

การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยเกรฟีนเพลตเลทโดยใช้ทฤษฎีการเสีรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง

Free Vibration of Functionally Graded Shells with Graphene Platelets Reinforcement using Improved First-Order Shear Deformation Theory

หทัยกาญจน์ หนันดูญ¹ วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา¹ คมกร ไชยเดชาร^{1*} และ Sunchhorng Roun²
Hathaikan Nandun¹ Weeraphan Jiammeepreecha¹ Komkorn Chaidachatorn^{1*} and Sunchhorng Roun²

Received: April 26, 2026; Revised: June 10, 2026; Accepted: June 26, 2026

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอสมการกึ่งการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยเกรฟีนเพลตเลทโดยใช้ทฤษฎีการเสีรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง การคำนวณหาค่ามอดูลัสยืดหยุ่นประสิทธิผลของวัสดุเมทริกซ์ประเภทโลหะผสมที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาสามารถคำนวณได้โดยใช้แบบจำลองของ Voigt ในขณะที่วัสดุเสริมกำลังด้วยเกรฟีนเพลตเลทนิยามได้จากแบบจำลองไมโครกลศาสตร์ของ Halpin-Tsai สำหรับค่าอัตราส่วนผิวขงและค่าความหนาแน่นประสิทธิผลคำนวณได้จากของการผสมสมการควบคุมสามารถนิยามได้โดยใช้ทฤษฎีการเสีรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง จากนั้นใช้หลักการของแฮมิลตันในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของระบบโครงสร้างเปลือกบาง และใช้กระบวนการหาคำตอบของนาเวียร์ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลข ความถูกต้องของคำตอบที่ได้จากงานวิจัยในครั้งนี้สอดคล้องกับงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตที่ใช้ทฤษฎีการเสีรูปเนื่องจากแรงเฉือนแตกต่างกัน ผลการศึกษาพบว่าโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาเสริมกำลังด้วยเกรฟีนเพลตเลทรูปแบบ B จะให้ค่าความถี่ธรรมชาติสูงสุด เนื่องจากมีปริมาณส่วนผสมส่วนใหญ่ของเกรฟีนเพลตเลทกระจายอยู่ในช่วงผิวบนและผิวล่างสอดคล้องกับค่าการกระจายความเค้นตึงฉากจริงที่เกิดขึ้นของโครงสร้างเปลือกบาง

คำสำคัญ : การสั่นอิสระ; ทฤษฎีการเสีรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง; แบบจำลองไมโครกลศาสตร์; วัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา; สมการกึ่งการวิเคราะห์

¹ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน

² คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม

¹ Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan

² Faculty of Engineering, Siam University

* Corresponding Author, Tel. 08 8592 9040, E - mail: komkorn@rmuti.ac.th

Abstract

This paper presents a semi-analytical formulation for the free vibration of functionally graded shells with graphene platelets reinforcement using improved first-order shear deformation theory. The effective Young's modulus of the functionally graded material (FGM) is determined using Voigt's model, while the effective Young's modulus of the graphene platelet (GPL) reinforcement is predicted by the Halpin-Tsai micromechanical model. Additionally, the effective Poisson's ratio and density are calculated using the rule of mixtures. The governing equations for FGM shells reinforced with GPL are formulated using the improved first-order shear deformation theory (FSDT). The equations of motion are derived using Hamilton's principle, and the numerical solutions are obtained through Navier's method. The present results demonstrate excellent agreement with various shear deformation theories reported in the existing literature. The numerical results indicate that the FGM shells reinforced with GPL pattern B yield the highest natural frequency. This is because the maximum GPL content is distributed near the top and bottom surfaces, where the normal stresses are highest. Furthermore, this GPL distribution effectively satisfies the actual normal stress requirements of the shells.

Keywords: Free Vibration; Functionally Graded Material; Improved First-Order Shear Deformation Theory; Micromechanical Model; Semi-Analytical Formulation

บทนำ

โครงสร้างเปลือกบาง (Shell Structures) เป็นโครงสร้างที่มีการใช้งานกันมาอย่างยาวนานเนื่องจากมีประสิทธิภาพสูงในการต้านทานแรงกระทำในรูปแบบต่าง ๆ และสามารถกำหนดรูปทรงได้ตามวัตถุประสงค์ของการใช้งาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในอุตสาหกรรมที่ต้องใช้ชิ้นส่วนที่มีความซับซ้อนสูง (Zingoni, 2015; Jiammeepreecha, 2017) ดังนั้นการเลือกใช้วัสดุประเภทไอโซทรอปิก (Isotropic Material) อาจมีข้อจำกัดบางประการทำให้ไม่สามารถใช้งานวิศวกรรมขั้นสูงได้ ในปัจจุบันพบว่าการเลือกใช้งานวัสดุเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของโครงสร้างเปลือกบางจะสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การใช้วัสดุเชิงประกอบ (Composite Materials) หรือการใส่วัสดุเสริมกำลังเพื่อเสริมกำลังวัสดุหลัก (Reinforced Materials) เป็นต้น สำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่ทำมาจากวัสดุเชิงประกอบจะสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทหลัก ๆ คือ โครงสร้างเปลือกบางแบบลามิเนต (Laminate Shells) ซึ่งจะประกอบไปด้วยวัสดุแผ่นโค้งซ้อนทับหลายชั้นสลับกัน (Reddy, 2003; Qatu, 2004) และโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา (Functionally Graded Shells) ซึ่งจะเป็นการปรับปรุงคุณภาพโดยการเปลี่ยนเฟสของโลหะไปเป็นเซรามิกแบบต่อเนื่องตลอดความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง (Shen, 2009; Thai and Kim, 2015; Garg et al., 2021) เนื่องจากข้อดีของโลหะ (Metal) จะมีกำลังสูงแต่ทนต่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิสูงได้ต่ำ ในขณะที่เซรามิก (Ceramic) จะมีกำลังต่ำแต่จะทนต่ออุณหภูมิสูงได้ดี ในกรณีของการใส่วัสดุเสริมกำลังในปัจจุบัน ได้แก่ การใส่วัสดุนาโนคาร์บอน (Carbon Nanotubes) และวัสดุแกรฟีนเพลตเลต (Graphene Platelet) (Tjong, 2013; Zhao et al., 2020; Yee and Ghayesh, 2023; Worku and Ayele, 2023)

จากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตพบว่าการเพิ่มประสิทธิภาพของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางมักจะเลือกใช้เพียงแนวทางใดแนวทางหนึ่งเท่านั้น สำหรับการประยุกต์ใช้ทั้งสองแนวทางพร้อมกันก็ถือเป็นแนวทางที่เริ่มเป็นที่นิยมใช้สำหรับงานวิศวกรรมขั้นสูง เช่น งานวิจัยของ Zhao et al. (2024) และ Khalaf and Hasan (2024) ได้เลือกใช้วัสดุเสริมกำลังทั้งท่อนาโนคาร์บอนและแกรฟีนเพลตเลตในการผสมกับวัสดุเมทริกซ์ประเภทอีพอกซีเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของโครงสร้างเปลือกบางให้สูงขึ้น อย่างไรก็ตามการเสริมกำลังประเภทนี้จะเป็นที่นิยมใช้กับงานทางด้านวิศวกรรมโยธา

