

## การสืบค้นหาสูตรการคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น

### Investigation on The Formula for Calculating Local Gravity

บัญชา คังตระกูล<sup>1</sup> และ สายชล สิทธิพงศ์<sup>2</sup>

Bancha Kongtragool<sup>1</sup> and Saichon Sithipong<sup>2</sup>

Received: May 1, 2023

Revised: June 29, 2023

Accepted: July 5, 2023

#### บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้นำเสนอการสืบค้นหาสูตรต่าง ๆ สำหรับการคำนวณหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น และผลลัพธ์ของการคำนวณหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นโดยเลือกใช้สูตรคำนวณที่สูตรสำหรับสถานที่ซึ่งตำแหน่งตั้งอยู่ที่เส้นรุ้ง  $18^{\circ}39'43''$  N และอยู่ที่ระดับความสูง 300 m AMSL ผลลัพธ์จากการศึกษานี้แสดงให้เห็นว่าสูตรที่เลือกใช้ในการคำนวณทั้งสี่สูตรให้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่มีความแตกต่างกันน้อยมาก ค่าเฉลี่ยของค่าความโน้มถ่วงที่ได้รับคือ  $9.784\ 70 \pm 0.000\ 02\ \text{m/s}^2$  หรือ  $9.784\ 70\ \text{m/s}^2 \pm 0.002\%$  โดยค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่ได้จากสูตรคำนวณทั้งสี่สูตรมีความคลาดเคลื่อนจากค่าเฉลี่ยประมาณ 0.0002%

**คำสำคัญ:** การคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น, ความโน้มถ่วงปกติ, ความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎี

<sup>1</sup>ผู้ช่วยศาสตราจารย์, สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่

Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering and Technology, North-Chiang University

Email: bancha@northcm.ac.th

<sup>2</sup>อาจารย์ สาขาวิชาเทคโนโลยียานยนต์ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่

Lecturer, Department of Automotive Technology, Faculty of Engineering and Technology, North-Chiang University

Email: saichon@northcm.ac.th

### Abstract

This paper aimed at investigating and presenting various formulas for the local gravity calculation. The studying of four selected formulas was at parallel latitude of  $18^{\circ}39'43''$  N and elevation of 300 meters above MSL. The study revealed that, by using these formulas, the locally obtained gravity was very slightly different. The result was  $9.784\ 70 \pm 0.000\ 02\ \text{m/s}^2$  or  $9.784\ 70\ \text{m/s}^2 \pm 0.002\%$ . The errors of the local gravity calculations, using these formulas, with respected to the mean value were approximately 0.0002%.

**Keywords:** Local Gravity Calculation, Normal Gravity, Theoretical Local Gravity

### 1. บทนำ

งานทางด้านวิศวกรรมที่ละเอียดอ่อนซึ่งต้องการค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่แท้จริง ไม่สามารถใช้ค่าความโน้มถ่วงมาตรฐาน  $g_0 = 9.81\ \text{m/s}^2$  ได้ เพราะจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนออกไปจากความเป็นจริง เช่นในการทดลองต่าง ๆ ทางด้านวิศวกรรมโดยเฉพาะอย่างยิ่งในการศึกษาเรื่องการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion) และการสั่นสะเทือนนั้น การคำนวณในการทดลองต่าง ๆ จะต้องใช้ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นเสมอจึงจะได้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง

จุดประสงค์บทความนี้คือการสืบค้นหาสูตรการคำนวณหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่มีความละเอียดเที่ยงตรงเป็นที่ยอมรับได้และเปรียบเทียบผลลัพธ์จากสูตรต่าง ๆ เพื่อหาสูตรที่ค่าคลาดเคลื่อน (Error) จากค่าเฉลี่ยน้อยที่สุดเพื่อนำไปใช้งานต่อไป

### 2. ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

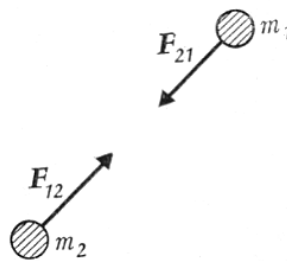
#### 2.1 กฎแห่งความโน้มถ่วงสากล

วัตถุทั้งหลายถูกกระทำด้วยแรงดึงดูดซึ่งกันและกันที่เกิดขึ้นจากความโน้มถ่วง กฎพื้นฐานที่อธิบายแรงจากความโน้มถ่วงถูกประดิษฐ์ขึ้นโดยนิวตัน (Sir Isaac Newton, 1643-1727) เรียกว่ากฎความโน้มถ่วงสากลของนิวตัน

กฎนี้ระบุว่าระหว่างอนุภาคใดๆ สองอนุภาคซึ่งมีมวลเป็น  $m_1$  กับ  $m_2$  และอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง  $R$  จะมีแรงดึงดูดระหว่างกันเกิดขึ้นเป็น  $F_{12}$  กับ  $F_{21}$  (ดูรูปที่ 1) มีทิศทางชี้จากอนุภาคหนึ่งพุ่งไปสู่อีกอนุภาคหนึ่ง และแรงทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน โดยขนาดของแรงจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับผลคูณของมวลทั้งสองและเป็นปฏิภาคผกผันกับกำลังสองของระยะห่างระหว่างมวลทั้งสอง คือ [1]

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad (1)$$

เมื่อ  $G$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ที่เรียกว่าค่าคงที่ของความโน้มถ่วงสากล (Universal Gravitational Constant)



รูปที่ 1 แรงดึงดูดระหว่างวัตถุจากความโน้มถ่วง [1]

ถ้ากำหนดปัญหาเป็นลูกกลมที่มีเนื้อเป็นวัสดุเอกพันธ์ (Homogeneous) สองลูก การคำนวณตามทีกล่าวข้างต้นจะแสดงให้เห็นว่าแรงดึงดูดลัพธ์จะกระทำที่จุดศูนย์กลางของลูกกลมและมีขนาดเป็น

