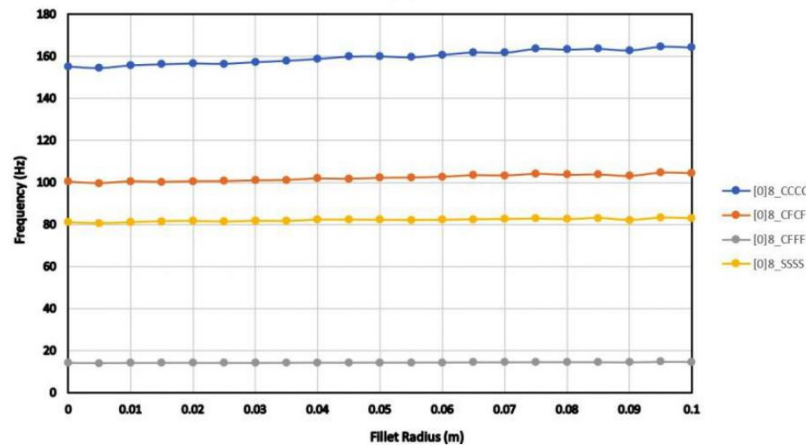


รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตรารัศมีมุมมนกับความถี่ธรรมชาติสามโหมดแรก โดยเปรียบเทียบวิธีเมชแบบ Sphere of Influence (SOF) และ Triangle

ผลของเงื่อนไขขอบเขตเป็นปัจจัยที่เด่นชัดที่สุดประการหนึ่ง โดยลำดับความถี่ธรรมชาติของ Mode 1 เมื่อเปลี่ยนเงื่อนไขขอบเขตคือ CCCC > CFCF > SSSS > CFFF การเพิ่มข้อจำกัดการเคลื่อนที่ที่ขอบทำให้ความแข็งเชิงโครงสร้างและความแข็งเชิงโมดัลเพิ่มขึ้น ขณะที่มวลของแผ่นไม่เปลี่ยน จึงทำให้ความถี่ธรรมชาติสูงขึ้น โดยรูปที่ 9 แสดงรูปร่างโหมดของแผ่นที่มีรูหลายรู และรูปที่ 10 แสดงตัวอย่างผลของรัศมีมุมมนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ



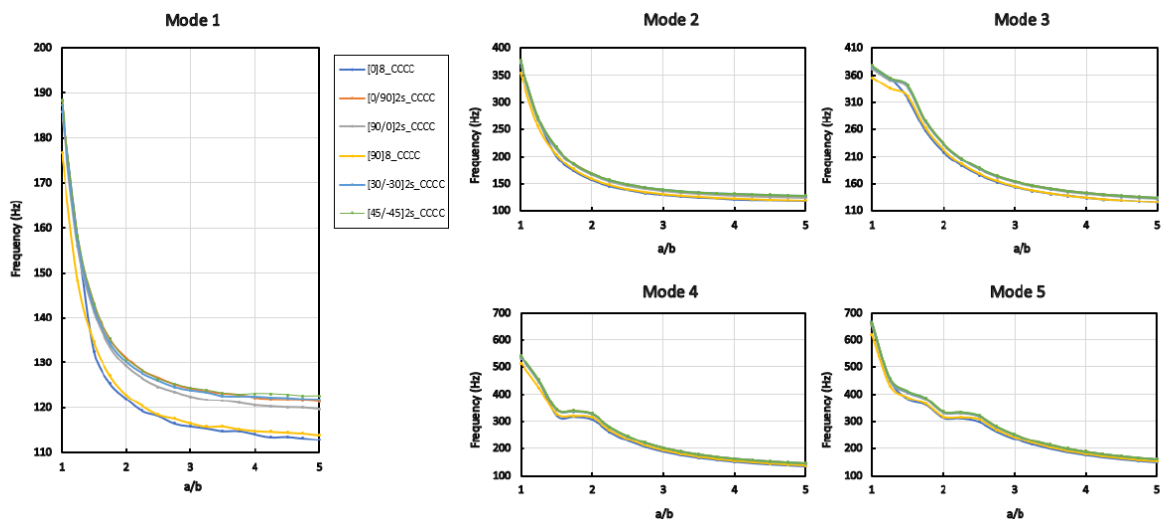
รูปที่ 9 รูปร่างโหมดของแผ่นที่มีรูหลายรูแบบสมมาตรในห้าโหมดแรก



