



ผลกระทบของแรงดันภายในและการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรที่มีต่อ
การสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงกลม

Effects of Internal Pressure and Constraint Volume on Vibration
of Spherical Membrane

วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา^{1*}

Received: November, 2016; Accepted: March, 2017

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอพฤติกรรมการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงกลมสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร การคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดจะอาศัยหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ การสร้างฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดและของเหลวที่บรรจุอาศัยหลักการของงานเสมือน ในทอมของค่าการเสียรูป ค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากผลการศึกษาพบว่าแรงดันภายในเริ่มต้นเนื่องจากของเหลวที่บรรจุและเงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญสำหรับการวิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกับโครงสร้างเปลือกบางที่ไม่ได้บรรจุของเหลว

คำสำคัญ : การสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกน; โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงกลมสำหรับบรรจุของเหลว; เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร; รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด; ค่าความถี่ธรรมชาติ

¹ คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน นครราชสีมา

* Corresponding Author E - mail Address: weeraphan.ji@rmuti.ac.th

Abstract

This paper presents axisymmetric vibration behavior of fluid-filled spherical membrane under constraint volume condition. Differential geometry is introduced in order to compute the membrane geometry. Energy functional of the membrane and internal fluid are derived in terms of displacements from the principle of virtual work. Natural frequencies and vibration mode shapes can be obtained by using the finite element method. The results indicate that the initial internal pressure contained fluid and the constraint volume condition are significant parameters for analyzing the vibration behavior of fluid-filled membrane to get the results close to the shell without containing fluid.

Keywords: Axisymmetric Vibration Behavior; Fluid-Filled Spherical Membrane; Constraint Volume Condition; Membrane Geometry; Natural Frequency

บทนำ

โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมเป็นโครงสร้างที่นิยมใช้งานกันอย่างแพร่หลาย อาทิเช่น หลังคาทรงโค้งถึงบรรจุปิโตรเลียมเหลวและก๊าซธรรมชาติ หรือโครงสร้างนอกชายฝั่งทะเล เป็นต้น ซึ่งข้อดีสำหรับโครงสร้างประเภทนี้ คือ น้ำหนักเบาและแข็งแรง สามารถต้านทานแรงดันได้ดีทั้งจากภายในและภายนอก ผลการสั่นของโครงสร้างดังกล่าวอันเนื่องมาจากแรงกระทำแบบพลศาสตร์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา เช่น แรงแผ่นดินไหวหรือแรงคลื่นทะเล เป็นต้น เป็นสาเหตุหลักที่ทำให้โครงสร้างเกิดความเสียหายและไม่ปลอดภัยต่อการใช้งาน ดังนั้นการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นที่ถูกต้องจึงมีความสำคัญอย่างมากในการออกแบบเชิงเทคนิคสำหรับโครงสร้างเปลือกบาง

งานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม เริ่มต้นจากงานวิจัยของ Naghdi P.M. and Kalnins A. [1], Kalnins A. [2] และ Ross E.W. [3] ซึ่งเป็นการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบที่ไม่ได้บรรจุของเหลว ต่อมา Rand R. and Dimaggio F. [4] ได้ศึกษาการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่บรรจุของเหลวโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method) ในการแก้ปัญหา หลังจากนั้น Robertson A.N. et al. [5] ได้ทำการทดสอบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมเพื่อศึกษาพฤติกรรมการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกน และได้มีการนำผลการทดสอบมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณในงานวิจัยของ Duffey T.A. et al. [6] ซึ่งพบว่ามีความใกล้เคียงกันมากสำหรับการศึกษาการสั่นแบบอิสระของโครงสร้างเปลือกบางทรงกลมที่มีฐานรองรับเป็นแบบยึดแน่นและยึดหมุนโดยใช้วิธี Generalized Differential Quadrature ได้ถูกนำเสนอโดย Artioli E. and Viola E. [7]

จากงานวิจัยในอดีตที่ผ่านมาในข้างต้นจะพบว่ามีการศึกษาเฉพาะการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางที่มีผลของพลังงานความเครียดจากแรงดัดและแรงดึงโดยใช้ทฤษฎีเชลล์ (Shell Theory) ในการวิเคราะห์ปัญหาเท่านั้น แต่สำหรับการศึกษาการสั่นโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาแน่นน้อยมากเมื่อเทียบกับ

ความยาวรัศมีของโครงสร้าง ซึ่งจะมีค่าพลังงานความเครียดจากแรงค้ำน้อยมาก ดังนั้นจึงสามารถใช้ทฤษฎีเมมเบรน (Membrane Theory) ในการวิเคราะห์ปัญหาแทนได้ โดยจะคิดเฉพาะเทอมของพลังงานความเครียดจากแรงค้ำเท่านั้น โดยที่โครงสร้างดังกล่าวนี้จะเรียกว่าโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำสามารถพบได้จากงานวิจัยของ Phadke A.C. and Cheung K.F. [8] และ Jiammeepreecha W. et al. [9] ซึ่งได้ทำการศึกษาผลตอบสนองของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำรูปครึ่งทรงกลมสำหรับบรรจุของเหลวในทะเล ต่อมา Jabbarizadeh S. and Karr D.G. [10] ได้นำเสนอวิธีการวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณหาค่าการเสียรูปและแรงค้ำที่เกิดขึ้นในโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำรูปทรงกลมที่บรรจุของเหลวและจมอยู่ในของเหลวเพียงบางส่วน หลังจากนั้น Jiammeepreecha W. et al. [11] ได้ทำการศึกษาถึงความเป็นไปได้ในการใช้โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่บรรจุของเหลวติดตั้งในทะเลลึกโดยใช้สมอยีครั้ง

สำหรับวัตถุประสงค์ของงานวิจัยในครั้งนี้คือเพื่อศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำรูปทรงกลมที่บรรจุของเหลวภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร และเนื่องจากการพิจารณาเฉพาะการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกน ดังนั้นเส้นโค้งเมริเดียน (Meridional Curve) จึงถูกนำมาใช้เป็นเส้นโค้งของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำเพื่อทำการศึกษาซึ่งลักษณะปัญหาดังกล่าวจะสามารถเขียนได้ในรูปแบบการแปรผัน (Variational Form) โดยใช้ทฤษฎีของเมมเบรน [12] การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกนสามารถคำนวณได้โดยใช้หลักการของงานเสมือน [13] และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [14]