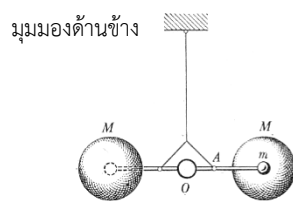
$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad (2)$$

เมื่อ  $m_1, m_2$  คือ มวลของลูกกลมทั้งสอง,  $R$  คือ ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของลูกกลมทั้งสอง และ  $G$  คือ ค่าคงที่ของความโน้มถ่วงค่าเดียวกับในสมการ (1)

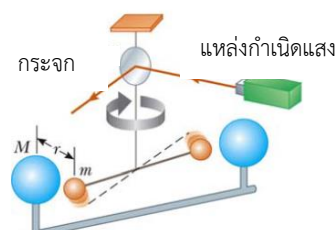
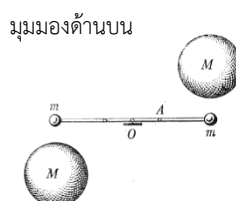
## 2.2 การวัดแรงจากความโน้มถ่วงโดยคาเวนดิช

การวัดแรงจากความโน้มถ่วงโดยตรงเป็นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1798 โดยคาเวนดิช (Henry Cavendish, 1731-1810) [1] โดยใช้ตาชั่งแบบบิด (Torsion Balance) (ดูรูปที่ 2 (ก)) การตรวจสอบการวัดแรงดึงดูดจากความโน้มถ่วงในช่วงเวลาต่อมาโดยมีความเที่ยงตรงมากขึ้นก็ใช้วิธีการเดียวกันนี้ [1]

อุปกรณ์ในการทดลองของคาเวนดิช แสดงดังรูปที่ 2 (ก) มวลขนาด  $m$  เท่ากันสองก้อนถูกวางอยู่ที่ปลายของแขนแกว่ง (Rocker Arm, A) ซึ่งมีน้ำหนักน้อยมากตรึงกึ่งกลางของแขนแกว่งแขนด้วยเส้นด้าย มีกระจกเงาแผ่นหนึ่งติดไว้ตรงจุดกึ่งกลาง O ของแขนแกว่ง เมื่อแขนแกว่งหมุนกระจกทำหน้าที่สะท้อนแสง (ดูรูปที่ 2 (ข)) ทำให้สามารถสังเกตการหมุนได้ชัดเจน การเบี่ยงเบนของลำแสงทำให้วัดมุมบิดของแขนแกว่งและสามารถคำนวณหาแรงที่ทำให้เกิดการบิดได้



(ก) ภาพด้านข้างและด้านบน [1]



(ข) ภาพแหล่งกำเนิดแสงและกระจกเงา [2]

รูปที่ 2 อุปกรณ์การทดลองของคาเวนดิช

ทรงกลมใหญ่ทำจากตะกั่วสองลูกมีมวล  $M$  มาก ( $M = 158 \text{ kg}$ , โดยประมาณ [1]) ถูกทำให้เคลื่อนที่เข้าสู่แกนแกว่งทั้งสองด้าน แรงดึงดูดที่ทรงกลมใหญ่กระทำกับทรงกลมเล็กเป็นแรงคู่ควบซึ่งจะหมุนแกนแกว่ง  $A$  จนกระทั่งโมเมนต์ของแรงคู่ควบจากความโน้มถ่วงถูกสมดุลด้วยโมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นในเส้นด้าย โมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นในเส้นด้ายสามารถคำนวณได้จากพารามิเตอร์ที่ทราบค่าแล้วของระบบและจากมุมในการหมุนของลำแสงที่สะท้อน โดยการเปลี่ยนแปลงระยะห่างระหว่าง  $M$  กับ  $m$ , คาเวนดิช สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงดูดกับระยะห่างได้ และผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองสามารถยืนยันความถูกต้องของกฎความโน้มถ่วงของนิวตัน

ผลลัพธ์จากการทดลองของคาเวนดิชถูกตรวจสอบหลายครั้งโดยนักวิทยาศาสตร์คนอื่นๆ โดยการใช้การทดลองที่ดัดแปลงปรับปรุงมากมาย [1] ในปัจจุบันผลลัพธ์ของการวัดที่เที่ยงตรงให้ค่าคงที่ความโน้มถ่วงเป็น [3]  
 $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 (= \text{m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2)$

### 2.3 การหาค่าความโน้มถ่วงจากกฎของนิวตัน

จากกฎแรงดึงดูดระหว่างมวลและกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้:  $F = m g_a = G (m_E m / r^2)$  หรือ

$$g_a = G (m_E / r^2) \quad (3)$$

เมื่อ  $g_a$  คือ ค่าความโน้มถ่วงสัมบูรณ์ ( $\text{m/s}^2$ ),  $r$  คือ รัศมีเฉลี่ยของโลก ( $6,371 \text{ km}$ ) [3],  $m_E$  คือ มวลของโลก ( $5.976 \times 10^{24} \text{ kg}$ ) [3] และ  $m$  คือ มวลของอนุภาค ( $\text{kg}$ )

เมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันกับการหาน้ำหนัก  $W$  ของมวล  $m$  จะได้  $W = mg$  หรือ  $g = W/m$  โดย  $g$  คือค่าความโน้มถ่วงของโลก และที่จริงแล้ว  $W$  ก็คือแรงดึงดูดที่โลกกระทำกับมวล  $m$  ที่อยู่บนผิวโลก ดังนั้นความหมายที่แท้จริงของค่าความโน้มถ่วงก็คือแรงดึงดูดของโลกต่อมวลของวัตถุหนึ่งหน่วย ด้วยเหตุนี้ความโน้มถ่วงจึงควรมีหน่วยเป็น  $\text{N/kg}$  [4] แต่เนื่องจาก  $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$  คนส่วนใหญ่จึงใช้หน่วยของความโน้มถ่วงเป็น  $\text{m/s}^2$