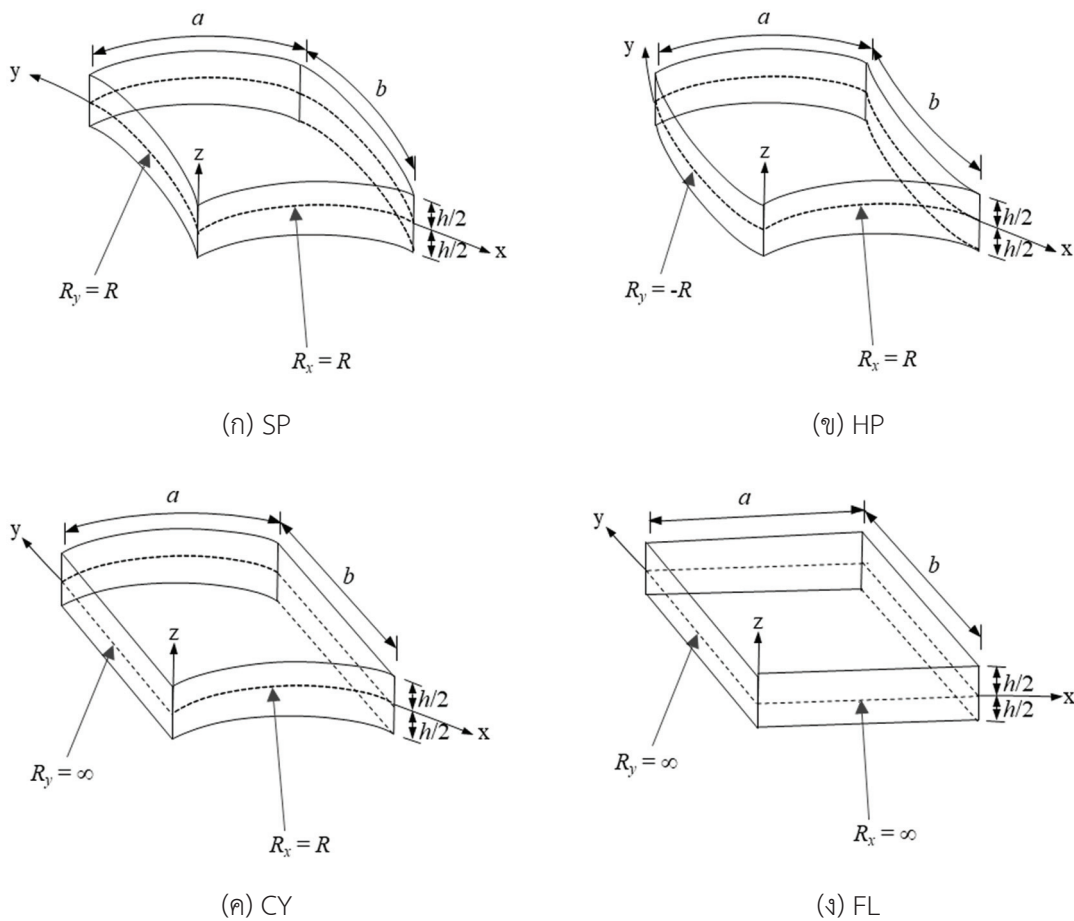
เป็นหลัก ในขณะที่งานทางด้านวิศวกรรมเครื่องกลและการบินจะพบว่าวัสดุเมทริกซ์จะเป็นประเภทโลหะผสม ซึ่งจะมีคุณสมบัติแตกต่างจากวัสดุเมทริกซ์ประเภทอีพอกซีโดยสิ้นเชิง ดังงานวิจัยของ Ansari et al. (2020) โดยใช้โลหะประเภททองแดงเป็นวัสดุเมทริกซ์สำหรับโครงสร้างแผ่นเรียบนาโนคอมโพสิตเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท (FG-GPLRC Nanocomposite Plates) ดังนั้นวัสดุเมทริกซ์ในงานวิจัยนี้จึงมีคุณสมบัติเป็นวัสดุไอโซทรอปิกเทียบเท่ากับกรณีของวัสดุเมทริกซ์ประเภทอีพอกซี จนกระทั่ง Roun et al. (2025) ได้นำเสนอวัสดุเมทริกซ์ประเภทโลหะผสมที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา (Functionally Graded Material) ที่ใช้สำหรับโครงสร้างแผ่นเรียบนาโนคอมโพสิตเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท ซึ่งจะมีกระบวนการผลิตและการวิเคราะห์ที่ยากซับซ้อนมากกว่า แต่จากงานวิจัยในอดีตที่ผ่านมาพบว่ายังไม่มีการศึกษาสำหรับกรณีที่เป็นโครงสร้างเปลือกบาง ซึ่งมีความแตกต่างจากการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นเรียบทั่วไป นั่นคือ จะมีผลของความโค้งหลักเริ่มต้น (Initial Principal Curvature) ในขณะที่ยังมีโครงสร้างแผ่นเรียบจะมีค่าความโค้งหลักเริ่มต้นเป็นศูนย์นั่นเอง

สำหรับวัตถุประสงค์ของบทความนี้คือ การนำเสนอสมการกึ่งการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทโดยใช้ทฤษฎีการเสถียรด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง (Improved FSDT) เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของโครงสร้างเปลือกบางแบบดั้งเดิม การคำนวณหาค่ามอดูลัสยืดหยุ่นประสิทธิผลของวัสดุเมทริกซ์ประเภทโลหะผสมที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา (FGM) จะสามารถคำนวณได้โดยใช้แบบจำลองของ Voigt (Zhao et al., 2020) ในขณะที่วัสดุเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท (GPL) จะนิยามได้จากแบบจำลองไมโครกลศาสตร์ของ Halpin-Tsai (Halpin and Kardos, 1976) สำหรับค่าอัตราส่วนปัวซองและค่าความหนาแน่นประสิทธิผลจะคำนวณได้จากกฎของการผสม (Rule of Mixtures) (Jones, 2018) สมการควบคุม (Governing Equation) สามารถนิยามได้โดยใช้ทฤษฎีการเสถียรด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง (Van Vinh et al., 2022; Benounas et al., 2024) โดยการกำหนดค่าตัวคูณปรับแก้แรงเฉือน (Shear Correction Factor) เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของความเค้นเฉือนจริง (True Shear Stress) เพื่อให้ค่าความเค้นเฉือนที่บริเวณผิวด้านนอกของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเป็นศูนย์ จากนั้นใช้หลักการของแฮมิลตัน (Hamilton's Principle) (Reddy, 2003) ในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ (Equations of Motion) ของระบบโครงสร้างเปลือกบาง และใช้กระบวนการหาคำตอบของนาเวียร์ (Navier's Solution) (Van Vinh and Tounsi, 2022) ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลข (Numerical Results) โดยกำหนดให้ฟังก์ชันการเสถียรของโครงสร้างเปลือกบางสอดคล้องกับเงื่อนไขของจอร์จรับอย่างง่าย

แบบจำลองโครงสร้างเปลือกบาง

พิจารณาโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทขนาดยาว x กว้าง y หนา h เท่ากับ $a \times b \times h$ ดังรูปที่ 1 โดยกำหนดให้บริเวณผิวด้านนอกสุด ($z = h/2$) และด้านในสุด ($z = -h/2$) ของโครงสร้างเปลือกบางจะเป็นวัสดุเซรามิก (Ceramic) และโลหะ (Metal) ตามลำดับ ซึ่งสามารถนิยามการเปลี่ยนแปลงของวัสดุจากโลหะเป็นเซรามิกตลอดความหนาของโครงสร้างโดยใช้กฎการยกกำลัง (Power Law Distribution) ซึ่งจะทำให้ได้ค่าสัดส่วนโดยปริมาตรของเซรามิก (V_1) และโลหะ (V_2) จากนั้นทำการเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท (GPL) โดยพิจารณาจากค่าสัดส่วนโดยปริมาตรของแกรฟีนเฟลตเลท (V_{GPL}) โดยที่ผลรวมของ V_1 , V_2 และ V_{GPL} จะมีค่าเท่ากับหนึ่งเสมอ ในที่นี้การจำแนกประเภทของโครงสร้างเปลือกบางจะสามารถทำได้โดยกำหนดให้ค่าองค์ประกอบของรัศมีความโค้ง (R_x และ R_y) ของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าดังนี้

- 1) $R_x = R_y$ สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม โดยมีอักษรย่อคือ SP ดังรูปที่ 1(ก)
- 2) $R_x = -R_y$ สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงไฮเปอร์โบลิก โดยมีอักษรย่อคือ HP ดังรูปที่ 1(ข)
- 3) $R_y = \infty$ สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกระบอก โดยมีอักษรย่อคือ CY ดังรูปที่ 1(ค)
- 4) $R_x = R_y = \infty$ สำหรับโครงสร้างแผ่นเรียบ โดยมีอักษรย่อคือ FL ดังรูปที่ 1(ง)



รูปที่ 1 โครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท

1. แบบจำลองของวัสดุเมทริกซ์ประเภทโลหะผสมที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา

วัสดุเมทริกซ์ประเภทโลหะผสมที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา (FGM) จะสามารถนิยามการเปลี่ยนเฟสจากโลหะเป็นเซรามิกตลอดความหนาของโครงสร้างโดยใช้กฎการยกกำลัง (Power Law Distribution) ดังสมการที่ (1)

$$V_I(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, V_2(z) = 1 - V_I(z) \quad (1)$$

โดยที่ $-h/2 \leq z \leq h/2$ เมื่อตัวห้อย 1 และ 2 แทนคุณสมบัติของวัสดุเซรามิกและโลหะ ตามลำดับ ในขณะที่ตัวยกกำลัง p คือค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ ดังนั้นจากแบบจำลองของ Voigt (Zhao et al., 2020) จะสามารถคำนวณหาค่ามอดูลัสยืดหยุ่นประสิทธิผล (E_M) และความหนาแน่นประสิทธิผล (ρ_M) ของวัสดุเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (2) และ (3)

$$E_M(z) = (E_I - E_2)V_I(z) + E_2 \quad (2)$$

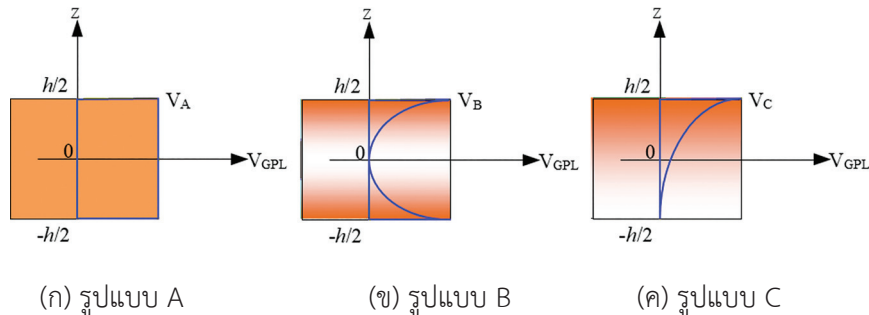
$$\rho_M(z) = (\rho_I - \rho_2)V_I(z) + \rho_2 \quad (3)$$

เมื่อตัวห้อย M คือวัสดุเมทริกซ์ ในกรณีนี้จะกำหนดให้ค่าอัตราส่วนปัวซอง (ν_M) ของวัสดุเซรามิกและโลหะมีค่าเท่ากัน นั่นคือ $\nu_I = \nu_2 = \nu_M$

2. แบบจำลองของวัสดุเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท

รูปที่ 2 แสดงค่าการกระจายตัวของแกรฟีนเฟลตเลท โดยกำหนดให้รูปแบบ A มีค่าการกระจายตัวของแกรฟีนเฟลตเลทสม่ำเสมอ (Uniform Distribution) ตลอดความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง รูปแบบ B เป็นการกระจายตัว