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาพฤติกรรมการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำรูปทรงกลมสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร
2. เพื่อศึกษาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้าง อัตราส่วนโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวต่อค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้าง และอัตราส่วนแรงค้ำภายในเริ่มต้นต่อค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำรูปทรงกลมสำหรับบรรจุของเหลว

สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

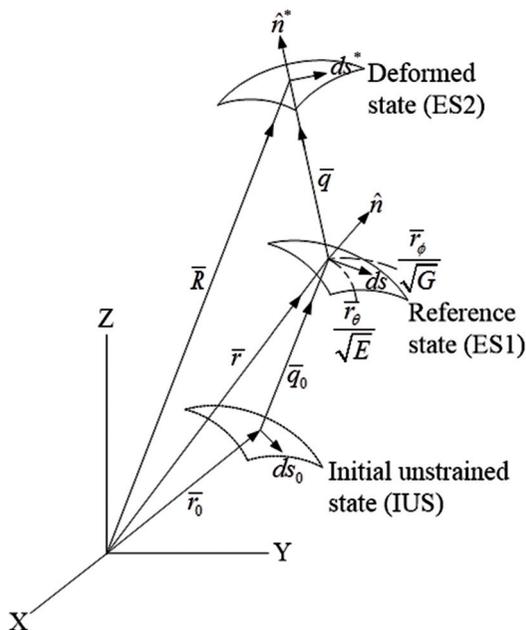
1. วัสดุของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำมีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linearly Elastic Material)
2. ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำจะมีค่าคงที่โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสียรูป

แบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัด

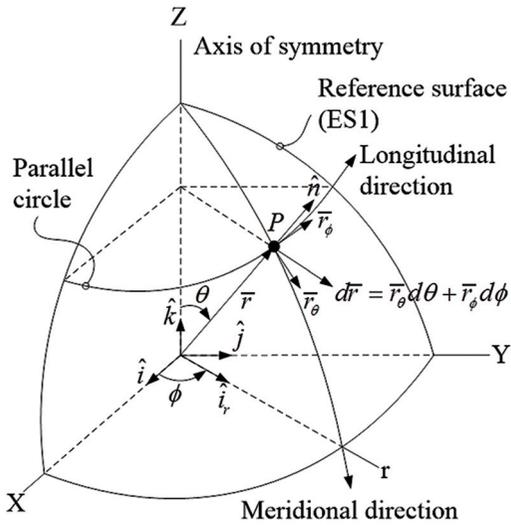
พิจารณาสถานะพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัดทั้ง 3 สถานะ ดังแสดงในรูปที่ 1 จะเห็นได้ว่าที่สถานะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียด (Initial Unstrained State, IUS) จะเป็นสถานะที่โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัดไม่ได้บรรจุของเหลวจึงปราศจากค่าความเครียดใด ๆ จากนั้นเมื่อโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัดถูกบรรจุของเหลวภายในเต็มและค่าแรงดันภายในที่เกิดขึ้นจากของเหลวมีค่าคงที่ สถานะดังกล่าวนี้จะเรียกว่าสถานะอ้างอิง (Reference State, ES1) ซึ่งจะสามารถคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างได้โดยที่ค่าความเครียดเริ่มต้นและระยะการเสียรูปที่สถานะนี้จะมีค่าน้อย สามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ที่โครงสร้างเปลือกบางแบบดั้งเดิม (Traditional Shell Analysis) [15] และสุดท้ายคือสถานะการเสียรูป (Deformed State, ES2) ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัดที่บรรจุของเหลวภายใต้แรงกระทำจากภายนอก

1. รูปแบบพื้นฐานของพื้นผิว

กำหนดให้ (X, Y, Z) เป็นระบบพิกัดฉาก และ (i, j, k) เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแนวแกนในระบบพิกัดฉากดังแสดงในรูปที่ 2 โดยที่พื้นผิวอ้างอิง (ES1) ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัดรูปทรงกลมที่มีค่าความยาวของรัศมี a สามารถนิยามได้ด้วยสมการ $X = X(\theta, \phi)$, $Y = Y(\theta, \phi)$ และ $Z = Z(\theta, \phi)$ เมื่อ θ และ ϕ คือ ค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิว (Surface Parameters) ที่วัดตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและลองจิจูด ตามลำดับ



รูปที่ 1 เวกเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัด



รูปที่ 2 พื้นผิวอ้างอิงของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำ

สำหรับกรณีที่พื้นผิวมีความสมมาตรตามแนวแกนจะเกิดการเปลี่ยนแปลงเฉพาะเส้นเมริเดียนเท่านั้น ดังนั้น กำหนดให้ $\vec{r} = \vec{r}(\phi, \theta)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวอ้างอิงที่จุด P ซึ่งจะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (1) - (4)

$$\vec{r}(\phi, \theta) = X(\theta, \phi)\hat{i} + Y(\theta, \phi)\hat{j} + Z(\theta, \phi)\hat{k} \tag{1}$$

โดยที่

$$X(\theta, \phi) = a \sin \theta \cos \phi \tag{2}$$

$$Y(\theta, \phi) = a \sin \theta \sin \phi \tag{3}$$

$$Z(\theta, \phi) = a \cos \theta \tag{4}$$

สำหรับผลรวมเชิงอนุพันธ์ของความยาวชิ้นส่วน $\vec{r}(\phi, \theta)$ สามารถทำได้ดังสมการที่ (5)

$$d\vec{r} = \vec{r}_\theta d\theta + \vec{r}_\phi d\phi \tag{5}$$

ในที่นี้ตัวห้อย θ และ ϕ แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำ จากหลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) จะได้รูปแบบพื้นฐานอันดับหนึ่ง (First Fundamental Form) ของพื้นผิวอ้างอิง ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (6)

$$d\bar{r} \cdot d\bar{r} = Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\phi + Gd\phi^2 \quad (6)$$