นอกจากนี้ ในหน่วยเมตริกเล็ก (CGS) ซึ่งใช้หน่วยมูลฐานของมวลเป็น  $\text{g}$ , ความยาวเป็น  $\text{cm}$ , และเวลาเป็น  $\text{s}$ , และมีหน่วยของแรงเป็น  $\text{dyne} (= \text{g} \cdot \text{cm/s}^2)$  ซึ่งจะได้ความโน้มถ่วงมีหน่วยเป็น  $\text{cm/s}^2$  และยังได้กำหนดหน่วยของค่าความโน้มถ่วงเป็น  $\text{Gal}$  (เป็นคำย่อของ Galileo) โดย  $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$  [4]

ในเมื่อหน่วยของค่าความโน้มถ่วงเป็น  $\text{m/s}^2$  เป็นที่ยอมรับและใช้กันโดยทั่วไป ในบทความนี้จึงใช้หน่วยของค่าความโน้มถ่วงทั้งหมดเป็น  $\text{m/s}^2$

ค่าความโน้มถ่วงที่คำนวณได้จากสมการ (3) นี้เป็นค่าที่เกิดขึ้นบนผิวโลก และมีการเปลี่ยนแปลงค่าไปตามระดับความสูงที่วัดจากระดับน้ำทะเล การแปรเปลี่ยนค่าของความโน้มถ่วงตามระดับความสูงที่วัดจากระดับน้ำทะเลจะคำนวณได้จากกฎความโน้มถ่วงคือ

$$g_{ah} = g_a [r/(r + h)]^2 \quad (4)$$

เมื่อ  $g_{ah}$  คือ ค่าความโน้มถ่วงสัมพัทธ์ที่ระดับความสูง  $h$ ,  $g_a$  คือ ค่าความโน้มถ่วงที่ระดับน้ำทะเลจากสมการ (3),  $r$  คือ รัศมีของโลก และ  $h$  คือ ความสูงที่วัดจากระดับน้ำทะเล

แทนค่า  $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ,  $m_E = 5.976 \times 10^{24} \text{ kg}$  และ  $r = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$  ลงในสมการ (3) จะได้ค่าความโน้มถ่วงสัมบูรณ์ที่ระดับน้ำทะเล ( $h = 0$ ) เป็น:  $g_{a0} = 9.824\ 637 \text{ m/s}^2$

ค่าความโน้มถ่วง  $g_{a0} \cong 9.825 \text{ m/s}^2$  ที่คำนวณได้จากสมการ (3) นี้เป็นค่าความโน้มถ่วงสัมบูรณ์ที่เกิดขึ้นบนผิวโลก, ที่ระดับความสูง 1 km ค่าความโน้มถ่วงจะลดลงเป็น  $9.822 \text{ m/s}^2$ , ที่ระดับความสูง 100 km ค่าความโน้มถ่วงจะลดลงเป็น  $9.523 \text{ m/s}^2$ , ที่ระดับความสูง 1,000 km ค่าความโน้มถ่วงลดลงเป็น  $7.340 \text{ m/s}^2$ , และที่ระดับความสูง 6,371 km (ซึ่งเท่ากับรัศมีเฉลี่ยของโลก) ค่าความโน้มถ่วงลดลงเป็น  $2.456 \text{ m/s}^2$  [3] ซึ่งจะสามารถคำนวณค่าความโน้มถ่วงสัมพัทธ์  $g_{ah}$  ได้จากสมการ (4)

ค่าความโน้มถ่วงที่คำนวณได้จากสมการ (3) นั้นเป็นค่าสัมบูรณ์ ซึ่งควรจะเป็นค่าที่วัดได้จากกรอบอ้างอิงที่มีจุดกำเนิดติดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของโลกแต่ไม่หมุนไปพร้อมกับโลก ซึ่งถือว่าเป็นกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง และควรจะเป็นค่าความโน้มถ่วงที่วัดได้บนผิวโลกที่ไม่หมุนแต่ในความเป็นจริงนั้นโลกมีการหมุน ดังนั้นจึงทำให้ความโน้มถ่วงของวัตถุที่ตกอย่างอิสระซึ่งวัดจากตำแหน่งที่อยู่บนผิวโลกมีค่าน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์เล็กน้อย ค่าความโน้มถ่วงสัมพัทธ์กับค่าสัมบูรณ์ต่างกันมากที่สุดที่เส้นศูนย์สูตรและมีค่าเท่ากันที่ขั้วโลก (รูปที่ 3)

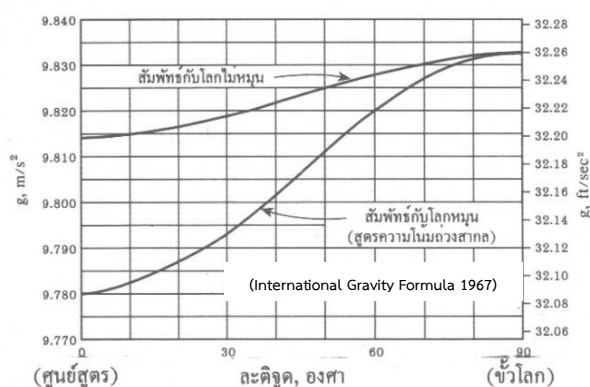
#### 2.4 การคำนวณหาความโน้มถ่วงสัมพัทธ์

ค่าที่ละเอียดแม่นยำของความโน้มถ่วงเมื่อวัดเทียบกับผิวโลกจะต้องนำความจริงที่ว่าโลกเป็นทรงกลมที่แบนตรงขั้วโลกที่มีการหมุนเข้ามาร่วมในการพิจารณาด้วย ซึ่งจะหาได้จากสูตร International Gravity Formula 1967 (IGF 67) สำหรับการหาความเร่งจากความโน้มถ่วงสัมพัทธ์บนผิวโลก ( $h = 0$ ) คือ [5, 6]