ของแกรฟีนเพลดเลทแบบฟังก์ชัน FG-X โดยจะมีปริมาณการกระจายตัวของแกรฟีนเพลดเลทมากที่สุดที่บริเวณผิวด้านบน และล่างสุด ($z = \pm h/2$) และลดลงเป็นฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine Function) จนกระทั่งมีค่าเป็นศูนย์ที่ตำแหน่งกึ่งกลาง ความหนา ($z = 0$) ของโครงสร้างเปลือกบาง สุดท้ายจะเป็นรูปแบบ C เป็นการกระจายตัวของแกรฟีนเพลดเลทแบบฟังก์ชัน FG-V โดยจะมีปริมาณการกระจายตัวของแกรฟีนเพลดเลทมากที่สุดที่บริเวณผิวด้านบนสุด ($z = h/2$) และลดลงเป็น ฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine Function) จนกระทั่งเป็นศูนย์ที่บริเวณผิวด้านล่างสุด ($z = -h/2$) ของโครงสร้างเปลือกบาง



รูปที่ 2 รูปแบบการกระจายตัวของแกรฟีนเพลดเลทตลอดความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง

จากรูปที่ 2 จะสามารถนิยามค่าสัดส่วนโดยปริมาตร (Volume Fraction) ได้ดังสมการที่ (4)

$$V_{GPL}(z) = V_i(z) \cdot \phi_i(z) \quad (4)$$

ในที่นี้ กำหนดให้ตัวห้อย $i = A, B, C$ แทนด้วยรูปแบบการกระจายตัวของแกรฟีนเพลดเลท A, B, และ C ตามลำดับ และ V_i คือสัดส่วนโดยปริมาตรทั้งหมดของแกรฟีนเพลดเลทสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (5)

$$V_i(z) = \frac{W_{GPL} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho_M(z) dz \right]}{W_{GPL} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho_M(z) \cdot \phi_i(z) dz \right] + \rho_{GPL} (1 - W_{GPL}) \left[\int_{-h/2}^{h/2} \phi_i(z) dz \right]} \quad (5)$$

เมื่อ ρ_{GPL} และ W_{GPL} คือค่าความหนาแน่นและน้ำหนักของแกรฟีนเพลดเลท ในขณะที่ ϕ_i คือฟังก์ชันการกระจายตัวของแกรฟีนเพลดเลท สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (6)

$$\phi_A(z) = 1, \phi_B(z) = 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), \phi_C(z) = 1 - \cos\left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right] \quad (6)$$

จากแบบจำลองไมโครกลศาสตร์ของ Halpin-Tsai (Halpin and Kardos, 1976) จะสามารถคำนวณหา ค่ามอดูลัสยืดหยุ่นประสิทธิผล (E_c) ของวัสดุเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลดเลทได้ดังสมการที่ (7)

$$E_c(z) = \frac{3}{8} \left(\frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}(z)}{1 - \eta_L V_{GPL}(z)} \right) E_M(z) + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}(z)}{1 - \eta_T V_{GPL}(z)} \right) E_M(z) \quad (7)$$

ในที่นี้ กำหนดให้ตัวห้อย c แทนด้วยคุณสมบัติของวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลดเลท ตัวห้อย L และ T แทนด้วยคุณสมบัติของวัสดุตามแนวยาวและแนวขวาง ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ η_L และ η_T จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (8)

$$\eta_L = \frac{(E_{GPL}/E_M) - 1}{(E_{GPL}/E_M) + \xi_L}, \eta_T = \frac{(E_{GPL}/E_M) - 1}{(E_{GPL}/E_M) + \xi_L} \quad (8)$$

เมื่อ E_{GPL} คือค่ามอดูลัสของแกรฟีนเพลตเลท ดังนั้นค่าพารามิเตอร์อัตราส่วนรูปทรงของแกรฟีนเพลตเลท ξ_L และ ξ_T สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (9)

$$\xi_T = 2l_{GPL} / h_{GPL}, \xi_L = 2w_{GPL} / h_{GPL} \quad (9)$$

เมื่อ l_{GPL} , w_{GPL} และ h_{GPL} คือค่าเฉลี่ยของความยาว ความกว้าง และความหนาของแกรฟีนเพลตเลท สำหรับการคำนวณหาค่าอัตราส่วนปัวซอง (ν_c) และค่าความหนาแน่น (ρ_c) ของวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลตเลทจะสามารถคำนวณได้จากกฎของการผสม (Rule of Mixtures) (Jones, 2018) ดังสมการที่ (10) และ (11)

$$\nu_c(z) = \nu_{GPL}V_{GPL}(z) + \nu_M V_M(z) \quad (10)$$

$$\rho_c(z) = \rho_{GPL}V_{GPL}(z) + \rho_M V_M(z) \quad (11)$$

เมื่อ ν_{GPL} และ ρ_{GPL} คือค่าอัตราส่วนปัวซองและความหนาแน่นของแกรฟีนเพลตเลท ทั้งนี้ ค่าสัดส่วนโดยปริมาตร (Volume Fraction) ของวัสดุเมทริกซ์ (V_M) และแกรฟีนเพลตเลท (V_{GPL}) จะมีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (12)

$$V_M(z) + V_{GPL}(z) = 1 \quad (12)$$

3. สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของวัสดุ

ค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางสามารถนิยามได้โดยใช้ทฤษฎีการเสียรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง (Van Vinh et al., 2022; Benounas et al., 2024) ดังสมการที่ (13) - (15)

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \quad (13)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \quad (14)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (15)$$

เมื่อ (u_0, v_0, w_0) คือองค์ประกอบของค่าการเสียรูปตามแนวแกน (x, y, z) ที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนา ($z=0$) และ (φ_x, φ_y) คือค่าการหมุนแนวขวางตามแนวแกน (x, y) โดยมีค่าเท่ากับ $\varphi_x = \partial u / \partial z$ และ $\varphi_y = \partial v / \partial z$ จากสมการที่ (13) - (15) จะสามารถหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเคลื่อนตัว (Strain-Displacement Relations) ได้ดังสมการที่ (16) และ (17)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^I \\ \varepsilon_{yy}^I \\ \gamma_{xy}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R_x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w_0}{R_y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{v_0}{R_y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{u_0}{R_x} + \varphi_x \end{Bmatrix} \quad (17)$$

จากสมการที่ (16) และ (17) จะสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของวัสดุ (Stress–Strain Relations) ได้ดังสมการที่ (18) - (19)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = K_s \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ในที่นี้ (สมการที่ (20))

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}, Q_{12} = Q_{21} = \frac{E(z) \cdot \nu(z)}{1 - \nu(z)^2}, Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2[1 - \nu(z)]} \quad (20)$$

สำหรับค่า K_s คือค่าตัวคูณปรับแก้แรงเฉือน (Shear Correction Factor) ซึ่งโดยทั่วไปตามทฤษฎีการเสียดรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง (FSDT) ค่า K_s จะเป็นค่าคงที่เท่ากับ 5/6 (Van Vinh and Tounsi, 2022) ซึ่งจะพบว่าค่าความเค้นเฉือนจะไม่ถูกต้องเนื่องจากค่าความเค้นเฉือนที่ถูกต้องจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ที่ตำแหน่งผิวบนและล่าง ($z = \pm h/2$) ของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทำการกำหนดค่าตัวคูณปรับแก้แรงเฉือนให้เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของความเค้นเฉือนจริง จากงานวิจัยของ Van Vinh et al. (2022) และ Benounas et al. (2024) ได้กำหนดฟังก์ชันของค่า K_s ดังสมการที่ (21)

$$K_s(z) = \frac{5}{4} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (21)$$

4. สมการการเคลื่อนที่

จากหลักการของแฮมิลตัน (Hamilton's Principle) (Reddy, 2003) จะสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ (Equations of Motion) ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลตเลตโดยใช้ทฤษฎีการเสียดรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งได้ดังสมการที่ (22)

$$\int_0^T (\delta U - \delta K) dt = 0 \quad (22)$$

เมื่อ δU คือค่าการแปรผันของพลังงานความเครียด (Strain Energy) และ δK คือค่าการแปรผันของพลังงานจลน์ (Kinematic Energy) ของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้นค่า δU และ δK สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (23) และ (24)

$$\delta U = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (23)$$

$$\delta K = \int_{\Omega-h/2}^{h/2} \rho(z) (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dz d\Omega \quad (24)$$

จากนั้นทำการแทนค่าสมการที่ (16) และ (17) ลงในสมการที่ (23) และแทนค่าสมการที่ (13) - (15) ลงในสมการที่ (24) ดังนั้นเราจะสามารถนิยามสมการการเคลื่อนที่ที่ดังสมการที่ (25) - (29)

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{Q_{xz}}{R_x} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\phi}_x \quad (25)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{Q_{yz}}{R_y} = I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_y \quad (26)$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - \frac{N_{xx}}{R_x} - \frac{N_{yy}}{R_y} = I_0 \ddot{w}_0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_x \quad (28)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_{yz} = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\phi}_y \quad (29)$$

โดยที่สมการที่ (25) - (29) เป็นสมการการเคลื่อนที่สำหรับการเคลื่อนที่ในทิศทาง $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \phi_x, \delta \phi_y$ ตามลำดับ และ (N_k, M_k, Q_k) คือค่าผลลัพธ์ของความเค้น (Stress Resultants) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (30) - (32)

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) dz \quad (30)$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) z dz \quad (31)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (32)$$