โดยที่ E, F และ G คือค่าส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ (Metric Tensor) ที่พื้นผิวอ้างอิง ซึ่งมีค่าดังสมการที่ (7) - (9)

$$E = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\theta = a^2 \quad (7)$$

$$F = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\phi = 0 \quad (8)$$

$$G = \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}_\phi = a^2 \sin^2 \theta \quad (9)$$

กำหนดให้ \hat{n} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวอ้างอิงจะสามารถหาได้ดังสมการที่ (10)

$$\hat{n} = \frac{\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi}{D} = \sin \theta \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (10)$$

โดยที่ $D = |\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi| = \sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin \theta$ เนื่องจาก $d\hat{n} = \hat{n}_\theta d\theta + \hat{n}_\phi d\phi$ ดังนั้นจะได้ว่ารูปแบบพื้นฐานอันดับสอง (Second Fundamental Form) ของพื้นผิวอ้างอิงจะสมการที่ (11)

$$-d\bar{r} \cdot d\hat{n} = ed\theta^2 + 2fd\theta d\phi + gd\phi^2 \quad (11)$$

โดยที่ e, f และ g คือ ค่าส่วนประกอบของเมตริกซ์ความโค้ง (Metric Curvature) ที่พื้นผิวอ้างอิง ซึ่งมีค่าดังสมการที่ (12) - (14)

$$e = \bar{r}_{\theta\theta} \cdot \hat{n} = -a \quad (12)$$

$$f = \bar{r}_{\theta\phi} \cdot \hat{n} = 0 \quad (13)$$

$$g = \bar{r}_{\phi\phi} \cdot \hat{n} = -a \sin^2 \theta \quad (14)$$

ดังนั้นค่าความโค้งหลัก (Principal Curvatures) ของพื้นผิวอ้างอิง จะสามารถหาได้จากสมการที่ (15)

$$\kappa = \frac{ed\theta^2 + 2fd\theta d\phi + gd\phi^2}{Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\phi + Gd\phi^2} \quad (15)$$

ในกรณีของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่มีความสมมาตรตามแนวแกนจะพบว่าเส้นโค้งหลักจะซ้อนทับกับเส้นพิกัด แสดงว่าค่า $F = f = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (15) จะได้ค่าความโค้งหลักดังนี้คือ $\kappa_1 = \kappa_2 = -1/a$

2. การเสีयरูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำ

เมื่อโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำเกิดการเสีयरูปร่างจะทำให้พื้นผิวอ้างอิงเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งใหม่ที่เวลา t ใด ๆ ดังแสดงในรูปที่ 2 ดังนั้นเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง $\bar{R} = \bar{R}(\phi, \theta, t)$ บนพื้นผิวที่เกิดการเสีयरูปร่าง (ES2) โดยอ้างอิงจากตำแหน่งของเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง $\bar{r} = \bar{r}(\phi, \theta)$ บนพื้นผิวที่อ้างอิงที่ตำแหน่งเดียวกันดังสมการที่ (16)

$$\bar{R}(\phi, \theta, t) = \bar{r}(\phi, \theta) + \bar{q}(\phi, \theta, t) \tag{16}$$

เมื่อ $\bar{q} = \bar{q}(\phi, \theta, t)$ คือเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ที่ขึ้นกับเวลา t ใด ๆ ซึ่งมีค่าดังสมการที่ (17)

$$\bar{q}(\phi, \theta, t) = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}u + \frac{\bar{r}_\phi}{\sqrt{G}}v + \hat{n}w \tag{17}$$

เมื่อ u, v และ w คือ ค่าการเสีयरูปร่างตามแนวเส้นเมอร์ริเดียน แนวเส้นลองจิจูด และแนวค้ำฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ แต่เนื่องจากเป็นปัญหาของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่มีความสมมาตรตามแนวแกน ดังนั้นเทอมของ $(\bar{r}_\phi/\sqrt{G})v$ ในสมการที่ (17) จะมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับค่าความเร็วและความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำจะสามารถหาได้โดยการอนุพันธ์สมการที่ (17) เทียบกับเวลาจะได้สมการที่ (18) - (19)

$$\bar{V} = \dot{\bar{R}}(\phi, \theta, t) = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}\dot{u} + \frac{\bar{r}_\phi}{\sqrt{G}}\dot{v} + \hat{n}\dot{w} \tag{18}$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}}(\phi, \theta, t) = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}\ddot{u} + \frac{\bar{r}_\phi}{\sqrt{G}}\ddot{v} + \hat{n}\ddot{w} \tag{19}$$

กำหนดให้ $A = \sqrt{E}$ และ $B = \sqrt{G}$ ดังนั้น \bar{R}_θ และ \bar{R}_ϕ จากสมการที่ (16) จะสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (20) - (21)

$$\bar{R}_\theta = \left(A + u_\theta - \frac{e}{A}w \right) \frac{\bar{r}_\theta}{A} + \left(\frac{e}{A}u + w_\theta \right) \hat{n} \tag{20}$$

$$\bar{R}_\phi = \left(B + \frac{B_\theta}{A}u - \frac{g}{B}w \right) \frac{\bar{r}_\phi}{B} \tag{21}$$

สำหรับส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ของพื้นผิวที่เสียรูปสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (22) - (24)

$$E^* = \left(A + u_\theta - \frac{e}{A} w \right)^2 + \left(\frac{e}{A} u + w_\theta \right)^2 \quad (22)$$

$$F^* = 0 \quad (23)$$

$$G^* = \left(B + \frac{B_\theta}{A} u - \frac{g}{B} w \right)^2 \quad (24)$$

3. ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป

เมื่อพิจารณาความยาวชิ้นส่วนใด ๆ ที่มีระยะ ds_0 ในสภาวะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียด และ ds^* ในสภาวะการเสียรูป ดังนั้นค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเสียรูป ตามนิยามความเครียดแบบโททอลลากรองจ์ (Total Lagrangian Strains) เขียนได้ดังสมการที่ (25) - (27)

$$\varepsilon^L = \varepsilon_0 \frac{ds^2}{ds_0^2} + \varepsilon \frac{ds^2}{ds_0^2} \quad (25)$$