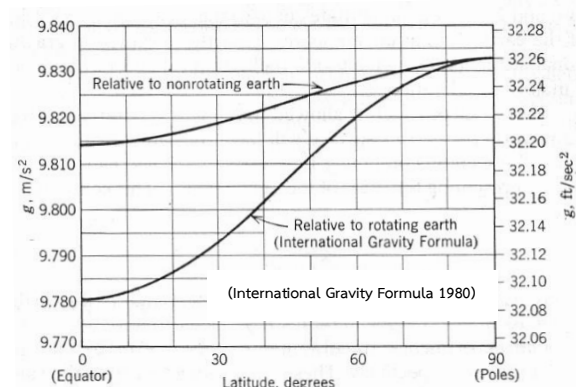
$$g_{r0} = 9.780\ 49 (1 + 5.2884 \times 10^{-3} \sin^2 \phi - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\phi) \quad (5)$$

เมื่อ  $\phi$  คือ องศาเส้นรุ้ง (Latitude)

ค่าของความโน้มถ่วงจากสมการนี้เป็นค่าสัมพัทธ์เทียบกับโลกที่โดยรวมผลของการที่โลกไม่กลมจริงเอาไว้ด้วย ซึ่งถ้าบวกค่าความแตกต่าง  $g_{ar0} = 3.387 \times 10^{-2} \cos \phi$  [5] เข้าไปในสมการ (5) ก็จะได้ค่าความโน้มถ่วงสัมบูรณ์ การเปลี่ยนแปลงค่าของความโน้มถ่วงตามเส้นรุ้งต่างๆ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3 (ก)



(ก) แสดงความสัมพันธ์ของค่าแรงโน้มถ่วงและละติจูดในสูตรปี 1967



(ข) แสดงความสัมพันธ์ของค่าแรงโน้มถ่วงและละติจูดในสูตรปี 1980

รูปที่ 3 การแปรเปลี่ยนค่าความโน้มถ่วงสัมพันธ์กับโลกหมุนคำนวณจากสมการ (5) [5] และสมการ (6) [3]

ที่เส้นศูนย์สูตรค่าความโน้มถ่วงที่วัดได้หรือค่าความโน้มถ่วงสัมพันธ์มีค่าเป็น  $9.780\,490\text{ m/s}^2$  โดยค่าความโน้มถ่วงสัมพันธ์เป็น  $9.814\,360\text{ m/s}^2$  ที่ขั้วโลกค่าความโน้มถ่วงสัมพันธ์และค่าความเร่งสัมพันธ์เท่ากันคือ  $9.832\,213\text{ m/s}^2$  ในปี 1980, สูตร IGF 80 อยู่ในรูปแบบ [3]

$$g_{ro} = 9.780\,327 (1 + 5.279 \times 10^{-3} \sin^2 \phi + 2.3 \times 10^{-5} \sin^4 \phi + \dots) \quad (6)$$

ซึ่งการแปรเปลี่ยนค่าตามเส้นรุ้ง ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3 (ข) และถ้าบวกค่าความแตกต่าง  $g_{ar0} = 3.382 \times 10^{-2} \cos^2 \phi$  [3] เข้าไปในสมการก็จะได้ค่าของความโน้มถ่วงสัมพันธ์ ดังนั้นค่าความโน้มถ่วงสัมพันธ์ที่ระดับความสูงจากระดับน้ำทะเลจึงสามารถประมาณได้จาก

$$g_{rh} = g_{ro} [r / (r + h)]^2 \quad (7)$$

## 2.5 การคำนวณหาความโน้มถ่วงท้องถิ่น

ในปี 1901, ในการประชุม General Conference on Weights and Measurement ครั้งที่ 3 กำหนดค่ามาตรฐานของความโน้มถ่วงบนผิวโลกเป็น [3, 4, 5]  $g_0 = 9.806\,65\text{ m/s}^2$  เป็นค่าที่กำหนดสำหรับสถานที่ซึ่งไม่ทราบค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นหรือเมื่อค่าความโน้มถ่วงที่แท้จริงนั้นไม่มีความสำคัญ [13] ตรงกับค่าความโน้มถ่วงที่เส้นรุ้ง  $45^\circ\text{ N}$ , และที่ระดับน้ำทะเลปานกลาง [3, 4, 5] มีค่าโดยประมาณ:  $g_0 = 9.81\text{ m/s}^2$

ค่าความโน้มถ่วงนี้เรียกว่าเป็นค่าความโน้มถ่วงมาตรฐาน (Standard Gravity) [14] ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น (Local Gravity) หรือค่าความโน้มถ่วงปกติ (Normal Gravity) [14] หรือค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎี (Theoretical Local Gravity) [8] เป็นการประมาณค่าความโน้มถ่วงที่แท้จริงบนผิวโลกโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แสดงแทนโลก รูปแบบโดยทั่วไปคือ [9, 10]

$$g(\phi, h) = g(\phi) + GC(h)$$

เมื่อ  $g(\phi, h)$  คือ ค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎีซึ่งขึ้นอยู่กับเส้นรุ้งและระดับความสูง,  $g(\phi)$  คือ ค่าความโน้มถ่วงที่คำนวณจากสูตร IGF ซึ่งขึ้นอยู่กับเส้นรุ้งเพียงอย่างเดียว, และ  $GC(h)$  คือ ค่าการปรับแก้ความโน้มถ่วง (Gravity Corrections) ซึ่งขึ้นอยู่กับระดับความสูง

ปี 1929, Carlo Somigliana (1860-1955) [7] ได้เสนอสูตรคำนวณค่าความโน้มถ่วงที่ระดับน้ำทะเลเป็น

$$g(\phi) = \frac{ag_e \cos^2 \phi + bg_p \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}} \quad (8)$$

