

สมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + a^y = z^3$

On the Diophantine Equation $13^x + a^y = z^3$

สุธน ตาดี*

Suton Tadee*

Received: September 9, 2024; Revised: October 28, 2024; Accepted: October 31, 2024

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยนี้ได้ศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + a^y = z^3$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยใช้ความรู้พื้นฐานของสมภาคและทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู ผลการวิจัยพบว่า ถ้า $a \equiv 3, 9, 10 \pmod{13}$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์จะไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ นอกจากนี้ สมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวจะมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) = (0, 1, \sqrt[3]{a+1})$ เมื่อ $a \equiv 4 \pmod{13}$ และ $\sqrt[3]{a+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์; สมภาค; ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู; ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

* Corresponding Author, Tel. 08 1904 0975, E - mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

Abstract

In this article, we study the non-negative integer solutions of the Diophantine equation $13^x + a^y = z^3$, where a is a positive integer and x, y, z are non-negative integers, by using the basic concepts of congruence and Mihăilescu's Theorem. These findings indicate that if $a \equiv 3, 9, 10 \pmod{13}$, then the Diophantine equation has no non-negative integer solution. Moreover, the Diophantine equation has the non-negative integer solution $(x, y, z) = (0, 1, \sqrt[3]{a+1})$, where $a \equiv 4 \pmod{13}$ and $\sqrt[3]{a+1}$ is an integer.

Keywords: Diophantine Equation; Congruence; Mihăilescu's Theorem; Non-Negative Integer Solution

บทนำ

ในช่วงประมาณปี ค.ศ. 2015 จนถึงปัจจุบัน สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine Equation) ที่อยู่ในรูป $a^x + b^y = z^3$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์ โดยได้มีการศึกษาหาผลเฉลยของสมการดังกล่าว ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 2017 Burshtein (2017) ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^3 + q^2 = z^3$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ q, z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $q > 1$ และพบว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก (p, q, z) คือ $(7, 13, 8), (7, 49, 14), (7, 147, 28)$ และ $(7, 1911, 154)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2018 Burshtein (2018) ได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^3 + q = z^3$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะและ z เป็นจำนวนเต็มบวก คือ $(p, q, z) = (p, 3p^2 + 3p + 1, p + 1)$

ในปี ค.ศ. 2020 Burshtein (2020) ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^3$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $x, y \in \{1, 2\}$ ซึ่งในที่นี้จะขอยกตัวอย่างผลการวิจัย เช่น สมการไดโอแฟนไทน์ $p^2 + q^2 = z^3$ ไม่มีผลเฉลย เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ z เป็นจำนวนเต็มบวกและในปีต่อมา Burshtein (2021) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^3 + q^y = z^3$ ไม่มีผลเฉลย เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ y, z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $y > 3$ หลังจากนั้น Mina and Bacani (2022) ได้พิสูจน์ว่า ถ้า p และ $p + 4$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 1 \pmod{3}$ และ $p = \frac{1}{4}(L^2 + 27M^2)$ เมื่อ $L \not\equiv 0 \pmod{2}$ หรือ $M \not\equiv 0 \pmod{2}$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+4)^y = z^3$ ไม่มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ต่อมาในปี ค.ศ. 2023 Tadee (2023) ได้หาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + p^y = z^3$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ คือ $(p, x, y, z) = (3 \cdot 2^{2n} + 3 \cdot 2^n + 1, n, 1, 2^n + 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปี ค.ศ. 2024 Tadee (2024) ได้ค้นพบเงื่อนไขบางประการของการไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^3$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ในงานวิจัยนี้สนใจศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ ดังสมการที่ (1)

$$13^x + a^y = z^3 \quad (1)$$

เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งในการศึกษาผลเฉลยของสมการดังกล่าว จะใช้ความรู้พื้นฐานของสมภาค (Congruence) และทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู (Mihăilescu's Theorem) ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการดำเนินการวิจัยนี้จะเริ่มจากการทบทวนความหมายและสมบัติพื้นฐานบางประการของสมภาค ดังนี้

บทนิยาม 1 Niven et al. (1991) ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่า a สมภาค b มอดุโล m เมื่อ m หาร $a-b$ ลงตัว เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{m}$ และถ้า m หาร $a-b$ ไม่ลงตัว จะกล่าวว่า a ไม่สมภาค b มอดุโล m เขียนแทนด้วย $a \not\equiv b \pmod{m}$

ทฤษฎีบท 1 Niven et al. (1991) ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

- 1) $a \equiv b \pmod{m}$ และ $b \equiv a \pmod{m}$ และ $a-b \equiv 0 \pmod{m}$ เป็นข้อความที่สมมูลกัน
- 2) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $b \equiv c \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{m}$
- 3) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว $a+c \equiv b+d \pmod{m}$
- 4) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว $ac \equiv bd \pmod{m}$
- 5) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $d|m$ โดยที่ $d > 0$ แล้ว $a \equiv b \pmod{d}$
- 6) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $ac \equiv bc \pmod{mc}$ เมื่อ $c > 0$