โดยที่

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \frac{(ds)^2 - (ds_0)^2}{(ds)^2} \quad (26)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{(ds^*)^2 - (ds)^2}{(ds)^2} \quad (27)$$

สำหรับกรณีของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัดแบบสมมาตรตามแนวแกนจะพบว่าค่าความเครียดเฉือน (Shearing Strains) จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นค่าความเครียดเริ่มต้นแบบออยเลอร์ (Initial Eulerian Strains) ที่แสดงไว้ในสมการที่ (26) จะสามารถนิยามได้ในเทอมของเมตริกซ์เทนเซอร์ดังสมการที่ (28) - (29)

$$\varepsilon_{0\theta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \quad (28)$$

$$\varepsilon_{0\phi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{G_0}{G} \right) \quad (29)$$

โดยที่ E_0, F_0 และ G_0 คือ ค่าส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ (Metric Tensor) ที่สถานะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียดโดยที่ค่า $F_0 = 0$ เนื่องจากเป็นโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำแบบสมมาตร ดังนั้นจะเห็นได้จากสมการที่ (30)

$$D_0 = \sqrt{E_0 G_0} = D \sqrt{(1 - 2\varepsilon_{0\theta})(1 - 2\varepsilon_{0\phi})} \quad (30)$$

สำหรับค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้น (Added Strains) ที่แสดงไว้ในสมการที่ (27) จะสามารถนิยามในเทอมของเมตริกซ์เทนเซอร์ ดังสมการที่ (31) - (32)

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{E^*}{E} - 1 \right) \quad (31)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{G^*}{G} - 1 \right) \quad (32)$$

เมื่อแทนค่าจากสมการที่ (22) - (24) ลงไปในสมการที่ (31) - (32) จะได้สมการสำหรับการคำนวณหาค่าความเครียด โดยจะพิจารณาเฉพาะเทอมของค่าการเสียรูปแบบเชิงเส้นเท่านั้น ดังสมการที่ (33) - (37)

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{A} u_\theta - \frac{e}{E} w = [L_1] \{g\} \quad (33)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{B_\theta}{D} u - \frac{g}{G} w = [L_2] \{g\} \quad (34)$$

โดยที่

$$[g] = [u \quad w \quad u_\theta \quad w_\theta] \quad (35)$$

$$[L_1] = [0 \quad -e/E \quad 1/A \quad 0] \quad (36)$$

$$[L_2] = [B_\theta/D \quad -g/G \quad 0 \quad 0] \quad (37)$$

ดังนั้นค่าความเครียดแบบโททอลลากรองจ์ในสมการที่ (25) จะสามารถเขียนได้ในรูปแบบเมตริกซ์ดังสมการที่ (38)

$$\{\varepsilon^L\} = [T] (\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}) \quad (38)$$

เมื่อ $[T]$ คือ เมตริกซ์ในแนวทแยงระหว่างชิ้นส่วนกับวัสดุ (Diagonal Material-Element Matrix) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (39)

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-2\varepsilon_{0\theta}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2\varepsilon_{0\phi}} \end{bmatrix} \quad (39)$$

4. พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด

พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นทั่วไปสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (40) - (41)

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{\varepsilon^L\}^T [C'] \{\varepsilon^L\} h D_0 d\phi d\theta \quad (40)$$

โดยที่

$$[C'] = \frac{E'}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

เมื่อ $[C']$ คือ เมตริกซ์คุณสมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด h คือ ความหนาของโครงสร้าง E' คือ โมดูลัสยืดหยุ่น และ ν คือ อัตราส่วนปัวส์ซอง ดังนั้นเมื่อแทนค่าสมการที่ (30) (38) และ (41) ลงในสมการที่ (40) จะได้สมการที่ (42) - (43)

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} (\{\varepsilon_0\}^T + \{\varepsilon\}^T) [C] (\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}) d\theta \quad (42)$$

โดยที่

$$[C] = 2\pi [T]^T [C'] [T] h D_0 \quad (43)$$

จากสมการที่ (42) สามารถจัดรูปใหม่ ซึ่งจะทำให้ได้ค่าการแปรผันของพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดดังสมการที่ (44) - (46)

$$\delta U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{g\}^T (\{\tilde{c}\} + [\tilde{k}]\{g\}) d\theta \quad (44)$$

โดยที่

$$\{\tilde{c}\} = \begin{bmatrix} [L_1] \\ [L_2] \end{bmatrix}^T [C] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_{0\theta}\} \\ \{\varepsilon_{0\phi}\} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

$$[\tilde{k}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} \{L_i\} \{L_j\}^T \quad (46)$$

5. พลังงานความเครียดของของเหลวที่บรรจุ

พลังงานความเครียดของของเหลวที่บรรจุสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (47)

$$\Gamma = \frac{1}{2} k_0 \left[\frac{\Delta V_{0w} + \Delta V}{V_{0w}} \right]^2 V_{0w} \quad (47)$$

เมื่อ k_0 คือ โมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว (Bulk Modulus) V_{0w} คือ ปริมาตรของของเหลวที่สถานะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียด ΔV_{0w} คือ การเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของเหลวภายในที่บรรจุจากสถานะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียดไปยังสถานะอ้างอิง และ ΔV คือ การเปลี่ยนแปลงปริมาตรภายในของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดกับปริมาตรของของเหลวภายในที่บรรจุจากสถานะอ้างอิงไปยังสถานะการเสียรูป ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (48)

$$\Delta V = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} (\bar{R}_\theta \times \bar{R}_\phi \cdot \bar{R} - \bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}) d\phi d\theta \quad (48)$$

แทนค่าสมการที่ (1) และ (16) ลงในสมการที่ (48) จากนั้นจัดรูปใหม่จะได้ค่าการแปรผันของการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดกับปริมาตรของของเหลวภายในที่บรรจุ ดังสมการที่ (49)

$$\delta(\Delta V) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta\{g\}^T \{\tilde{v}\} d\theta \quad (49)$$