เมื่อ  $g_e$  คือ ค่าความโน้มถ่วงที่เส้นศูนย์สูตร ( $=9.780\,326\,771\,5\text{ m/s}^2$ ),  $g_p$  คือ ค่าความโน้มถ่วงที่ขั้วโลก ( $=9.832\,184\,937\,8\text{ m/s}^2$ ),  $a$  คือ รัศมีของโลกที่เส้นศูนย์สูตร (Semi-major Axis),  $b$  คือ รัศมีของโลกที่ขั้วโลก (Semi-minor Axis),  $\phi$  คือ เส้นรุ้งทางภูมิศาสตร์ สมการ (8) ในรูปที่ง่ายกว่าคือ [7]

$$g(\phi) = g_e \frac{1 + p \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (9)$$

$$\text{เมื่อ } p = (b/a)(g_p/g_e) \text{ และ } e^2 = 1 - b^2/a^2$$

สมการของ Somigliana ถูกประมาณค่าโดยการกระจายอนุกรมอยู่ในรูปแบบ [7]

$$g(\phi) = g_e (1 + \beta \sin^2 \phi + \beta_1 \sin^2 2\phi + \dots) \quad (10)$$

## 2.6 IGF 30

ในปี 1930, The International Association of Geodesy ได้เสนอสูตรสำหรับการคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นทางทฤษฎีเรียกว่า IGF 30 โดยมีรูปแบบทั่วไปของสูตรเป็น [8]

$$g(\phi) = g_e (1 + \beta \sin^2 \phi - \beta_1 \sin^2 2\phi) \quad (11)$$

เมื่อ  $g(\phi)$  คือ ค่าความโน้มถ่วงขึ้นเส้นรุ้งทางภูมิศาสตร์  $\phi$  ณ ตำแหน่งที่จะหาค่าความโน้มถ่วง,  $g_e$  คือ ค่าความโน้มถ่วงที่เส้นศูนย์สูตร และ  $\beta, \beta_1$  คือ พารามิเตอร์ที่จะต้องเลือกให้เหมาะกับโลกเพื่อให้ได้ค่าความโน้มถ่วงที่แท้จริง The International Association of Geodesy โดย Gino Cassinis [8] ได้ทำการหาค่าความโน้มถ่วงโดยใช้  $g_e = 9.78049\text{ m/s}^2$ ,  $\beta = 5.2882 \times 10^{-3}$  และ  $\beta_1 = -5.9 \times 10^{-6}$

พารามิเตอร์เหล่านี้ได้ถูกปรับปรุงด้วยความรู้ที่ใหม่ขึ้นและด้วยการวัดที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้นในเวลาต่อมาในปี 1948, Harold Jeffreys [8] ปรับปรุงพารามิเตอร์เป็น  $g_e = 9.780373\text{ m/s}^2$ ,  $\beta = 5.2891 \times 10^{-3}$  และ  $\beta_1 = -5.9 \times 10^{-6}$

## 2.7 IGF 67

สูตรคำนวณค่าความโน้มถ่วงของ Geodetic Reference System 1967 (GRS 67) [8] ได้กำหนดค่าพารามิเตอร์เป็น  $g_e = 9.780\,318\text{ m/s}^2$ ,  $\beta = 5.3024 \times 10^{-3}$ , และ  $\beta_1 = -5.9 \times 10^{-6}$  เมื่อแทนในสมการ (11) จะได้ [7, 8]

$$g(\phi) = 9.780\,318 (1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 \phi - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\phi) \quad (12)$$

ซึ่งแตกต่างกับสมการ (5) เพียงเล็กน้อย

## 2.8 IGF 80

เมื่อใช้ค่าตัวเลขของระบบอ้างอิง GRS 80 [9] คือ  $a = 6\,378\,137\text{ m}$ ,  $b = 6\,356\,752.3141\text{ m}$ ,  $g_e = 9.780\,326\,771\,5\text{ m/s}^2$ , และ  $g_p = 9.832\,186\,368\,5\text{ m/s}^2$  สมการ (9) กลายเป็น

$$g(\phi) = 9.780\,327 (1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 \phi - 5.8 \times 10^{-6} \sin^2 2\phi) \quad (13)$$

โดยมีความละเอียด (Accuracy) ประมาณ  $\pm 10^{-6}\text{ m/s}^2$  [8] เมื่อใช้พื้นฐานทางตรีโกณมิติ จะได้สมการที่เทียบเท่ากับสมการ (13) เป็น [4, 8]

$$g(\phi) = 9.780\,327 (1 + 5.2792 \times 10^{-3} \sin^2 \phi + 2.32 \times 10^{-5} \sin^4 2\phi) \quad (13-1)$$

$$g(\phi) = 9.780\,327 (1.005\,302\,4 - 5.3256 \times 10^{-3} \cos^2 \phi + 2.32 \times 10^{-5} \cos^4 2\phi) \quad (13-2)$$

$$g(\phi) = 9.780\,327 (1.002\,645\,4 - 2.6512 \times 10^{-3} \cos 2\phi + 5.8 \times 10^{-6} \cos^2 2\phi) \quad (13-3)$$

ตาม GRS 80, ได้มีการใช้การกระจายอนุกรมในรูปแบบ [7, 8]

$$g(\phi) = g_e (1 + c_1 \sin^2 \phi + c_2 \sin^4 \phi + c_3 \sin^6 \phi + c_4 \sin^8 \phi + \dots) \quad (14)$$

ซึ่งพารามิเตอร์มีค่า  $c_1 = 5.279\,041\,4 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 = 2.327\,18 \times 10^{-5}$ ,  $c_3 = 1.262 \times 10^{-7}$ , และ  $c_4 = 7 \times 10^{-10}$  โดยมีความละเอียดประมาณ  $\pm 10^{-9}\text{ m/s}^2$  [8]