แทนค่าสมการที่ (18) ลงในสมการที่ (30) และ (31) จะสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ดังสมการที่ (33)

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \varepsilon_{xx}^I \\ \varepsilon_{yy}^I \\ \gamma_{xy}^I \end{Bmatrix} \quad (33)$$

ในที่นี้

$$\begin{Bmatrix} A_j \\ B_j \\ D_j \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_j \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (34)$$

โดยที่สมการที่ (34) กำหนดให้ตัวห้อย $j = 11, 12, 22$ และ 66 ตามลำดับ แทนค่าสมการที่ (19) ลงในสมการที่ (32) จะได้ดังสมการที่ (35) และ (36)

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{55} & 0 \\ 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

ในที่นี้

$$\{S_l\} = \int_{-h/2}^{h/2} K_s Q_l dz \quad (36)$$

โดยที่กำหนดให้ตัวห้อย $l = 55$ และ 44 สำหรับค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล (Mass Moment of Inertia) ดังสมการที่ (25) - (29) จะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (37)

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_c(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (37)$$

5. สมการกึ่งการวิเคราะห์

การสร้างสมการกึ่งการวิเคราะห์และการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสามารถทำได้โดยใช้กระบวนการหาคำตอบของนาเวียร์ (Navier's Solution) (Van Vinh and Tounsi, 2022) ในการกำหนดฟังก์ชันการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของจุดรองรับอย่างง่าย (Simply-Supported Condition) ดังสมการที่ (38) - (42)

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (38)$$

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (39)$$

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (40)$$

$$\phi_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (41)$$

$$\phi_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (42)$$

เมื่อ $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = m\pi/a$ และ $\beta = n\pi/b$ โดยที่ $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn})$ คือค่าสัมประสิทธิ์ของการเสียรูปที่ไม่ทราบค่า ถ้ากำหนดให้ $\{q\} = (U_{mn} \ V_{mn} \ W_{mn} \ X_{mn} \ Y_{mn})^T$ และ ω_{mn} คือค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) โดยที่ตัวห้อย (m, n) คือค่าโหมดไอเกน (Eigen Mode) ตามแกน (x, y) จากนั้นทำการแทนค่าสมการที่ (38) - (42) ลงในสมการที่ (16) และ (17) ดังนั้นสมการที่ (25) - (29) จะให้ค่าสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation) ดังสมการที่ (43)

$$([K] - \omega_{mn}^2 [M]) \{q\} = 0 \quad (43)$$

เมื่อ $[K]$ และ $[M]$ คือค่าเมทริกซ์ความแข็งแกร่ง (Stiffness Matrix) และเมทริกซ์มวล (Mass Matrix) ในที่นี้ $k_{ij} = k_{ji}$ และ $m_{ij} = m_{ji}$ โดยที่ $i, j = 1, 2, \dots, 5$ ดังนั้นจะสามารถนิยามค่าสัมประสิทธิ์ได้ดังสมการที่ (44) - (62)

$$k_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 + \frac{S_{55}}{R_x^2} \quad (44)$$

$$k_{12} = k_{21} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \quad (45)$$

$$k_{13} = k_{31} = -\alpha \left(\frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} + \frac{S_{55}}{R_x} \right) \quad (46)$$

$$k_{14} = k_{41} = B_{11}\alpha^2 + B_{66}\beta^2 - \frac{S_{55}}{R_x} \quad (47)$$

$$k_{15} = k_{51} = (B_{12} + B_{66})\alpha\beta \quad (48)$$

$$k_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + \frac{S_{44}}{R_y^2} \quad (49)$$

$$k_{23} = k_{32} = -\beta \left(\frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{22}}{R_y} + \frac{S_{44}}{R_y} \right) \quad (50)$$

$$k_{24} = k_{42} = (B_{12} + B_{66})\alpha\beta \quad (51)$$

$$k_{25} = k_{52} = B_{66}\alpha^2 + B_{22}\beta^2 - \frac{S_{44}}{R_y} \quad (52)$$

$$k_{33} = S_{55}\alpha^2 + S_{44}\beta^2 + \frac{A_{11}}{R_x^2} + \frac{2A_{12}}{R_x R_y} + \frac{A_{22}}{R_y^2} \quad (53)$$

$$k_{34} = k_{43} = \alpha \left(S_{55} - \frac{B_{11}}{R_x} - \frac{B_{12}}{R_y} \right) \quad (54)$$

$$k_{35} = k_{53} = \beta \left(S_{44} - \frac{B_{12}}{R_x} - \frac{B_{22}}{R_y} \right) \quad (55)$$

$$k_{44} = D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + S_{55} \quad (56)$$

$$k_{45} = k_{54} = (D_{12} + D_{66})\alpha\beta \quad (57)$$

$$k_{55} = D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 + S_{44} \quad (58)$$

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = I_0 \quad (59)$$

$$m_{14} = m_{41} = m_{25} = m_{52} = I_1 \quad (60)$$

$$m_{44} = m_{55} = I_2 \quad (61)$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{13} = m_{31} = m_{15} = m_{51} = m_{23} = m_{32} = m_{24} = m_{42} = m_{35} = m_{53} = m_{45} = m_{54} = 0 \quad (62)$$

กระบวนการหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยใช้กระบวนการหาคำตอบของนาเวียร์ (Navier's Solution) จะมีขั้นตอนในการคำนวณดังนี้

ขั้นที่ 1 คำนวณค่า $E_M(z)$ และ $\rho_M(z)$ ของวัสดุเมทริกซ์จากสมการที่ (2) และ (3)

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $E_c(z), \nu_c(z)$, และ $\rho_c(z)$ ของวัสดุเมทริกซ์เสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลตเลทจากสมการที่ (7) (10) และ (11) ตามลำดับ

ขั้นที่ 3 คำนวณค่า $Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{44}, Q_{55}$, และ Q_{66} จากสมการที่ (20)

ขั้นที่ 4 คำนวณค่า A_j, B_j , และ D_j เมื่อตัวห้อย $j = 11, 12, 22$, และ 66 ตามลำดับ จากสมการที่ (34) และคำนวณค่า I_0, I_1 , และ I_2 จากสมการที่ (37)

ขั้นที่ 5 กำหนดค่าโหนดไอแกน m และ n เพื่อคำนวณ k_{ij} และ m_{ij} จะสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (44) - (62)

ขั้นที่ 6 คำนวณค่า ω_{mn} จากสมการที่ (43)

ผลการศึกษา

ในการนำเสนอผลการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลตเลทโดยใช้ทฤษฎีการเสียดรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง และการหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยใช้กระบวนการหาคำตอบของนาเวียร์ (Navier's Solution) สำหรับค่ามอดูลัสยืดหยุ่น อัตราส่วนปัวซอง และความหนาแน่นของวัสดุเมทริกซ์พอลิเมอร์ (Polymer) วัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา (FGM) สำหรับเซรามิกที่ทำจากอะลูมินา (Al_2O_3) และโลหะที่ทำจากอะลูมิเนียม (Al) และสุดท้ายคือ แกรฟีนเพลตเลท (GPL) ที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้จะมีค่าดังตารางที่ 1 โดยที่ขนาดของแกรฟีนเพลตเลท (GPL) ที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ จะมีค่า $w_{GPL} = 1.5$ ไมโครเมตร, $l_{GPL} = 2.5$ ไมโครเมตร และ $h_{GPL} = 1.5$ นาโนเมตร ในกรณีที่ไม่ได้กำหนดเป็นอย่างอื่นจะสามารถคำนวณค่าพารามิเตอร์ความถี่ (Frequency Parameter) ได้ดังสมการที่ (63)

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_1 / E_1} \quad (63)$$

1. การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง จะแบ่งออกเป็น 3 กรณี โดยเริ่มต้นจากการเปรียบเทียบกับค่าพารามิเตอร์ความถี่ (Frequency Parameter) ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา (FGM Shells) โดยที่เซรามิกทำจากอะลูมินา (Al_2O_3) และโลหะทำจากอะลูมิเนียม (Al) มีค่าคุณสมบัติดังตารางที่ 1 ในที่นี้ค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความยาวของโครงสร้างเปลือกบาง (a/R_x) และอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของโครงสร้างเปลือกบาง (a/b) มีค่าเท่ากับ 0.5 และ 1.0 ผลการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองพบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่ ($\bar{\omega}$) ที่ได้จากงานวิจัยนี้มีค่าน้อยกว่างานวิจัยของ Matsunaga (2008) ดังตารางที่ 2 เนื่องจากความแตกต่างของทฤษฎีการเสียดรูปเนื่องจากแรงเฉือนที่แตกต่างกัน โดยงานวิจัยของ Matsunaga (2008) ใช้ทฤษฎีการเสียดรูปชั้นสูงแบบสองมิติ (Two-Dimensional Higher-Order Deformation Theory) อย่างไรก็ตาม ความแตกต่างสูงสุดจะมีค่าไม่เกินร้อยละ 6.836 สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม (SP) เมื่ออัตราส่วน $a/h = 2$ ทั้งนี้ค่าร้อยละความแตกต่างจะมีคาลดลงเมื่ออัตราส่วน a/h มีค่าเพิ่มสูงขึ้นนั่นเอง เนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางมีความหนาน้อย (Thin Shells) จะส่งผลทำให้ความแตกต่างเนื่องจากการคำนวณทั้งสองทฤษฎีคือ ทฤษฎีการเสียดรูปชั้นสูงแบบสองมิติ (Matsunaga, 2008) และทฤษฎีการเสียดรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง (Improved FSDT) มีคาลดลง เพราะผลของความเค้นเฉือนที่มีต่อโครงสร้างมีคาลดลง ในขณะที่เมื่อความหนาของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น จะส่งผลทำให้ค่าการกระจายตัวของค่าความเค้นเฉือนในสมการที่ (35) มีความแตกต่างกันจากทั้งสองทฤษฎี สำหรับผลกระทบของความแตกต่างที่เกิดขึ้นเมื่อเทียบกับงานวิจัยของ Matsunaga (2008) จะพบว่าเมื่อโครงสร้างเปลือกบางมีผลของค่ารัศมีความโค้ง (R_x และ R_y) เพิ่มมากขึ้น จะทำให้ความแตกต่างมีค่าเพิ่มสูงขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม (SP) และรูปทรงไฮเปอร์โบลิก (HP) ในขณะที่โครงสร้างแผ่นเรียบ (FL) ซึ่งจะไม่ส่งผลของค่ารัศมีความโค้ง (R_x และ R_y) ทำให้ค่าความแตกต่างเกิดขึ้นน้อยที่สุดในทุกกรณีของค่าอัตราส่วนความหนา (a/h) ดังตารางที่ 2 ทั้งนี้เนื่องจากค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเคลื่อนตัว (Strain-Displacement Relations) ในสมการที่ (16) และ (17) ไม่ได้พิจารณาผลของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงตื้น (Shallow Shells) ซึ่งจะทำให้ค่ารัศมีความโค้งมีเงื่อนไขแตกต่างกัน

สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลตเลท (FG-GPLRC Shells) กับงานวิจัยของ Wang et al. (2018) จะทำได้โดยการกำหนดให้ค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์

(p) ในสมการที่ (1) มีค่าเป็นศูนย์ จากนั้นทำการกำหนดค่าของวัสดุเซรามิกเป็นวัสดุพอลิเมอร์เสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลท (GPL) ที่มีคุณสมบัติดังตารางที่ 1 ในที่นี้ค่าอัตราส่วน a/R_x และ a/b จะมีค่าเท่ากับ 0.2 และ 1.0 ซึ่งจะพบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่ (ω) มีค่าตรงกับงานวิจัยของ Wang et al. (2018) ยกเว้นในโหมดการสั่นลำดับ (2,2) เมื่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าสูง ($a/h = 5$) มีความแตกต่างกันน้อยมาก ในขณะที่โหมดการสั่นอื่น ๆ จะมีค่าเท่ากัน ดังตารางที่ 3 แม้ว่างานวิจัยของ Wang et al. (2018) จะใช้ทฤษฎีการเสียดรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับสูง (Higher-Order Shear Deformation Theory) ซึ่งจะมีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า 9 ตัว ในขณะที่งานวิจัยนี้ใช้ทฤษฎีการเสียดรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง (Improved FSDT) ซึ่งจะมีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า 5 ตัว ดังนั้นการใช้ทฤษฎีการเสียดรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง (Improved FSDT) จะทำให้การแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ง่ายขึ้น

ตารางที่ 1 คุณสมบัติของวัสดุ

รายการวัสดุ	มอดูลัสยืดหยุ่น (GPa)	อัตราส่วนปัวซอง	ความหนาแน่น (kg/m^3)
พอลิเมอร์ (Polymer)	2.85	0.34	1,200
อะลูมินา (Al_2O_3)	380	0.30	3,800
อะลูมิเนียม (Al)	70	0.30	2,702
แกรไฟีนเพลตเลท (GPL)	1,010	0.186	1,060

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา ($a/R_x = 0.5$ และ $a/b = 1.0$)

a/h	ประเภทโครงสร้าง	ค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดการสั่นพื้นฐาน (1,1)								
		Matsunaga (2008)			งานวิจัยนี้			ความแตกต่าง (%)		
		$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$
2	FL	0.9400	0.8232	0.7476	0.9265	0.8101	0.7333	1.436	1.591	1.913
	SP	0.9527	0.8429	0.7709	0.9291	0.8001	0.7182	2.477	5.078	6.836
	CY	0.9334	0.8213	0.7483	0.9075	0.7882	0.7109	2.775	4.030	4.998
	HP	0.9038	0.7925	0.7202	0.8551	0.7502	0.6807	5.388	5.338	5.485
5	FL	0.2121	0.1819	0.1640	0.2112	0.1808	0.1631	0.424	0.605	0.549
	SP	0.2301	0.2000	0.1819	0.2271	0.1940	0.1749	1.304	3.000	3.848
	CY	0.2153	0.1855	0.1678	0.2123	0.1812	0.1633	1.393	2.318	2.682
	HP	0.2064	0.1770	0.1596	0.1996	0.1710	0.1544	3.295	3.390	3.258
10	FL	0.0578	0.0492	0.0443	0.0577	0.0490	0.0442	0.173	0.407	0.226
	SP	0.0751	0.0657	0.0601	0.0746	0.0646	0.0588	0.666	1.674	2.163
	CY	0.0622	0.0535	0.0485	0.0617	0.0527	0.0477	0.804	1.495	1.649
	HP	0.0563	0.0479	0.0432	0.0548	0.0466	0.0420	2.664	2.714	2.778

สุดท้ายจะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลท (FG Shells with GPL Reinforcement) ซึ่งจะยังไม่มีงานวิจัยที่ทำการศึกษามาก่อน นอกจากงานวิจัยของ Roun et al. (2025) ที่ได้ทำการศึกษาค่าการสั่นอิสระของโครงสร้างแผ่นเรียบทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา เสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลทโดยใช้ทฤษฎีแผ่นเรียบปรับปรุงสี่ตัวแปรไม่ทราบค่าที่มีการพิจารณาฟังก์ชันการเสียดรูปออกเป็น 4 ตัวแปรหลัก ได้แก่ การเคลื่อนที่แนวราบ 2 แนว (u, v) และการเคลื่อนที่แนวตั้งฉากที่พิจารณาผลของแรงเฉือนและแรงดัด (w_s, w_b) โดยที่วัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนากำหนดให้เซรามิกทำจากอะลูมินา (Al_2O_3) โลหะทำจากอะลูมิเนียม (Al) เสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลท

(GPL) มีคุณสมบัติดังตารางที่ 1 พบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติมีค่าใกล้เคียงกับงานวิจัยนี้ดังตารางที่ 4 ซึ่งมีค่าความแตกต่างสูงสุดเท่ากับร้อยละ 0.20 ในโหมดการสั่นลำดับ (2,2) เมื่อความหนาของโครงสร้างแผ่นเรียบมีค่าสูง ($a/h = 5$)

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา ($a/R_x = 0.2$, $a/b = 1.0$ และ $W_{GPL} = 1.0\%$)

a/h	ประเภท โครงสร้าง	ค่าโหมดพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ (m,n)								
		Wang et al. (2018)			งานวิจัยนี้			ความแตกต่าง (%)		
		(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,1)	(1,2)	(2,2)
5	SP	0.1279	0.2919	0.4450	0.1279	0.2919	0.4449	0	0	0.022
	CY	0.1229	0.2892	0.4438	0.1229	0.2892	0.4437	0	0	0.023
	HP	0.1206	0.2898	0.4427	0.1206	0.2898	0.4425	0	0	0.045
10	SP	0.0374	0.0796	0.1232	0.0374	0.0796	0.1232	0	0	0
	CY	0.0328	0.0770	0.1219	0.0328	0.0770	0.1219	0	0	0
	HP	0.0310	0.0778	0.1213	0.0310	0.0778	0.1213	0	0	0
15	SP	0.0097	0.0150	0.0217	0.0097	0.0150	0.0217	0	0	0
	CY	0.0065	0.0127	0.0205	0.0065	0.0127	0.0205	0	0	0
	HP	0.0050	0.0135	0.0200	0.0050	0.0135	0.0200	0	0	0

ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลท ($a/b = 1.0$, $p = 1.0$ และ $W_{GPL} = 1.0\%$)

a/h	รูปแบบ GPL	ค่าโหมดพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ (m,n)								
		Roun et al. (2025)			งานวิจัยนี้			ความแตกต่าง (%)		
		(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,1)	(1,2)	(2,2)
5	A	0.1824	0.4021	0.5847	0.1824	0.4019	0.5839	0	0	0.137
	B	0.1904	0.4152	0.5997	0.1905	0.4150	0.5985	0	0	0.200
	C	0.1742	0.3857	0.5625	0.1742	0.3854	0.5616	0	0	0.160
10	A	0.0495	0.1185	0.1824	0.0495	0.1185	0.1824	0	0	0
	B	0.0522	0.1242	0.1904	0.0522	0.1243	0.1905	0	0	0
	C	0.0471	0.1130	0.1742	0.0471	0.1130	0.1742	0	0	0

2. พฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลท

สำหรับการศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลท โดยที่วัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาจะกำหนดให้เซรามิกทำจากอะลูมินา (Al_2O_3) โลหะทำจากอะลูมิเนียม (Al) เสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลท (GPL) มีค่าคุณสมบัติดังตารางที่ 1 โดยที่ค่าอัตราส่วน a/R_x และ a/b มีค่าเท่ากับ 0.2 และ 1.0 ตารางที่ 5 แสดงค่าพารามิเตอร์ความถี่ (ω) ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลท โดยค่าในวงเล็บคือ ร้อยละของการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency Change) ของค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลทเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ไม่มีการเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลท ดังสมการที่ (64)

$$\text{Relative frequency change}(\%) = \frac{\bar{\omega}_{GPL} - \bar{\omega}_{FGM}}{\bar{\omega}_{FGM}} \times 100\% \quad (64)$$