รูปที่ 10 ผลของรัศมีมุมมนต่อความถี่ธรรมชาติภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ

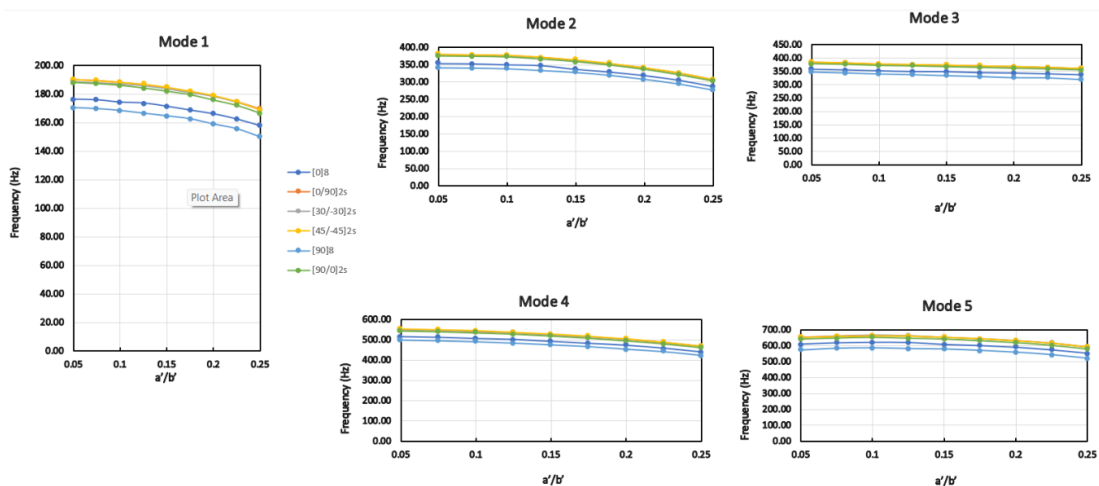
ผลของจำนวนชั้นต้องตีความร่วมกับความหนาของลามิเนต เนื่องจากการศึกษานี้กำหนดความหนาต่อชั้นคงที่ 0.0025 m เมื่อเพิ่มจำนวนชั้นจาก 4, 8, 12 เป็น 16 ชั้น ความหนาของลามิเนตจึงเพิ่มจาก 0.010, 0.020, 0.030 เป็น 0.040 m ตามลำดับ การเพิ่มความถี่ธรรมชาติที่พบจึงเป็นผลรวมของจำนวนชั้นและความหนาที่เพิ่มขึ้น ไม่ใช่ผลของจำนวนชั้นอย่างอิสระ ในด้านมุมวางชั้น กรณีวางชั้นแบบไขว้หรือแบบมุม ได้แก่ $[0/90]_2s$, $[90/0]_2s$, $[30/-30]_2s$ และ $[45/-45]_2s$ ให้ความถี่ธรรมชาติสูงกว่ากรณีทิศทางเดียว เช่น $[0]_8$ และ $[90]_8$ ในแบบจำลองที่ศึกษา ซึ่งสอดคล้องกับการเปลี่ยนเมทริกซ์ความแข็งตัด $[D]$ และความแข็งเชิงโมดูลเมื่อเปลี่ยนทิศทางของแต่ละ Ply

เมื่อเพิ่มอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของแผ่นจาก 1 ไปถึง 5 ความถี่ธรรมชาติของแผ่นลดลงอย่างชัดเจน และมีลักษณะคล้ายการลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล การเพิ่มช่วงความยาวภายใต้ความกว้างเดิมเปลี่ยนความถี่เชิงโมดูลและลักษณะการโก่งตัวมากกว่าการเปลี่ยนมวล ส่งผลให้อัตราส่วนระหว่างความถี่เชิงโมดูลกับมวลเชิงโมดูลลดลงและความถี่ธรรมชาติลดลง ดังรูปที่ 11