ในกรณีที่ไม่ต้องการความละเอียดแม่นยำมากพจน์ท้ายๆ สามารถตัดทิ้งไปได้ ถ้าการกระจายคิดเพียงสองพจน์แรกก็จะมีรูปแบบเทียบได้กับสมการ (6)

## 2.9 IGF 84

สูตรความโน้มถ่วงปกติ IGF 84 ที่ World Geodetic System 1984 (WGS 84) สร้างขึ้นที่ค้นพบคือ [15]

$$g(\phi) = 9.780\,325\,335\,9 \times \left( \frac{1 + 0.001\,931\,850\,400 \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - 0.006\,694\,384\,442 \sin^2 \phi}} \right) \quad (15)$$

และ [11]

$$g(\phi) = 9.780\,326\,771\,4 \times \left( \frac{1 + 0.001\,931\,851\,386\,39 \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - 0.006\,694\,379\,990\,13 \sin^2 \phi}} \right) \quad (16)$$

## 2.10 ค่าปรับแก้ความโน้มถ่วง

Cassinis [8] ได้หาค่าความความโน้มถ่วงขึ้นอยู่กับความสูง (Height Dependence) เป็น [8, 9]

$$g(\phi, h) = g(\phi) - (FAE - BME) h \quad (17)$$

เมื่อ FAE คือ ผลของอากาศอิสระ (Free Air Effect, ความสูงเหนือ Geoid) หรือเป็นค่าปรับแก้อากาศอิสระ (Free Air Correction, FAC [14] =  $3.8086 \times 10^{-6}$  m/s<sup>2</sup>/m), และ BME คือ ผลของมวล Bouguer (Bouguer Mass Effect, การดึงดูดของหินที่เพิ่มเติมเข้ามา =  $4.19 \times 10^{-7} \rho$  m/s<sup>2</sup>/m โดย  $\rho$  คือ ความหนาแน่นเฉลี่ยของหิน, มีหน่วยเป็น kg/m<sup>3</sup>) และ h คือระดับความสูงเหนือระดับน้ำทะเลปานกลาง (มีหน่วยเป็น m AMSL), สมการ (17) จึงสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการ

$$g(\phi, h) = g(\phi) - (3.8086 \times 10^{-6} - 4.19 \times 10^{-7} \rho) h \quad (18)$$

แต่ผลของมวล Bouguer ไม่นำมาพิจารณาอีกต่อไป เพราะว่าความโน้มถ่วงขึ้นอยู่กับระดับความสูงตาม GRS 67 ถูกกำหนดให้เป็น [7]

$$g(\phi, h) = g(\phi) - (3.0877 \times 10^{-6} - 4.3 \times 10^{-9} \sin^2 \phi) h + 7.2 \times 10^{-13} h^2 \quad (19)$$

สูตรความโน้มถ่วงในรูปแบบอื่นคือ [7]

$$g(\phi, h) = g(\phi) [1 - (k_1 - k_2 \sin^2 \phi) h + k_3 h^2] \quad (20)$$

โดยพารามิเตอร์ที่หาจาก GRS 80 [7] มีค่าเป็น:  $k_1 = 3.157\,04 \times 10^{-7}$  m<sup>-1</sup>,  $k_2 = 2.102\,69 \times 10^{-9}$  m<sup>-1</sup>, และ  $k_3 = 7.375\,52 \times 10^{-14}$  m<sup>-2</sup> สูตรนี้ใช้ได้กับการบินในระดับความสูงปกติแต่ระดับความสูงมากกว่า 100 km ขึ้นไปอยู่เหนือพิสัยของสูตรนี้ ในสำนักมาตรฐานของประเทศเยอรมันทั้งหมดจะใช้สูตร WELMEC [8] คือ

$$g(\phi, h) = 9.780\,318 (1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 \phi - 5.8 \times 10^{-6} \sin^2 2\phi) - 3.085 \times 10^{-6} h \quad (21)$$

ซึ่งเป็นสูตรที่มีพื้นฐานบน IGF 67 ร่วมกับ FAC การสืบค้นยังได้พบสูตรที่สามารถหาค่าความโน้มถ่วงโดยรวมผลของเส้นรุ้งกับระดับความสูงจากระดับน้ำทะเล ในระบบหน่วยวัดมาตรา FPS คือ [14]

$$g(\phi, h) = 32.0894 (1 + 0.0052375 \sin^2 \phi) (1 - 0.0000000957 h), \text{ ft/sec}^2 \quad (22)$$

เมื่อเปลี่ยนหน่วยวัดเป็นระบบเมตริกจะได้

$$g(\phi, h) = 9.780\,849\,12 (1 + 5.2375 \times 10^{-3} \sin^2 \phi) (1 - 3.139\,763\,78 \times 10^{-7} h) \quad (23)$$

เมื่อ  $h$  คือ ระดับความสูงจากระดับน้ำทะเล มีหน่วยเป็น ft ในสมการ (21) และเป็น m ในสมการ (22) และยังคงพบสูตรความโน้มถ่วงอีกสูตรหนึ่งคือ [12]

$$g(\phi, h) = 9.780\,318\,4 (1 + 5.3024 \times 10^{-3} \sin^2 \phi - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\phi) - 3.086 \times 10^{-6} h \quad (24)$$

ซึ่งสมการ (24) ก็คือสมการ (12) ที่มี FAC ปรากฏอยู่ด้วยนั่นเอง จะสังเกตได้ว่าใกล้เคียงกับสมการ (21) มาก

จากปรับแก้ค่าแรงโน้มถ่วงสำหรับใช้คำนวณในแต่ละพื้นที่ ในสมการที่ (17) – (24) จะเห็นได้ว่าค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นมีค่าขึ้นกับหลายตัวแปร แต่ตัวแปรหลักคือพิกัดเส้นรุ้งและความสูงจากระดับน้ำทะเล ดังนั้นการคำนวณหาผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงจะต้องนำค่าพิกัดเส้นรุ้งและความสูงจากระดับน้ำทะเลมาคำนวณด้วย