เมื่อ $[\tilde{v}] = [\tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \tilde{v}_3 \quad \tilde{v}_4]$ คือ เวกเตอร์ของการเปลี่ยนแปลงปริมาตร โดยจะพิจารณาเฉพาะเทอมของค่าการเสียรูปแบบเชิงเส้นเท่านั้น ดังสมการที่ (50) - (53)

$$\tilde{v}_1 = \frac{2\pi}{3} \left(B_\theta (\bar{r} \cdot \hat{n}) - \frac{Be}{A^2} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) \right) \quad (50)$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{Ag}{B} (\bar{r} \cdot \hat{n}) - \frac{Be}{A} (\bar{r} \cdot \hat{n}) + AB \right) \quad (51)$$

$$\tilde{v}_3 = \frac{2\pi}{3} (B(\bar{r} \cdot \hat{n})) \quad (52)$$

$$\tilde{v}_4 = \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{B}{A} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) \right) \quad (53)$$

จากสมการที่ (47) จะได้ค่าการแปรผันของพลังงานความเครียดของของเหลวที่บรรจุ
 ดังสมการที่ (54)

$$\delta\Gamma = k_0 \left[\frac{\Delta V_{0w} + \Delta V}{V_{0w}} \right] \delta(\Delta V) \quad (54)$$

กำหนดให้ค่าแรงดันภายในที่สภาวะอ้างอิง (p_0) เป็นสัดส่วนเชิงเส้นกับค่าความเครียดเชิงปริมาตร
 ดังความสัมพันธ์ $p_0 = -k_0(\Delta V_{0w}/V_{0w})$ และแทนค่าลงในสมการที่ (54) จะได้ดังสมการที่ (55)

$$\delta\Gamma = -(p_0 + \lambda)\delta(\Delta V) \quad (55)$$

เมื่อ $\lambda = -k_0(\Delta V/V_{0w})$ เป็นค่าการปรับเปลี่ยนแรงดันภายในจากสภาวะอ้างอิงไปยัง
 สภาวะการเสียรูป จากความสัมพันธ์ของค่า p_0 และ λ จะได้เงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร
 ดังสมการที่ (56)

$$\Delta V + \frac{V}{k_0 - p_0} \lambda = 0 \quad (56)$$

เมื่อ V คือ ปริมาตรของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัตที่สภาวะอ้างอิง ในกรณีเป็นโครงสร้าง
 เปลือกบางไร้แรงคัตรูปทรงกลมที่มีค่าความยาวของรัศมี a จะมีค่าดังสมการที่ (57)

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (a^3 \sin \theta) d\theta \quad (57)$$

6. งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัต

งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัต ซึ่งจะสามารถคำนวณได้
 จากสมการที่ (58)

$$\delta I = -2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho_s \ddot{u} \{\delta u\} + \rho_s \ddot{w} \{\delta w\}) h D d\theta \quad (58)$$

เมื่อ ρ_s คือ ความหนาแน่นของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัต \ddot{u} และ \ddot{w} คือ
 องค์ประกอบสำหรับเวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้างเปลือกบาง

7. ผลรวมของงานเสมือน

ผลรวมของงานเสมือนของระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัตสำหรับบรรจุของเหลว
 ที่สภาวะสมดุล นั่นคือ $\delta\pi = 0$ จะสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (59)

$$\delta U + \delta\Gamma - \delta I = 0 \quad (59)$$

แทนค่าจากสมการที่ (44) (49) (55) และ (58) ลงในสมการที่ (59) จะได้สมการที่ (60)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta\{g\}^T (\{\tilde{c}\} - (p_0 + \lambda)\{\tilde{v}\} + [\tilde{k}]\{g\})d\theta + 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho_s \ddot{u}\{\delta u\} + \rho_s \ddot{w}\{\delta w\})hDd\theta = 0 \quad (60)$$

จากสมการที่ (60) จะได้ว่าโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำค้ำที่บรรจุของเหลวจะสมดุลที่สภาวะอ้างอิง นั่นคือ λ และ $\{g\}$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้สมการที่ (61)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta\{g\}^T (\{\tilde{c}\} - p_0\{\tilde{v}\})d\theta = 0 \quad (61)$$

เงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นจะต้องเป็นจริงและใช้ในการหาค่าความเครียดเริ่มต้น (ϵ_0)

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะต้องทำการแบ่งโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำค้ำออกเป็นชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิทัก θ ดังแสดงในรูปที่ 3 ดังนั้นเมื่อพิจารณาชิ้นส่วนใด ๆ จะได้ว่าค่าการประมาณการเคลื่อนที่ ณ จุดต่าง ๆ บนชิ้นส่วนย่อยสามารถทำได้โดยการกำหนดค่าให้แต่ละจุดหัวของชิ้นส่วนย่อย มีดีกรีอิสระเท่ากับ 4 และใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่สาม (Cubic Polynomial) เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่เพื่อหาฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Functions) และประมาณค่าการเสียรูปในแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน u และ w ดังสมการที่ (62)

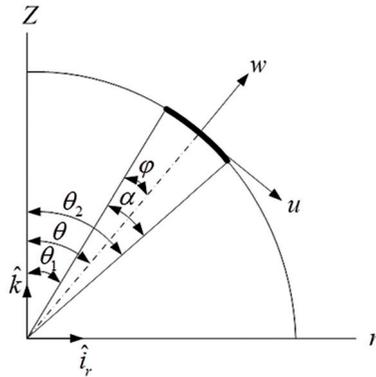
$$\{g\} = [\psi]\{d\} \quad (62)$$

เมื่อ $\{g\}$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ $[\psi]$ คือ เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม และ $\{d\}$ คือ เวกเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (63)

$$\{d\} = \{u(0) \ w(0) \ u_\theta(0) \ w_\theta(0) \ u(\alpha) \ w(\alpha) \ u_\theta(\alpha) \ w_\theta(\alpha)\}^T \quad (63)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าสมการที่ (62) ลงไปในสมการที่ (60) จะสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (64)

$$\{\delta d\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T (\{\tilde{c}\} - (p_0 + \lambda)\{\tilde{v}\})d\theta + \{\delta d\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T [\tilde{k}][\psi]d\theta \{d\} + 2\pi\{\delta u\}^T \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_u\} \rho_s \{\psi_u\}^T hDd\theta \right) + 2\pi\{\delta w\}^T \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_w\} \rho_s \{\psi_w\}^T hDd\theta \right) = 0 \quad (64)$$