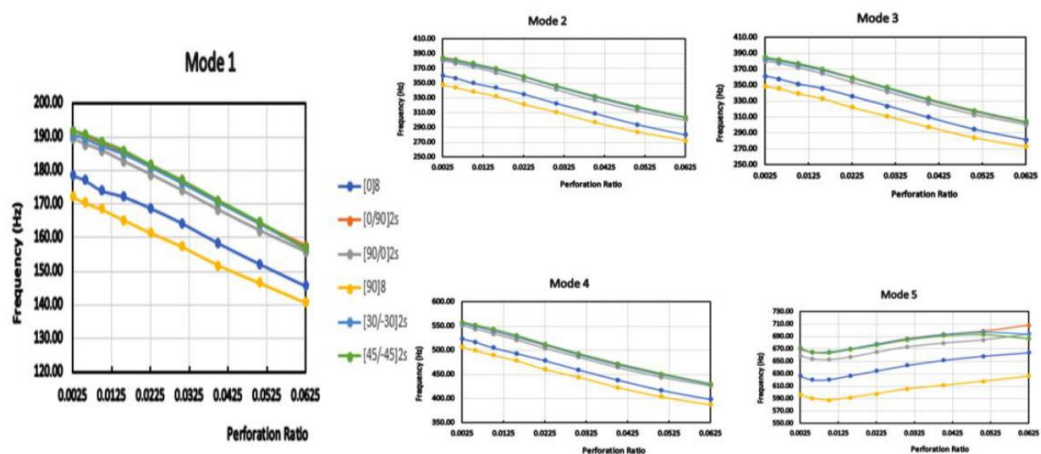


รูปที่ 11 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของแผ่นกับความถี่ธรรมชาติ

ผลของรูปทรงและขนาดรูเจาะพบว่า เมื่อเพิ่มอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของรูหรือเพิ่มอัตราส่วนพื้นที่เจาะรู ความถี่ธรรมชาติโดยรวมลดลง การเพิ่มขนาดรูทำให้ทั้งความถี่และมวลของโครงสร้างลดลงพร้อมกัน แต่แนวโน้มความถี่ที่ลดลงในช่วงที่ศึกษาบ่งชี้ว่าผลสุทธิจากการลดความถี่เชิงโมดัลมีมากกว่าผลจากการลดมวลเชิงโมดัลสำหรับโหมดที่พิจารณา นอกจากนี้ การเปลี่ยนรูปทรงรูยังเปลี่ยนตำแหน่งและการกระจายความถี่สัมพันธ์กับบริเวณที่มีการโค้งตัวของแต่ละโหมด แนวโน้มนี้สอดคล้องกับงานก่อนหน้าที่รายงานว่าขนาด รูทรง และตำแหน่งช่องเปิดมีผลต่อความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมด [14-17] สำหรับอัตราส่วนพื้นที่เจาะรูเชิงนาม แนวโน้มความถี่ลดลงใกล้เคียงเส้นในช่วงที่ศึกษา ดังรูปที่ 12-13



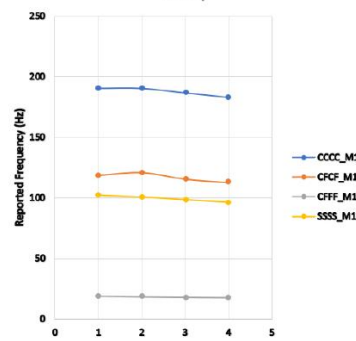
รูปที่ 12 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของรูกับความถี่ธรรมชาติ



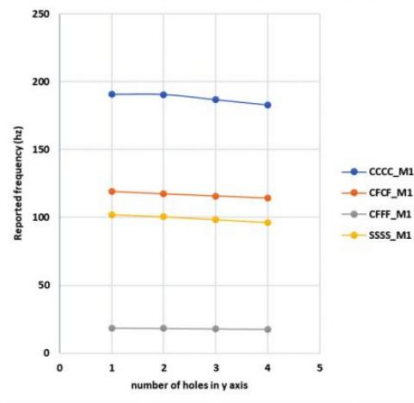
รูปที่ 13 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนพื้นที่เจาะรูกับความถี่ธรรมชาติ