#### 2.11 ความละเอียดของค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น

ค่าความโน้มถ่วงบนผิวโลกแปรเปลี่ยนค่าไปขึ้นอยู่กับปัจจัยจำนวนมาก ผลกระทบที่สำคัญคือ [11]

2.11.1 การหมุนของโลกทำให้รู้สึกว่ายู่ที่เส้นศูนย์สูตรมีน้ำหนักเบากว่าอยู่ขั้วโลก ซึ่งเป็นผลมาจากแรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลาง นอกจากนี้ยังทำให้โลกแบนลงโดยป่องออกที่เส้นศูนย์สูตรผลของทั้งสองประการนี้รวมกับการผันแปรตามเส้นรุ้งได้มีการปรับแก้ในสูตร IGF แล้วการเปลี่ยนแปลงค่าเนื่องจากการหมุนของโลกอยู่อันดับระหว่าง  $\pm 0.03 \text{ m/s}^2$

2.11.2 ระดับความสูงเหนือระดับน้ำทะเลเมื่ออยู่ระดับสูงมากก็ยิ่งไกลจากจุดศูนย์กลางของโลกมากขึ้น แรงดึงดูดของโลกจะน้อยลงที่ระดับความสูงประมาณ 1,000 m ค่าความโน้มถ่วงลดน้อยลงประมาณ  $0.0001 \text{ m/s}^2$

2.11.3 ความหนาแน่นของโลกที่ตำแหน่งต่างๆ ไม่เท่ากัน เนื่องจากความโน้มถ่วงเป็นฟังก์ชันของมวล ความโน้มถ่วงจึงแปรเปลี่ยนไปด้วย การเปลี่ยนแปลงค่าเนื่องจากมวลของโลกไม่คงที่มีอันดับอยู่ระหว่าง  $\pm 0.0006 \text{ m/s}^2$

2.11.4 แรงดึงดูดของดวงอาทิตย์และดวงจันทร์ ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงค่าความโน้มถ่วงประมาณ  $\pm 0.000\,003 \text{ m/s}^2$

### 3. การทดสอบหาสูตรคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่

การทดสอบหาสูตรคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่ เลือกใช้ตำแหน่งที่ตั้ง ณ มหาวิทยาลัย นอร์ท-เชียงใหม่ อ.หางดง จ.เชียงใหม่ มีพิกัดอยู่ที่เส้นรุ้ง  $18^\circ 39' 43'' \text{ N}$  และระดับความสูง 300 m AMSL สูตรคำนวณที่เลือกใช้คือสมการ (19), (20), (21) และ (24) ซึ่งเป็นสมการที่ได้มาจากการปรับแก้ค่าแรงโน้มถ่วงแล้ว

และมีผลลัพธ์การคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นที่ใกล้เคียงกัน แต่การคำนวณในสมการ (19) และ (20) ต้องการค่า  $g(\phi)$  จึงใช้ค่าจากสมการ (16) จะได้  $g_{(18.66194^\circ)} = 9.785\ 615\ 612\ \text{m/s}^2$

การคำนวณหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นขั้นต้นได้ผลลัพธ์ดังแสดงในตารางที่ 1 โดยเปรียบเทียบกับค่าเฉลี่ยด้วยค่าความแตกต่างเป็นร้อยละ คือ  $\%Diff = (g_i / g_{Av} - 1) \times 100\%$  และค่าความคลาดเคลื่อน (Error) เป็นร้อยละคำนวณจาก  $\%Error = |(g_i / g_{Av} - 1)| \times 100\%$

ตารางที่ 1 ผลลัพธ์จากการคำนวณค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่น

| สูตรที่ใช้ | $g\ (18.6194^\circ, 300\ \text{m})\ \text{m/s}^2$ | %Diff      | %Error    |
|------------|---------------------------------------------------|------------|-----------|
| สมการ (19) | 9.784 726 546                                     | -0.000 232 | 0.000 232 |
| สมการ (20) | 9.784 726 549                                     | -0.000 232 | 0.000 232 |
| สมการ (21) | 9.784 681 126                                     | 0.000 232  | 0.000 232 |
| สมการ (24) | 9.784 681 227                                     | 0.000 231  | 0.000 231 |
| ค่าเฉลี่ย  | 9.784 703 862                                     |            |           |

#### 4. ผลลัพธ์และการอภิปรายผลลัพธ์

ผลลัพธ์จากการคำนวณได้แสดงไว้ในตารางที่ 1 เมื่อพิจารณาผลลัพธ์ของค่าความโน้มถ่วงที่อยู่ในตาราง เห็นได้ว่าค่าความโน้มถ่วงที่คำนวณได้ทั้งหมดมีค่าใกล้เคียงกันมาก ซึ่งเมื่อพิจารณาความละเอียดของตัวเลขเพียงห้าตำแหน่งก็จะได้ค่าเท่ากันทั้งหมด คือ  $g_{(18.66194^\circ, 300\text{m})} = 9.784\ \text{m/s}^2$  แต่เมื่อพิจารณาความละเอียดของตัวเลขสี่ตำแหน่งขึ้นไปก็จะเห็นความแตกต่างนี้

ค่าคลาดเคลื่อนของค่าที่ได้จากการคำนวณทั้งสี่สูตรเมื่อเปรียบเทียบกับค่าเฉลี่ยจะเห็นได้ว่ามีความแตกต่างกันน้อยมาก โดยค่าที่คำนวณได้จากสมการ (24) จะมีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด โดยสมการ(19), (20) และ (21) มีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากันแต่มากกว่าสมการ (24) เล็กน้อย