รูปที่ 3 ชิ้นส่วนทั่วไปและระยะพิกัด

เนื่องจากดีกรีอิสระเฉพาะที่ (Local Degree of Freedom) $\{d\}$ เหมือนกับดีกรีอิสระรวม (Global Degree of Freedom) $\{D\}$ ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงคัดสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (64) ซึ่งจะแสดงได้ดังสมการที่ (65)

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} + \{C\} - (p_0 + \lambda)\{V\} = \{0\} \quad (65)$$

จากสมการที่ (56) จะได้สมการเงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร ดังสมการที่ (66)

$$\{D\}^T \{V\} + \frac{V}{k_0 - p_0} \lambda = 0 \quad (66)$$

จากสมการที่ (65) และ (66) จะสามารถเขียนรวมได้ในรูปเมทริกซ์สมมาตรดังสมการที่ (67)

$$[\tilde{M}]\{\ddot{D}\} + [\tilde{K}]\{D\} = \{\tilde{F}\} \quad (67)$$

เมื่อ $[\tilde{M}]$ คือ เมทริกซ์มวลของโครงสร้าง (Global Mass Matrix), $[\tilde{K}]$ คือ เมทริกซ์ stiffness ของโครงสร้าง (Global Stiffness Matrix), $\{\tilde{F}\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงรวม (Total Force Vector), $\{D\}$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ของโครงสร้าง (Global Displacement Vector) และ $\{\ddot{D}\}$ คือ เวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้าง (Global Acceleration Vector) ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (68) - (71)

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} [M] & | & \{0\} \\ \hline \{0\}^T & | & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$[\tilde{K}] = \left[\begin{array}{c|c} [K] & -\{V\} \\ \hline -\{V\}^T & -V/(k_0 - p_0) \end{array} \right] \quad (69)$$

$$[\tilde{F}] = \left\{ \begin{array}{c} p_0\{V\} - \{C\} \\ \hline 0 \end{array} \right\} \quad (70)$$

$$[D] = \left\{ \begin{array}{c} D_i \\ - \\ \lambda \end{array} \right\}, \{ \ddot{D} \} = \left\{ \begin{array}{c} \ddot{D}_i \\ - \\ 0 \end{array} \right\} \quad (71)$$

สำหรับการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำสำหรับบรรจุของเหลวสามารถกระทำได้โดยกำหนดให้ $\{ \tilde{F} \}$ มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะเป็นการสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำสำหรับบรรจุของเหลว ดังนั้นสมการที่ (68) จะสามารถเขียนใหม่เป็นสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation) ได้ดังสมการที่ (72)

$$[[\tilde{K}] - \omega_n^2 [\tilde{M}]] = 0 \quad (72)$$

ซึ่งเป็นปัญหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue Problem) โดยที่ค่า ω_n คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ของโครงสร้าง และเนื่องจากเป็นปัญหาที่มีความสมมาตรตามแนวแกน ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งปลายบนสุดและล่างสุดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำจะมีค่าดังสมการที่ (73) - (74)

$$u = 0 \quad (73)$$

$$w_\theta = 0 \quad (74)$$

ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ในการนำเสนอสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการศึกษาพฤติกรรมการสั่นแบบอิสระที่มีความสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่บรรจุของเหลวโดยอาศัยหลักการของทฤษฎีโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่องสำหรับการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไร้เชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำในงานวิจัยของ Huang T. et al. [16], Yeh H.L. et al. [17] และ Jiammeepreecha W. et al. [18] - [19]

1. การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการวิเคราะห์การสั่นแบบอิสระที่มีความสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำรูปทรงกลมที่มีความยาวรัศมี $a = 3$ เมตร และความหนา $h = 0.03$ เมตร สำหรับคุณสมบัติของวัสดุ ได้แก่ ค่าความหนาแน่น $\rho_s = 7670$ กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น $E' = 180 \times 10^9$ นิวตันต่อตารางเมตร และค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง $\nu = 1/3$ สำหรับกรณีของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่บรรจุของเหลวชนิดบีบอัดตัวไม่ได้ ($k_0 = \infty$) จะมีค่าแรงค้ำภายในเริ่มต้นที่เกิดจากของเหลวที่บรรจุ คือ $p_0 = 1 \times 10^7$ นิวตันต่อตารางเมตร ซึ่งผลที่ได้จากการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่ไม่ได้บรรจุของเหลวและบรรจุของเหลวจะแสดงในตารางที่ 1 โดยใช้จำนวนชิ้นส่วนย่อยเท่ากับ 48 ชิ้นส่วน ซึ่งจะพบว่ามีค่ามากกว่างานวิจัยของ Kalnins A. [2] ซึ่งเป็นการศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน สำหรับการเปรียบเทียบโหมดการสั่นจะพบว่าสอดคล้องกับงานวิจัยของ Duffey T.A. et al. [6] โดยที่โหมดการสั่นที่ $n = 0$ จะเป็นโหมดที่ประกอบไปด้วย การสั่นตามแนวเส้นรัศมี (Radial Vibration) บางครั้งเรียกว่า เป็นโหมดการสั่นพื้นฐานสำหรับถังรับแรงดันรูปทรงกลม (Spherical Vessel) ส่วนโหมดการสั่นที่ $n = 1$ จะเป็นโหมดการเคลื่อนที่แบบไม่มีการเสียรูป (Rigid Body Mode) จึงมีค่าความถี่ธรรมชาติเป็นศูนย์ และโหมดการสั่นที่ $n = 5$ จะไม่นำมาพิจารณาในการศึกษารั้งนี้ เนื่องจากเป็นโหมดการสั่นแบบไม่สมมาตรตามแนวแกน (Non-Axisymmetric Mode) สำหรับการเปรียบเทียบโหมดการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนในสามโหมดแรกจะแสดงในรูปที่ 4 ซึ่งจะพบว่ามีโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่บรรจุของเหลวที่ได้จากงานวิจัยนี้จะตรงกับโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางที่ไม่ได้บรรจุของเหลวสอดคล้องกับงานวิจัยของ Duffey T.A. et al. [6] แต่จะมีค่าที่แตกต่างกันตรงบริเวณชิ้นส่วนปลายบนสุดและล่างสุด เนื่องจากผลของความแข็งแแกร่งในทอมของแรงค้ำ (Flexural Rigidity) มีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับโครงสร้างเปลือกบางที่มีผลของแรงค้ำ สำหรับโหมดที่ $n = 4$ จะพบว่าโหมดการสั่นมีความแตกต่างกัน เนื่องจากความแตกต่างกันของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ งานวิจัยของ Duffey T.A. et al. [6] จะใช้ชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางที่พิจารณาผลของแรงในระนาบและแรงค้ำ ในขณะที่งานวิจัยชิ้นนี้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางโดยอาศัยทฤษฎีเมมเบรน (Membrane Theory) ในการวิเคราะห์ปัญหา