จำนวนรูเจาะในทิศทาง x และ y มีผลให้ความถี่ธรรมชาติลดลงเล็กน้อยเมื่อจำนวนรูเพิ่มขึ้น เนื่องจากการเพิ่มจำนวนรูเปลี่ยนทั้งการกระจายความถี่และมวล รวมถึงตำแหน่งของบริเวณที่สูญเสียเนื้อวัสดุเมื่อเทียบกับรูปร่างโหมด อย่างไรก็ตาม ผลของจำนวนรูไม่เด่นชัดเท่าผลของเงื่อนไขขอบเขตหรืออัตราส่วนขนาดแผ่น การเปลี่ยนระยะห่างระหว่างรูในทิศทาง x และ y พบว่า เมื่อระยะห่างเพิ่มขึ้น ความถี่ธรรมชาติมีแนวโน้มลดลงสำหรับเงื่อนไข CCCC, CFCF และ CFFF แต่ควรตีความร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตและรูปร่างโหมด โดยเฉพาะในกรณีแผ่นที่มีรูหลายรูซึ่งตำแหน่งรูสามารถเปลี่ยนการกระจายความถี่และลำดับของโหมดได้ [18-19] ผลของจำนวนรูในทิศทาง x และ y แสดงดังรูปที่ 14 ส่วนผลของระยะห่างระหว่างรูในทิศทาง x และ y แสดงดังรูปที่ 15 และตัวอย่างกราฟพื้นผิวที่แสดงผลรวมของระยะห่างทั้งสองทิศทางแสดงดังรูปที่ 16

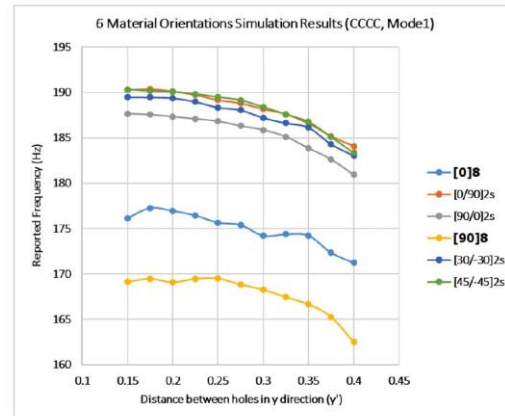
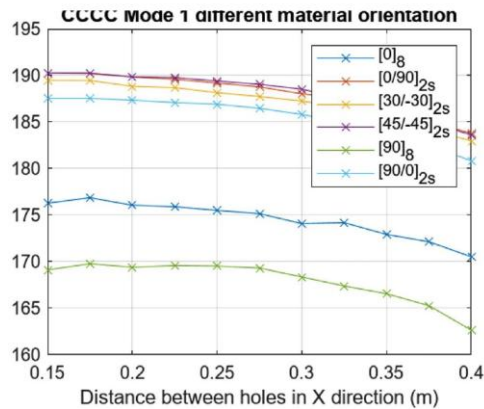
Reported Natural Frequency Comparison with Different Boundary Condition (1st Mode)



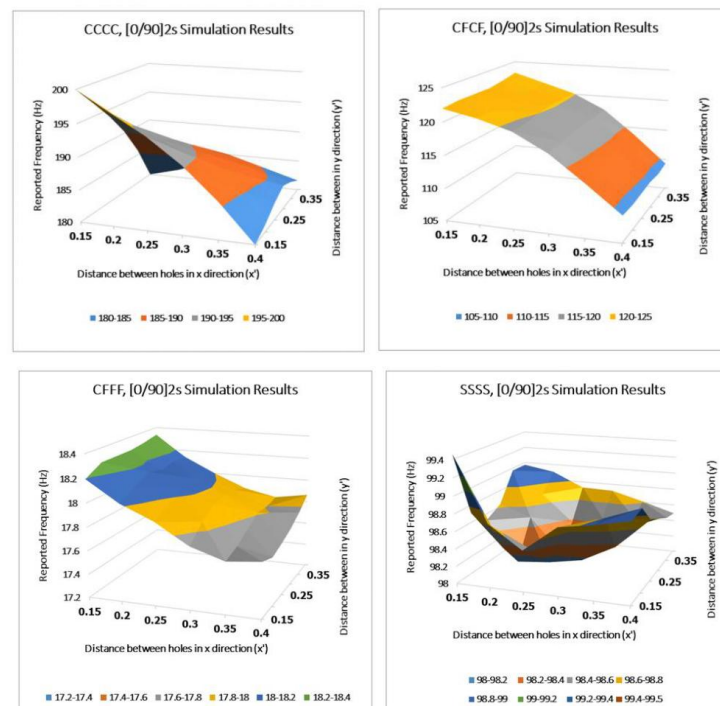
Reported Frequency Comparison with Varied Boundary Conditions (1st Mode)