เมื่อ $\bar{\omega}_{GPL}$ และ $\bar{\omega}_{FGM}$ คือค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาในกรณีที่มีการเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลทกับกรณีที่ไม่มีการเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลท จากผลการศึกษาพบว่าเมื่อโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลทจะมีค่าพารามิเตอร์ความถี่ ($\bar{\omega}$) สูงกว่ากรณีที่ไม่มีการเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลทในทุกโหมดการสั่น และค่าที่เพิ่มสูงขึ้นมีค่าใกล้เคียงกัน นอกจากนี้ยังพบว่าโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลทที่มีรูปแบบการกระจายแบบ B จะให้ค่าพารามิเตอร์ความถี่ ($\bar{\omega}$) สูงสุดเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีรูปแบบการกระจายตัวของแกรไฟีนเพลตเลทแบบอื่น ๆ เนื่องจากมีปริมาณส่วนผสมส่วนใหญ่ของแกรไฟีนเพลตเลทกระจายอยู่ในช่วงผิวบนและผิวล่างสอดคล้องกับค่าการกระจายความเค้นตึงฉากจริงที่เกิดขึ้นของโครงสร้างเปลือกบาง (รูปที่ 2) ดังนั้นการเพิ่มประสิทธิภาพของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องพิจารณาถึงรูปแบบการกระจายตัวของแกรไฟีนเพลตเลทเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด

3. ผลของค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์

สำหรับการศึกษาผลของค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ ($\bar{\omega}$) ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลท โดยที่ค่าอัตราส่วน a/R_x และ a/b มีค่าเท่ากับ 0.2 และ 1.0 ค่าสัดส่วนโดยน้ำหนักของแกรไฟีนเพลตเลท (W_{GPL}) จะมีค่าเท่ากับ 1.0 % ในขณะที่ค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ (p) จะมีการแปรเปลี่ยนตั้งแต่ 0 ถึง 5 พบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่ ($\bar{\omega}$) จะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วงที่ค่า p มีค่าน้อย หลังจากนั้นค่าพารามิเตอร์ความถี่ ($\bar{\omega}$) จะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นอย่างช้า ๆ เมื่อค่า p มีค่าตั้งแต่ 2 ขึ้นไป ดังรูปที่ 3 นอกจากนี้ยังพบว่าโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลทที่มีรูปแบบการกระจายแบบ B จะให้ค่าพารามิเตอร์ความถี่ ($\bar{\omega}$) สูงสุดเนื่องจากค่าการเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลทในช่วงบริเวณผิวบนและผิวล่างจะทำให้ค่ามอดูลัสประสิทธิภาพของวัสดุเมทริกซ์ที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนามีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีการกระจายตัวของแกรไฟีนเพลตเลทแบบอื่น ๆ ดังรูปที่ 4

สำหรับกรณีที่แกรไฟีนเพลตเลทมีรูปแบบการกระจายแบบสม่ำเสมอ (รูปแบบ A) จะพบว่าผลของการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความยาวต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางจะส่งผลต่อค่าการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงไฮเปอร์โบลิก (HP) รูปทรงกระบอก (CY) และแผ่นเรียบ (FL) ที่ทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลท ดังรูปที่ 4(ข) - 4(ง) ตามลำดับ นั่นคือค่าการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์สำหรับกรณีที่โครงสร้างมีค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางเท่ากับ 5 จะมีค่าต่ำกว่ากรณีที่อัตราส่วนความยาวต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางเท่ากับ 10 ในขณะที่ช่วงค่า p มีค่าสูงจะให้ผลที่ตรงกันข้าม

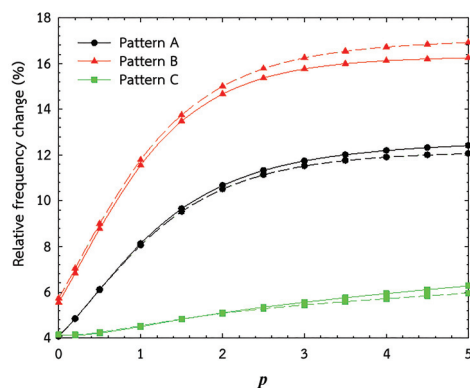
ตารางที่ 5 ค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนเพลตเลท ($a/R_x = 0.2$, $a/b = 1.0$, $p = 1.0$ และ $W_{GPL} = 1.0\%$)

รูปแบบ GPL	$a/h = 5$				$a/h = 10$			
	SP	HP	CY	FL	SP	HP	CY	FL
ค่าโหมดพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ (m,n) = (1,1)								
$W_{GPL} = 0\%$	0.1644	0.1616	0.1627	0.1631	0.0468	0.0438	0.0447	0.0442
A	0.1777	0.1747	0.1760	0.1763	0.0506	0.0474	0.0484	0.0478
	(8.13%)	(8.08%)	(8.12%)	(8.08%)	(8.06%)	(8.24%)	(8.21%)	(8.24%)

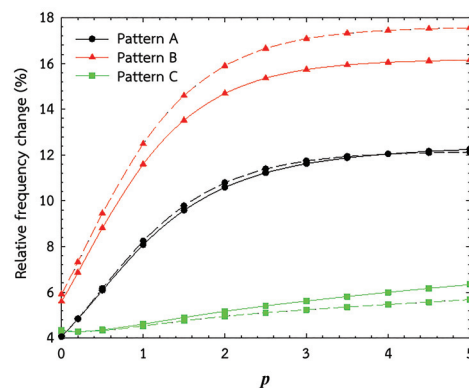
ตารางที่ 5 ค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลท ($a/R_x = 0.2$, $a/b = 1.0$, $p = 1.0$ และ $W_{GPL} = 1.0\%$) (ต่อ)

รูปแบบ	$a/h = 5$				$a/h = 10$			
GPL	SP	HP	CY	FL	SP	HP	CY	FL
B	0.1834 (11.6%)	0.1804 (11.6%)	0.1817 (11.6%)	0.1821 (11.6%)	0.0523 (11.8%)	0.0493 (12.5%)	0.0502 (12.3%)	0.0497 (12.5%)
C	0.1718 (4.50%)	0.1691 (4.61%)	0.1701 (4.54%)	0.1706 (4.60%)	0.0489 (4.54%)	0.0458 (4.53%)	0.0467 (4.49%)	0.0462 (4.53%)
ค่าโหมดพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ (m,n) = (1,2)								
$W_{GPL} = 0\%$	0.3589	0.3588	0.3582	0.3604	0.1065	0.1059	0.1055	0.1059
A	0.3874 (7.96%)	0.3871 (7.91%)	0.3867 (7.94%)	0.3887 (7.87%)	0.1152 (8.17%)	0.1145 (8.17%)	0.1141 (8.20%)	0.1145 (8.16%)
B	0.3969 (10.6%)	0.3967 (10.6%)	0.3962 (10.6%)	0.3983 (10.5%)	0.1193 (12.0%)	0.1186 (12.0%)	0.1182 (12.1%)	0.1186 (12.0%)
C	0.3754 (4.62%)	0.3756 (4.70%)	0.3749 (4.65%)	0.3773 (4.71%)	0.1113 (4.50%)	0.1107 (4.58%)	0.1103 (4.52%)	0.1107 (4.57%)
ค่าโหมดพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติ (m,n) = (2,2)								
$W_{GPL} = 0\%$	0.5220	0.5231	0.5228	0.5245	0.1631	0.1627	0.1628	0.1631
A	0.5628 (7.81%)	0.5634 (7.72%)	0.5634 (7.77%)	0.5651 (7.73%)	0.1764 (8.12%)	0.1759 (8.08%)	0.1761 (8.11%)	0.1763 (8.08%)
B	0.5737 (9.91%)	0.5742 (9.78%)	0.5743 (9.85%)	0.5759 (9.80%)	0.1821 (11.6%)	0.1816 (11.6%)	0.1818 (11.6%)	0.1821 (11.6%)
C	0.5466 (4.70%)	0.5481 (4.79%)	0.5476 (4.75%)	0.5497 (4.79%)	0.1705 (4.54%)	0.1702 (4.61%)	0.1703 (4.57%)	0.1706 (4.60%)

หมายเหตุ ค่าในวงเล็บคือ ร้อยละของการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของค่าพารามิเตอร์ความถี่ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ $[(\bar{\omega}_{GPL} - \bar{\omega}_{FGM}) / \bar{\omega}_{FGM}] \times 100\%$