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำ

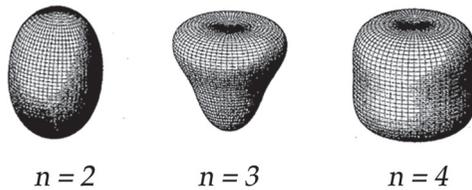
โหมดการสั่น	โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่ไม่ได้บรรจุของเหลว (Hz) [2]	งานวิจัยนี้ (Hz)	ร้อยละความแตกต่าง
$n = 2$	187.34	188.68	0.71
$n = 3$	222.57	225.60	1.36
$n = 4$	236.56	242.03	2.31

จากผลการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงกลมที่บรรจุของเหลวในหัวข้อย่อย 1. จะสามารถทำการศึกษาค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้าง (a/h) อัตราส่วนโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้าง (k_0/E') และอัตราส่วนแรงดันภายในเริ่มต้นต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้าง (p_0/E') ที่ส่งผลกระทบบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติแบบสมมาตรตามแนวแกน (Ω) ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่บรรจุของเหลว ซึ่งสามารถนิยามได้จากสมการที่ (75)

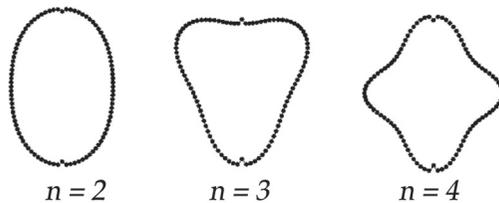
$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho_s \omega_n^2 a^2}{E'}} \quad (75)$$

2. ผลของอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

การเปลี่ยนแปลงความหนาของโครงสร้างจะสามารถทำได้โดยการปรับเปลี่ยนค่าความหนาจากอัตราส่วน (a/h) = 25 ถึง 250 โดยที่ค่าความยาวรัศมีของโครงสร้างไม่เปลี่ยนแปลง เพื่อศึกษาผลของความหนาของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่ส่งผลกระทบบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่บรรจุของเหลว ซึ่งจะพบว่าค่าความถี่ของพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติจะมีค่าลดลงเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 5

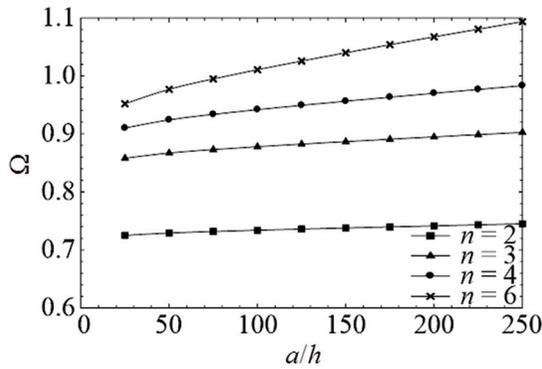


(ก) โครงสร้างเปลือกบางที่ไม่ได้บรรจุของเหลว [6]



(ข) โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่บรรจุของเหลวจากงานวิจัยนี้

รูปที่ 4 การเปรียบเทียบโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงกลม



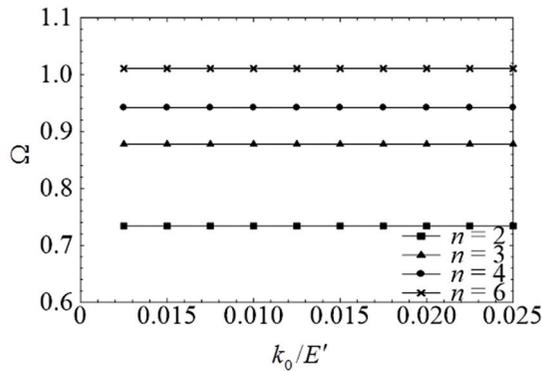
รูปที่ 5 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ

3. ผลของอัตราส่วนโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

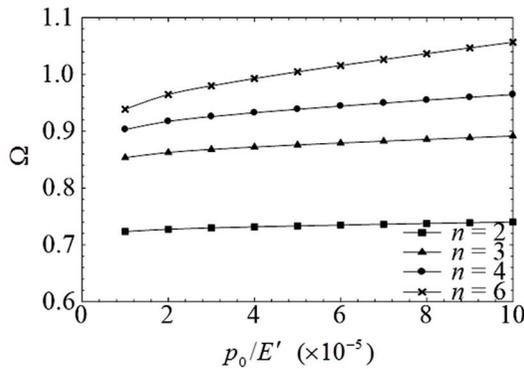
สำหรับการศึกษาผลกระทบของอัตราส่วนโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ จะสามารถทำได้โดยการปรับเปลี่ยนค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวจากอัตราส่วน $(k_0/E') = 0.0025$ ถึง 0.25 โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างไม่มีการเปลี่ยนแปลง ดังแสดงในรูปที่ 6 ซึ่งผลที่ได้จะพบว่า การแปรเปลี่ยนค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวจะไม่ส่งผลกระทบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำที่บรรจุของเหลว

4. ผลของอัตราส่วนแรงดันภายในเริ่มต้นต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ

สำหรับการศึกษาค่าพารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อการสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำรูปทรงกลมที่บรรจุของเหลวในส่วนสุดท้ายนี้ จะทำการศึกษาผลของอัตราส่วนแรงดันภายในเริ่มต้นต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติ โดยการเปลี่ยนแปลงค่าแรงดันภายในเริ่มต้นที่เกิดจากของเหลวที่บรรจุจากอัตราส่วน $(p_0/E') = 1 \times 10^{-5}$ ถึง 1×10^{-4} เมื่อค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างไม่มีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งจะพบว่าผลที่ได้จะคล้ายกับการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้าง นั่นคือ ค่าความถี่ของพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติจะมีค่าลดลงเมื่อค่าอัตราส่วนแรงดันภายในเริ่มต้นต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 6 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ



รูปที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนแรงดันภายในเริ่มต้นต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ

บทสรุป

การศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนสำหรับโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงกลมที่บรรจุของเหลว แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นโครงสร้างเปลือกบางโดยอาศัยทฤษฎีเมมเบรนในการวิเคราะห์ ซึ่งเป็นทฤษฎีที่มีความเหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของโครงสร้างเปลือกบางที่มีความหนาแน่นน้อยมากหรือที่เรียกว่าโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด โดยสามารถเขียนปัญหาในรูปแบบการแปรผันและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการจำลองโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดด้วยชิ้นส่วนคานแบบ 1 มิติ ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่เป็นปัญหาแบบค่าเจาะจง จากผลการศึกษาสามารถสรุปได้ว่า

1. การวิเคราะห์การสั่นแบบอิสระของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดจะไม่สามารถคำนวณหาได้โดยตรง เนื่องจากไม่มีผลของพลังงานความเครียดในเทอมของแรงดัด ดังนั้นค่าแรงดันภายในเริ่มต้นที่เกิดขึ้นเนื่องจากของเหลวกับเงื่อนไขการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรจึงเป็นพารามิเตอร์ที่มี

ความสำคัญในการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงค้ำให้ใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางที่มีผลของแรงค้ำ

2. การเปลี่ยนแปลงความหนาของโครงสร้างเปลือกบางกับค่าแรงค้ำภายในเริ่มต้นที่เกิดขึ้นเนื่องจากของเหลวจะส่งผลกระทบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ ในขณะที่การเปลี่ยนแปลงโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวจะไม่มีผลกระทบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณทุนสนับสนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน ที่ได้สนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้นั้นสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

References

- [1] Naghdi P.M. and Kalnins A. (1962). On Vibrations of Elastic Spherical Shells. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 29. No. 1. pp. 65-72
- [2] Kalnins A. (1964). Effect of Bending on Vibration of Spherical Shells. *Journal of the Acoustical Society of America*. Vol. 36. Issue 1. pp. 74-81
- [3] Ross E.W. (1965). Natural Frequencies and Mode Shapes for Axisymmetric Vibration of Deep Spherical Shells. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 32. No. 3. pp. 553-561
- [4] Rand R. and Dimaggio F. (1967). Vibrations of Fluid-Filled Spherical and Spheroidal Shells. *Journal of the Acoustical Society of America*. Vol. 42. No. 6. pp. 1278-1286
- [5] Robertson A.N., Hemez F., Salazar I. and Duffey T.A. (2004). Model Testing Repeatability of a Population of Spherical Shells. Los Alamos National Laboratory. LA-14109, pp. 1-44
- [6] Duffey T.A., Pepin J.E., Robertson A.N., Steinzig M.L. and Kimberly C. (2007). Vibrations of Complete Spherical Shells with Imperfections. *Journal of Vibration and Acoustics*. Vol. 129. No. 3. pp. 363-370
- [7] Artioli E. and Viola E. (2006). Free Vibration Analysis of Spherical Caps Using a G.D.Q. Numerical Solution. *Journal of Pressure Vessel Technology*. Vol. 128. No. 3. pp. 370-378
- [8] Phadke A.C. and Cheung K.F. (2003). Nonlinear Response of Fluid-Filled Membrane in Gravity Waves. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 129. No. 7. pp. 739-750
- [9] Jiammeepreecha W., Chucheepsakul S. and Huang T. (2012). Nonlinear Static Analysis of Deep Water Axisymmetric Half Drop Shell Storage Container with Constrained Volume. In *Proceedings of the Twenty-Second International Offshore and Polar Engineering Conference*. pp. 863-871. Rhodes, Greece

- [10] Jabbarizadeh S. and Karr D.G. (2013). Analytical and Numerical Analyses of Partially Submerged Membranes. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 139. No. 12. pp. 1699-1707
- [11] Jiammeepreecha W., Chucheepsakul A. and Huang T. (2015). Parametric Study of an Equatorially Anchored Deep Water Fluid-Filled Periodic Symmetric Shell with Constraint Volume. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 141. No. 8. pp. 04015019-1-9
- [12] Langhaar H.L. (1964). *Foundations of Practical Shell Analysis*. Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois
- [13] Langhaar H.L. (1962). *Energy Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New York
- [14] Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E. and Witt R.J. (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York
- [15] Flügge W., (1973). *Stresses in Shells*. Springer-Verlag., Berlin
- [16] Huang T., Bisarnsin T., Schachar R.A. and Black T.D. (1988). Corneal Curvature Change Due to Structural Alternation by Radial Keratotomy. *Journal of Biomechanical Engineering*. Vol. 110. No. 3. pp. 249-253
- [17] Yeh H.L., Huang T. and Schachar. R.A. (2000). A Closed Shell Structured Eyeball Model with Application to Radial Keratotomy. *Journal of Biomechanical Engineering*. Vol. 122. No. 5. pp. 504-510
- [18] Jiammeepreecha W., Chucheepsakul A. and Huang T. (2014a). Nonlinear Static Analysis of Deep Water Axisymmetric Spherical Half Drop Shell. *KMUTT Research and Development Journal*. Vol. 37. No. 2. pp. 239-255
- [19] Jiammeepreecha W., Chucheepsakul A. and Huang T. (2014b). Nonlinear Static Analysis of an Axisymmetric Shell Storage Container in Spherical Polar Coordinates with Constraint Volume. *Engineering Structures*. Vol. 68. pp. 111-120