รูปที่ 14 ผลของจำนวนรูในทิศทาง x และ y ต่อความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 15 ผลของระยะห่างระหว่างรูในทิศทาง x และ y ต่อความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 16 ตัวอย่างกราฟพื้นผิวของระยะห่างระหว่างรูในทิศทาง x และ y กับความถี่ธรรมชาติ

จากผลการศึกษาข้างต้น สามารถสรุปแนวโน้มผลของพารามิเตอร์ต่อความถี่ธรรมชาติและความหมายเชิงออกแบบได้ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 สรุปแนวโน้มผลของพารามิเตอร์ต่อความถี่ธรรมชาติ

พารามิเตอร์	แนวโน้มที่พบจากการศึกษา	ความหมายเชิงออกแบบ
เงื่อนไขขอบเขต	CCCC ให้ค่าสูงสุด ตามด้วย CFCF, SSSS และ CFFF ใน Mode 1	การยึดขอบมากขึ้นเพิ่มความแข็งเชิงโมดัลและทำให้ความถี่ธรรมชาติสูงขึ้น
จำนวนชั้น/ ความหนาแน่น	เมื่อความหนาต่อชั้นคงที่ การเพิ่ม 4 เป็น 16 ชั้น ทำให้ความหนาแน่นเพิ่ม 0.010 เป็น 0.040 m และความถี่สูงขึ้น	แนวโน้มนี้เป็นผลรวมของจำนวนชั้นและความหนาแน่น ไม่ใช่ผลของจำนวนชั้นเพียงตัวเดียว
มุมวางชั้นวัสดุ	การวางชั้นแบบไขว้/แบบมุมให้ความถี่สูงกว่าทิศทางเดียวในกรณีการศึกษา	การเปลี่ยน Layup เปลี่ยนเมทริกซ์ $[D]$ และความแข็งเชิงโมดัล
อัตรารัศมีมุมมน	ผลต่อความถี่ขึ้นกับโหมดและจำนวนรู บางโหมดเพิ่มขึ้น ขณะที่บางโหมดลดลง	รูปทรงรูเปลี่ยนทั้งความแข็งเชิงโมดัล มวลเชิงโมดัล และรูปร่างโหมด
อัตราส่วน a/b ของแผ่น	เพิ่มขึ้นแล้วความถี่ลดลงชัดเจน	ช่วงแผ่นที่ยาวขึ้นลดอัตราส่วนความแข็งเชิงโมดัลต่อมวลเชิงโมดัล
อัตราส่วน a'/b' ของรู	เพิ่มขึ้นแล้วความถี่โดยรวมลดลง	ต้องพิจารณาผลรวมของขนาด/รูปทรงรูกับตำแหน่งการโค้งตัวของแต่ละโหมด
อัตราส่วนพื้นที่เจาะรูเชิงนาม	เพิ่มขึ้นแล้วความถี่ลดลงเกือบเชิงเส้นในช่วงที่ศึกษา	พื้นที่จริงของรูขึ้นกับรัศมีมุมมน จึงควรแยก $P.R._{nom}$ และ $P.R._{actual}$ ในการตีความ
จำนวนรู	จำนวนรูมากขึ้นทำให้ความถี่ลดลงเล็กน้อย	จำนวนและตำแหน่งรูเปลี่ยนทั้งการกระจายความแข็งและมวล
ระยะห่างระหว่างรู	ระยะห่างเพิ่มขึ้นมีแนวโน้มลดความถี่ในบางเงื่อนไขขอบเขต	ควรพิจารณาร่วมกับรูปร่างโหมดและเงื่อนไขรองรับ