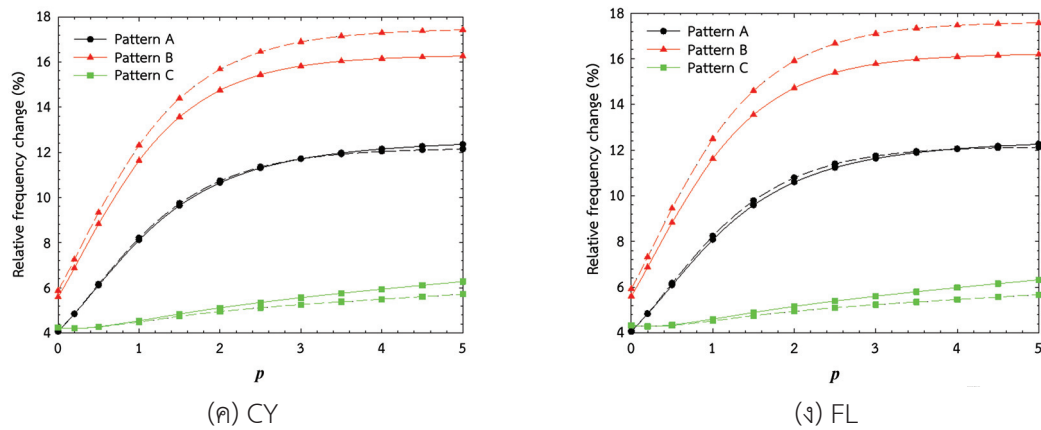


(ก) SP



(ข) HP

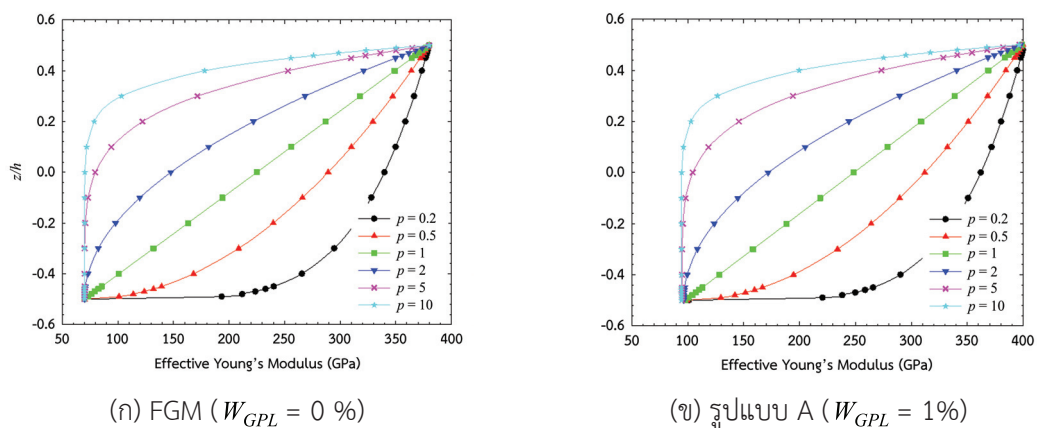
รูปที่ 3 ผลของค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรไฟีนพลตเลท (เส้นเต็มคือ $a/h = 5$ และเส้นประคือ $a/h = 10$)



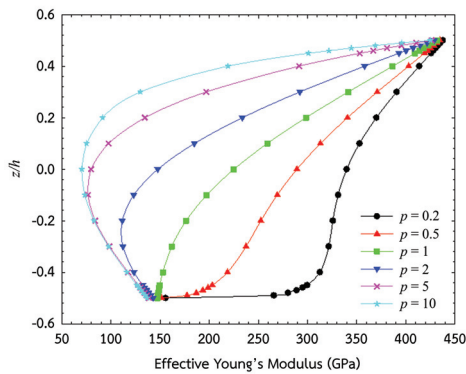
รูปที่ 3 ผลของค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท (เส้นเต็มคือ $a/h = 5$ และเส้นประคือ $a/h = 10$) (ต่อ)

4. ผลของค่าสัดส่วนโดยน้ำหนักของแกรฟีนเฟลตเลทที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์

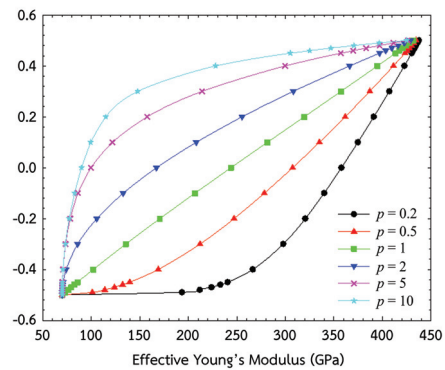
การเพิ่มค่าสัดส่วนโดยน้ำหนักของแกรฟีนเฟลตเลท (W_{GPL}) จะส่งผลโดยตรงต่อค่าความแข็งเกร่งของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนา เนื่องจากค่ามอดูลัสของแกรฟีนเฟลตเลท (E_{GPL}) จะมีค่าสูงกว่าค่ามอดูลัสของเซรามิกที่ทำจากอะลูมินา (Al_2O_3) และโลหะที่ทำจากอะลูมิเนียม (Al) จากตารางคุณสมบัติของวัสดุตารางที่ 1 จะพบว่าอัตราส่วนมอดูลัสของ E_{GPL}/E_1 และ E_{GPL}/E_2 อยู่ที่ 2.65 และ 14.43 เท่า ดังนั้นการเพิ่มปริมาณแกรฟีนเฟลตเลท (W_{GPL}) จึงส่งผลทำให้ค่าพารามิเตอร์ความถี่ ($\bar{\omega}$) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังรูปที่ 5 โดยที่ค่าอัตราส่วน a/R_x และ a/b มีค่าเท่ากับ 0.2 และ 1.0 ค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ (p) จะมีค่าเท่ากับ 1.0 และค่าสัดส่วนโดยน้ำหนักของแกรฟีนเฟลตเลท (W_{GPL}) จะมีการแปรเปลี่ยนตั้งแต่ 0 ถึง 3 % นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่ออัตราส่วนความยาวต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลให้ค่าการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทมีค่าลดลง



รูปที่ 4 ค่ามอดูลัสยืดหยุ่นประสิทธิผลของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท



(ค) รูปแบบ B ($W_{GPL} = 1\%$)

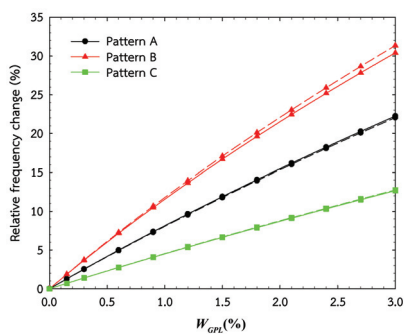


(ง) รูปแบบ C ($W_{GPL} = 1\%$)

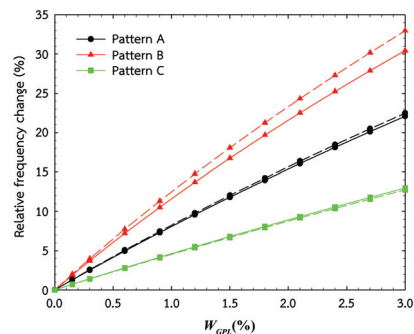
รูปที่ 4 ค่ามอดูลัสยืดหยุ่นประสิทธิผลของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท (ต่อ)

5. ผลของอัตราส่วนรูปร่างของแกรฟีนเฟลตเลทที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์

จากผลการศึกษาดังตารางที่ 5 พบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่ (ω) ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท จะมีค่าสูงสุดเมื่อแกรฟีนเฟลตเลทมีการกระจายตัวในรูปแบบ B ดังนั้นค่าพารามิเตอร์สุดท้ายที่จะถูกนำเสนอในบทความนี้คือ ผลของอัตราส่วนรูปร่างของแกรฟีนเฟลตเลทที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทรูปแบบ B โดยที่ค่าอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของแกรฟีนเฟลตเลท (l_{GPL}/w_{GPL}) จะมีค่าเท่ากับ 1.0 2.0 3.0 ในที่นี้ถ้าอัตราส่วน l_{GPL}/w_{GPL} มีค่าเท่ากับ 1.0 แสดงว่าแกรฟีนเฟลตเลทจะมีรูปทรงเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในขณะที่อัตราส่วน l_{GPL}/w_{GPL} มีค่ามากกว่า 1.0 จะเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า สำหรับค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนาของแกรฟีนเฟลตเลท $(l_{GPL}/h_{GPL}) \times 1000$ จะมีค่าแปรเปลี่ยนตั้งแต่ 0.1 ถึง 4.9 ทั้งนี้ค่า l_{GPL} จะมีค่าคงที่คือ 2.5 ไมโครเมตร สำหรับอัตราส่วน a/R_x และ a/b จะมีค่าคงที่เท่ากับ 0.2 และ 1.0 ค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ (p) จะมีค่าเท่ากับ 1.0 และค่าสัดส่วนโดยน้ำหนักของแกรฟีนเฟลตเลท (W_{GPL}) จะมีค่าเท่ากับ 1.0 % จากผลการศึกษาพบว่าเมื่อค่าอัตราส่วน l_{GPL}/w_{GPL} มีค่าน้อยกว่า 500 จะส่งผลทำให้ค่าการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทมีค่าเพิ่มสูงขึ้นอย่างรวดเร็วและจะเริ่มคงที่เมื่ออัตราส่วน l_{GPL}/w_{GPL} มีค่ามากกว่า 1000 ดังรูปที่ 6 นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่ออัตราส่วน l_{GPL}/w_{GPL} มีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ค่าการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทมีค่าลดลง

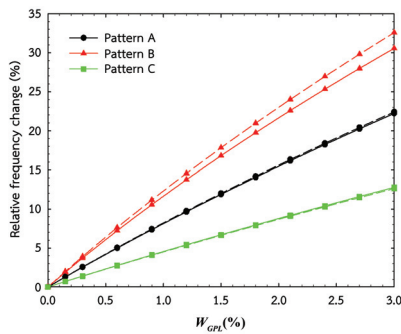


(ก) SP

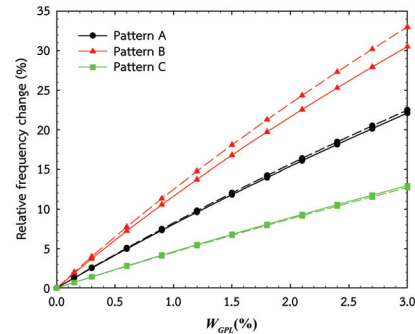


(ข) HP

รูปที่ 5 ผลของปริมาณแกรฟีนเฟลตเลทที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท (เส้นเต็มคือ $a/h = 5$ และเส้นประคือ $a/h = 10$)