ความไม่แน่นอนสัมบูรณ์ (Absolute Uncertainty) ของผลลัพธ์ คือ:  $(9.784\ 726\ 549 - 9.784\ 681\ 126) / 2\ \text{m/s}^2 = \pm 0.000\ 02\ \text{m/s}^2$  ดังนั้นค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นจึงมีค่าเป็น:  $g_{(18.66194^\circ, 300\text{m})} = 9.784\ 70 \pm 0.000\ 02\ \text{m/s}^2$  หรือในรูปของความไม่แน่นอนเป็นร้อยละ (Percentage Uncertainty) ได้เป็น:  $g_{(18.66194^\circ, 300\text{m})} = 9.784\ 70\ \text{m/s}^2 \pm 0.002\%$

ในการคำนวณหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นนั้น มีความเป็นไปได้ที่จะได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเป็นที่ยอมรับได้ โดยควรจะต้องทำการคำนวณเปรียบเทียบกับสูตรที่มีความเหมาะสมหลายสูตร และเลือกใช้สูตรการคำนวณที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ และควรจะต้องทำการทดลองเพื่อยืนยันค่าที่ได้จากการคำนวณในขั้นต่อไปโดยใช้มาตรความโน้มถ่วง (Gravimeter) ที่เหมาะสม

ดังนั้นสำหรับมหาวิทยาลัยนอร์ท-เชียงใหม่ ซึ่งใช้เป็นสถานที่ทดสอบตั้งอยู่ที่เส้นรุ้ง  $18^{\circ} 39' 43''$  N และมีระดับความสูง 300 m AMSL, โดยการใช้สมการ (19), (20), (21) และ (24) จะคำนวณหาค่าความโน้มถ่วงท้องถิ่นเฉลี่ยได้เป็น  $g_{(18.66194^{\circ}, 300\text{m})} = 9.784\ 70 \pm 0.000\ 02\ \text{m/s}^2$  หรือ  $g_{(18.66194^{\circ}, 300\text{m})} = 9.784\ 70\ \text{m/s}^2 \pm 0.002\%$  โดยสูตรในการคำนวณทั้งสี่มีค่าความคลาดเคลื่อนเมื่อเทียบกับค่าเฉลี่ยประมาณ 0.0002%

### เอกสารอ้างอิง

- [1] Strelkov SP. Mechanics. Moscow: Mir; 1978.
- [2] Newton's Law of Gravitation – Introduction [Internet]. [place unknown]: [publisher unknown]; 2022 [cited 2022 Sep 16]. Available from: <https://studylib.net/doc/18589864/newton-s-law-of-gravitation-gravitation-%E2%80%93-introduction>.
- [3] Meriam JL, Kraige LG. Engineering Mechanics Dynamics Volume 2. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons; 1987.
- [4] Oxford University Press. Oxford Reference [Internet]. New York: Oxford University Press ; c2023 [cited 2023 Jul 3]. Available from: <https://www.oxfordreference.com/display/10.1093/oi/authority.20110803095840601;jsessionid=073C785D5B71CA06125D30674B7A4D55>.
- [5] วัชรินทร์ วิทย์กุล. กลศาสตร์วิศวกรรม: พลศาสตร์. กรุงเทพฯ: ฟิสิกส์เซ็นเตอร์; 2536.
- [6] Meriam JL. Mechanics Part II: Dynamics, 2nd ed. New York: John Wiley and Sons; 1959.
- [7] Moritz H. Geodetic Reference System 1980. [Internet]. [place unknown]: [publisher unknown]; 2022 [cited 2023 Jul 3]. Available from: [http://geoweb.mit.edu/~tah/12.221\\_2005/grs80\\_corr.pdf](http://geoweb.mit.edu/~tah/12.221_2005/grs80_corr.pdf)
- [8] Wellenhof BH, Moritz H. Physical Geodesy. 2nd. New York: Springer; 2006.
- [9] The University of Edinburgh. School of Geosciences. Gravity Formulae [Internet]. Edinburgh: The University of Edinburgh; 2004 [cited 2022 Aug 16]. Available from: [https://www.geos.ed.ac.uk/~whaler/gravity\\_lectures/Gravity%20Formulae.pdf](https://www.geos.ed.ac.uk/~whaler/gravity_lectures/Gravity%20Formulae.pdf)
- [10] SensorsONE. Local Gravity Calculator [Internet]. Rutland: SensorsONE Limited; c2023 [cited 2022 Sep 16]. Available from: <https://www.sensorsone.com/local-gravity-calculator/>
- [11] Thorncroft G. How precise is Earth's gravity [Internet]. [place unknown]: [publisher unknown]; 2022 [cited 2022 Apr 5]. Available from: <https://studylib.net/doc/18249161/how-precise-is-earth-s-gravity-%3F>.
- [12] The University of Sheffield. G1 Kater's Pendulum [Internet]. Sheffield: The University of Sheffield ; c2023 [cited 2022 Jul 20]. Available from: [https://www.sheffield.ac.uk/polopoly\\_fs/1.142621/file/G1\\_Katers\\_script\\_V2.1.pdf](https://www.sheffield.ac.uk/polopoly_fs/1.142621/file/G1_Katers_script_V2.1.pdf)

- 
- [13] National Institute of Standards and Technology. Standard acceleration of gravity [Internet]. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology; 2023 [cited 2023 Jul 3]. Available from: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?gn>.
- [14] University Collage of London. Gravity, the shape of the Earth, isostasy, moment of inertia [Internet]. London: University Collage of London; c2023 [cited 2023 Jul 3]. Available from: <https://www.ucl.ac.uk/EarthSci/people/lidunka/GEOL2014/Geophysics20-%20Gravity/gravity.htm>
- [15] International Civil Aviation Organization. World Geodetic System – 1984 (WGS-84) Manual. [Internet]. Québec: International Civil Aviation Organization; c2023 [cited 2023 Jul 3]. Available from: <https://www.icao.int/NACC/Documents/Meetings/2014/ECARAIM/REF08-Doc9674.pdf>