6. สรุปและอภิปรายผล/ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ศึกษาลักษณะการสั่นอิสระของแผ่นวัสดุผสมแบบชั้นที่มีรูหลายรูด้วยการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยพัฒนาแบบจำลองจากกรณีง่ายไปสู่กรณีซับซ้อนและตรวจสอบแบบจำลองก่อนการศึกษาพารามิเตอร์ การทดสอบการลู่เข้าของเมชถูกแยกจากการตรวจสอบความถูกต้องอย่างชัดเจน โดยผลของแผ่นเต็มลู่เข้าสู่ประมาณ 101.33 Hz ตั้งแต่เมช 16×16 และคงที่เมื่อเพิ่มความละเอียดเป็น 32×32 และ 64×64 จากนั้นจึงนำค่าที่ลู่เข้าแล้วไปเปรียบเทียบกับข้อมูลอ้างอิง ส่วนกรณีรูโค้งแสดงให้เห็นว่าวิธีสร้างเมชมีผลต่อความถูกต้อง จึงควรเลือกวิธีเมชให้เหมาะกับรูปทรงและตรวจสอบความไวของเมชก่อนสรุปผลเชิงพารามิเตอร์ [5-6], [11], [13], [18]

ผลเชิงพารามิเตอร์ชี้ว่าเงื่อนไขขอบเขตและรูปแบบการวางชั้นมีผลเด่นต่อความถี่ธรรมชาติ การยึดขอบมากขึ้นเพิ่มความแข็งเชิงโมดัลและทำให้ความถี่สูงขึ้น ขณะที่ Layup ที่แตกต่างกันเปลี่ยนเมทริกซ์ความแข็งของลามิเนต โดยเฉพาะ $[D]$ จึงให้ค่าความถี่ต่างกัน สำหรับจำนวนชั้น การศึกษานี้กำหนดความหนาต่อชั้นคงที่ 0.0025 m ดังนั้น

การเพิ่มจาก 4 เป็น 16 ชั้น ทำให้ความหนาแน่นเพิ่มจาก 0.010 เป็น 0.040 m ผลความถี่ที่สูงขึ้นจึงต้องตีความเป็นผลรวมของจำนวนชั้นและความหนาแน่น ไม่ใช่ผลของจำนวนชั้นเพียงอย่างเดียว ในทางกลับกัน การเพิ่มอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของแผ่น ขนาดหรือพื้นที่รูเจาะ และจำนวนรูโดยทั่วไปทำให้ความถี่ลดลง โดยผลดังกล่าวเกิดจากการเปลี่ยนทั้งความแข็งเชิงโมดัล มวลเชิงโมดัล และรูปร่างโหมด

รัศมีมุมมนของรูเป็นพารามิเตอร์ที่ควรพิจารณาเป็นพิเศษ เพราะไม่ได้ให้แนวโน้มเดียวกันทุกโหมดและทุกโครงสร้าง กรณีรูเดี่ยว Mode 1 มีแนวโน้มลดลง ขณะที่ Mode 2 และ Mode 3 เพิ่มขึ้นเมื่อรัศมีมุมมนเพิ่มขึ้น ส่วนกรณีรูหลายรูบางโหมดมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ผลลักษณะนี้สอดคล้องกับหลักที่ว่าความถี่ธรรมชาติขึ้นกับอัตราส่วนระหว่างความแข็งเชิงโมดัลและมวลเชิงโมดัล ไม่ใช่ปริมาณเนื้อวัสดุที่เหลืออยู่เพียงอย่างเดียว นอกจากนี้ Mode 1-5 ในการศึกษาหมายถึงลำดับความถี่จากต่ำไปสูงของแต่ละกรณี จึงควรพิจารณารูปร่างโหมดประกอบเมื่อความถี่ของโหมดที่อยู่ติดกันมีค่าใกล้เคียงกัน และไม่ควรสมมติว่าเลขลำดับโหมดเดียวกันแทนรูปร่างโหมดทางกายภาพเดียวกันตลอดทุกช่วงพารามิเตอร์