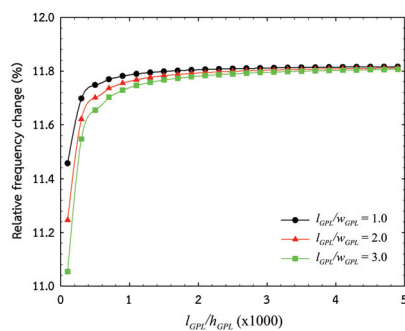


(ค) CY

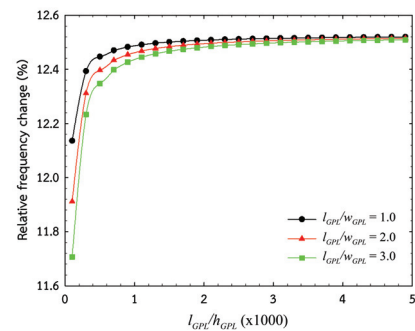


(ง) FL

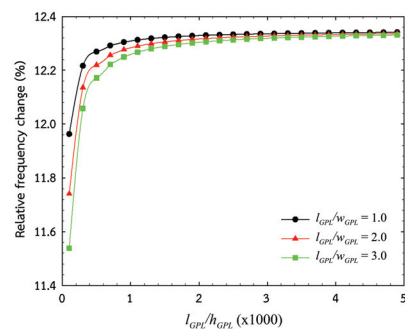
รูปที่ 5 ผลของปริมาณแกรฟีนเฟลตเลทที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลท (เส้นเต็มคือ $a/h = 5$ และเส้นประคือ $a/h = 10$) (ต่อ)



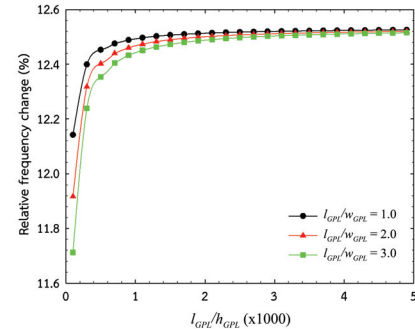
(ก) SP



(ข) HP



(ค) CY



(ง) FL

รูปที่ 6 ผลของอัตราส่วนรูปร่างของแกรฟีนเฟลตเลทที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทรูปแบบ B

สรุปผล

การศึกษาผลของการเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพโครงสร้างเปลือกบางทำจากวัสดุที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาให้สูงขึ้นโดยใช้ทฤษฎีการเสียดรูปด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุง ค่าמודูลัสยืดหยุ่นประสิทธิภาพของวัสดุเมทริกซ์ที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงตามความหนาและวัสดุเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเฟลตเลทจะสามารถนิยามได้โดยใช้แบบจำลองของ Voigt และ Halpin-Tsai จากนั้นทำการสร้างสมการการเคลื่อนที่โดยอาศัยหลักการของแฮมิลตันและใช้กระบวนการของนาเวียร์ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขจากผลการศึกษาพบว่าการใช้ทฤษฎีการเสียดรูป

ด้วยแรงเฉือนอันดับที่หนึ่งแบบปรับปรุงจะให้คำตอบที่ดีเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ใช้ทฤษฎีการเสียรูปที่มีอันดับสูงกว่า ทำให้ลดความยุ่งยากในการคำนวณ นอกจากนี้ยังพบว่าการเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลตเลทรูปแบบ B จะให้ค่าพารามิเตอร์ความถี่สูงสุดในขณะที่รูปแบบ C จะให้ค่าพารามิเตอร์ความถี่ต่ำสุด ซึ่งจะสอดคล้องกับค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในกรณีที่ค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ (p) การเสริมกำลังด้วยแกรฟีนเพลตเลทจะส่งผลต่อค่าการเปลี่ยนแปลงความถี่สัมพัทธ์สูงมากเมื่อเทียบกับกรณีที่ค่าเลขยกกำลังของวัสดุเมทริกซ์ (p) มีค่าต่ำ และอัตราส่วนรูปทรงของแกรฟีนเพลตเลทจะมีผลกระทบโดยตรงต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ โดยเฉพาะเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนาของแกรฟีนเพลตเลท (l_{GPL} / w_{GPL}) มีค่าน้อย ดังนั้นผลการศึกษาที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการเพิ่มประสิทธิภาพของโครงสร้างเปลือกบางให้ดีขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับการสนับสนุนจากกองทุนส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม ตามสัญญาเลขที่ FF69/NKR/054

References

- Ansari, R., Hassani, R., Gholami, R. and Rouhi, H. (2020). Nonlinear Bending Analysis of Arbitrary-Shaped Porous Nanocomposite Plates using a Novel Numerical Approach. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 126. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103556>
- Benounas, S., Belarbi, M.O., Van Vinh, P., Daikh, A.A. and Fantuzzi, N. (2024). Finite Element Model for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Doubly Curved Shallow Shells by using an Improved First-Order Shear Deformation Theory. *Structures*, 64. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106594>
- Garg, A., Belarbi, M.O., Chalak, H.D. and Chakrabarti, A. (2021). A Review of the Analysis of Sandwich FGM Structures. *Composite Structures*, 258. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113427>
- Halpin, J.C. and Kardos, J.L. (1976). The Halpin-Tsai Equations: A Review. *Polymer Engineering & Science*, 16(5), 344-352. <https://doi.org/10.1002/pen.760160512>
- Jiammeepreecha, W. (2017). Effects of Internal Pressure and Constraint Volume on Vibration of Spherical Membrane. *RMUTI Journal Science and Technology*, 10(2), 40-60. <https://ph01.tci-thaijo.org/index.php/rmutijo/article/view/96525>
- Jones, R.M. (2018). *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press.
- Khalaf, A.S. and Hasan, H.M. (2024). Nonlinear Forced Vibration of Functionally Graded Hybrid Three-Phase Nanocomposite Toroidal Shell Segments Reinforced by Carbon Nanotubes (CNTs) and Graphene Nanoplatelets (GPLs). *Thin-Walled Structures*, 199. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111876>
- Matsunaga, H. (2008). Free Vibration and Stability of Functionally Graded Shallow Shells According to a 2D Higher-Order Deformation Theory. *Composite Structures*, 84(2), 132-146. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.07.006>
- Qatu, M.S. (2004). *Vibration of Laminated Shells and Plates*. Academic Press.
- Reddy, J.N. (2003). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis* (2nded). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b12409>
- Roun, S., Nguyen, V.L. and Rungamornrat, J. (2025). Free Vibration and Buckling Analyses of Functionally Graded Plates with Graphene Platelets Reinforcement. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 25(1). <https://doi.org/10.1115/1.4064665>

- Shen, H.S. (2009). *Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press.
- Thai, H.T. and Kim, S.E. (2015). A Review of Theories for the Modeling and Analysis of Functionally Graded Plates and Shells. *Composite Structures*, 128, 70-86. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>
- Tjong, S.C. (2013). Recent Progress in the Development and Properties of Novel Metal Matrix Nanocomposites Reinforced with Carbon Nanotubes and Graphene Nanosheets. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 74(10), 281-350. <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.08.001>
- Van Vinh, P. and Tounsi, A. (2022). Free Vibration Analysis of Functionally Graded Doubly Curved Nanoshells using Nonlocal First-Order Shear Deformation Theory with Variable Nonlocal Parameters. *Thin-Walled Structures*, 174. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109084>
- Van Vinh, P., Van Chinh, N. and Tounsi, A. (2022). Static Bending and Buckling Analysis of Bi-Directional Functionally Graded Porous Plates using an Improved First-Order Shear Deformation Theory and FEM. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 96. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104743>
- Wang, A., Chen, H., Hao, Y. and Zhang, W. (2018). Vibration and Bending Behavior of Functionally Graded Nanocomposite Doubly-Curved Shallow Shells Reinforced by Graphene Nanoplatelets. *Results in Physics*, 9, 550-559. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.02.062>
- Worku, A.K. and Ayele, D.W. (2023). Recent Advances of Graphene-Based Materials for Emerging Technologies. *Results in Chemistry*, 5. <https://doi.org/10.1016/j.rechem.2023.100971>
- Yee, K. and Ghayesh, M.H. (2023). A Review on the Mechanics of Graphene Nanoplatelets Reinforced Structures. *International Journal of Engineering Science*, 186. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2023.103831>
- Zhao, S., Zhao, Z., Yang, Z., Ke, L.L., Kitipornchai, S. and Yang, J. (2020). Functionally Graded Graphene Reinforced Composite Structures: A Review. *Engineering Structures*, 210. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110339>
- Zhao, T., Bayat, M.J., Kalhori, A. and Asemi, K. (2024). Free Vibration Analysis of Functionally Graded Multilayer Hybrid Composite Cylindrical Shell Panel Reinforced by GPLs and CNTs Surrounded by Winkler Elastic Foundation. *Engineering Structures*, 308. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.117975>
- Zingoni, A. (2015). Liquid-Containment Shells of Revolution: A Review of Recent Studies on Strength, Stability and Dynamics. *Thin-Walled Structures*, 87, 102-114. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.10.016>