ข้อเสนอแนะสำหรับงานต่อไปคือควรทำการทดลองจริงเพื่อยืนยันผลจำลองของแผ่น Kevlar 49 ที่มีรูหลายรู ศึกษาความไวของเมชแบบแยกกรณีสำหรับรูหลายขนาดและหลายตำแหน่ง และใช้การติดตามรูปร่างโหมดเชิงปริมาณ เช่น Modal Assurance Criterion (MAC) เพื่อแยกแยะ Mode Switching หรือ Mode Crossing เมื่อความถี่ของโหมดอยู่ใกล้กัน นอกจากนี้อาจขยายไปสู่การวิเคราะห์แรงกระแทก ความล้า การสั่นแบบบังคับ และผลของความเสียหายสะสมในชั้นวัสดุหรือบริเวณรอบรูเจาะ ซึ่งงานก่อนหน้าชี้ว่าความเสียหายหรือการแยกชั้นใกล้ Cut-out สามารถเปลี่ยนพฤติกรรมการสั่นของแผ่นวัสดุผสมได้ [20] เพื่อให้ผลลัพธ์สนับสนุนการออกแบบโครงสร้างวัสดุผสมได้มั่นใจยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] Callister WD, Rethwisch DG. Fundamentals of materials science and engineering: An integrated approach. 5th ed. Hoboken (NJ): Wiley; 2016.
- [2] Harris B. Engineering composite materials. London: Maney Publishing; 1999.
- [3] Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. 2nd ed. Boca Raton (FL): CRC Press; 2004.
- [4] Leissa AW. Vibration of plates. Washington (DC): National Aeronautics and Space Administration; 1969. Report No.: NASA SP-160.
- [5] Şimon-Marinică AB, Vlasin NI, Manea F, Florea GD. Finite element method to solve engineering problems using Ansys. MATEC Web Conf. 2021;342:01015. doi:10.1051/mateconf/202134201015.
- [6] Bathe KJ. Finite element procedures. Upper Saddle River (NJ): Prentice Hall; 1996.
- [7] Qatu MS. Vibration of laminated shells and plates. Oxford: Elsevier Academic Press; 2004.
- [8] Phongsriruk K, Ingsuwan P, Rangsi W, Klongpanich W. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite rectangular plates using extended Kantorovich method. Maejo Int J Sci Technol. 2010;4(3):512-532.
- [9] Chikkol Venkateshappa S, Kumar P, Ekbote T. Free vibration studies on plates with central cut-out. CEAS Aeronaut J. 2019;10(2):623-632. doi:10.1007/s13272-018-0339-7.

- [10] Sinha L, Das D, Nayak AN, Sahu SK. Experimental and numerical study on free vibration characteristics of laminated composite plate with/without cut-out. *Compos Struct.* 2021;256:113051. doi:10.1016/j.compstruct.2020.113051.
- [11] Ramakrishna S, Rao KM, Rao NS. Free vibration analysis of laminates with circular cutout by hybrid-stress finite element. *Composite Structures.* 1992;21(3):177-185. doi:10.1016/0263-8223(92)90017-7.
- [12] Lee HP, Lim SP, Chow ST. Free vibration of composite rectangular plates with rectangular cutouts. *Composite Structures.* 1987;8(1):63-81.
- [13] Boay CG. Free vibration of laminated composite plates with a central circular hole. *Composite Structures.* 1996;35(4):357-368. doi:10.1016/S0263-8223(96)00037-2.
- [14] Sivakumar K, Iyengar NGR, Deb K. Free vibration of laminated composite plates with cutout. *Journal of Sound and Vibration.* 1999;221(3):443-470. doi:10.1006/jsvi.1998.2034.
- [15] Liew KM, Kitipornchai S, Leung AYT, Lim CW. Analysis of the free vibration of rectangular plates with central cut-outs using the discrete Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2003;45(5):941-959. doi:10.1016/S0020-7403(03)00109-7.
- [16] Huang M, Sakiyama T. Free vibration analysis of rectangular plates with variously-shaped holes. *Journal of Sound and Vibration.* 1999;226(4):769-786.
- [17] Hota SS, Padhi P. Vibration of plates with arbitrary shapes of cutouts. *Journal of Sound and Vibration.* 2007;302(4-5):1030-1036.
- [18] Wang G, Li W, Feng Z, Ni J. A unified approach for predicting the free vibration of an elastically restrained plate with arbitrary holes. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2019;159:267-277. doi:10.1016/j.ijmecsci.2019.06.003.
- [19] Duan L, Jing Z. Vibration optimization of composite plates with multiple circular holes using two-dimensional sampling optimization method. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 2023;155:1131-1148. doi:10.1016/j.enganabound.2023.07.028.
- [20] Ju F, Lee HP, Lee KH. Free vibration of composite plates with delaminations around cutouts. *Composite Structures.* 1995;31(2):177-183. doi:10.1016/0263-8223(95)00016-X.