และจากสมบัติพื้นฐานของสมภาคข้างต้น สามารถนำมาใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ต่อไปนี้ ซึ่งทฤษฎีบทเหล่านี้ จะถูกนำไปใช้ในการศึกษาผลเฉลยของสมการที่ (1)

ทฤษฎีบท 2 ถ้า z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้ว $z^3 \equiv 0, 1, 5, 8, 12 \pmod{13}$

พิสูจน์ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นจะมี $r \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ ซึ่งทำให้ $z \equiv r \pmod{13}$ จะได้ว่า

ถ้า $z \equiv 0 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 0^3 \equiv 0 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 1 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 2 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 3 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 1 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 4 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 12 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 5 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 5^3 \equiv 125 \equiv 8 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 6 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 6^3 \equiv 216 \equiv 8 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 7 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 7^3 \equiv 343 \equiv 5 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 8 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 8^3 \equiv 512 \equiv 5 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 9 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 9^3 \equiv 729 \equiv 1 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 10 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 10^3 \equiv 1,000 \equiv 12 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 11 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 11^3 \equiv 1,331 \equiv 5 \pmod{13}$

ถ้า $z \equiv 12 \pmod{13}$ ดังนั้น $z^3 \equiv 12^3 \equiv 1,728 \equiv 12 \pmod{13}$

ทฤษฎีบท 3 ให้ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ a เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a \equiv 3, 4, 9, 10 \pmod{13}$ จะได้ว่า $a^y \equiv 1, 3, 4, 9, 10, 12 \pmod{13}$

พิสูจน์ เนื่องจาก y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นโดยขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k, r ซึ่งทำให้ $y = 3k + r$ โดยที่ $0 \leq r \leq 2$ และจาก $a \equiv 3, 4, 9, 10 \pmod{13}$ ดังนั้นจะแยกพิจารณากรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $a \equiv 3 \pmod{13}$ จะได้ว่า

ถ้า $r = 0$ ดังนั้น $a^y \equiv 3^{3k} \equiv 27^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{13}$

ถ้า $r = 1$ ดังนั้น $a^y \equiv 3^{3k+1} \equiv 3 \cdot 3^{3k} \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{13}$

ถ้า $r = 2$ ดังนั้น $a^y \equiv 3^{3k+2} \equiv 9 \cdot 3^{3k} \equiv 9 \cdot 1 \equiv 9 \pmod{13}$

กรณีที่ 2 $a \equiv 4 \pmod{13}$ จะได้ว่า

ถ้า $r = 0$ ดังนั้น $a^y \equiv 4^{3k} \equiv (-1)^k \equiv 1, -1 \equiv 1, 12 \pmod{13}$

ถ้า $r = 1$ ดังนั้น $a^y \equiv 4^{3k+1} \equiv 4(-1)^k \equiv 4, 9 \pmod{13}$

ถ้า $r = 2$ ดังนั้น $a^y \equiv 4^{3k+2} \equiv 16(-1)^k \equiv 3, 10 \pmod{13}$

กรณีที่ 3 $a \equiv 9 \pmod{13}$ จะได้ว่า

ถ้า $r = 0$ ดังนั้น $a^y \equiv 9^{3k} \equiv 729^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{13}$

ถ้า $r = 1$ ดังนั้น $a^y \equiv 9^{3k+1} \equiv 9 \cdot 9^{3k} \equiv 9 \pmod{13}$

ถ้า $r = 2$ ดังนั้น $a^y \equiv 9^{3k+2} \equiv 81 \cdot 9^{3k} \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$

กรณีที่ 4 $a \equiv 10 \pmod{13}$ จะได้ว่า

ถ้า $r = 0$ ดังนั้น $a^y \equiv 10^{3k} \equiv (-1)^k \equiv 1, -1 \equiv 1, 12 \pmod{13}$

ถ้า $r = 1$ ดังนั้น $a^y \equiv 10^{3k+1} \equiv 10(-1)^k \equiv 3, 10 \pmod{13}$

ถ้า $r = 2$ ดังนั้น $a^y \equiv 10^{3k+2} \equiv 100(-1)^k \equiv 4, 9 \pmod{13}$

จากทั้ง 4 กรณี จะได้ว่า $a^y \equiv 1, 3, 4, 9, 10, 12 \pmod{13}$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3 ทำให้ได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 4 ให้ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ a เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a \equiv 3, 4, 9, 10 \pmod{13}$ จะได้ว่า ถ้า $a^y \equiv 1, 12 \pmod{13}$ แล้วจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $y = 3k$

นอกจากทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว อีกหนึ่งทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่มีบทบาทสำคัญในการศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ คือ ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู (Mihăilescu's Theorem) ซึ่งเดิมเป็นข้อคาดการณ์ของกาตาลัน (Catalan's Conjecture) และได้รับการพิสูจน์ว่าเป็นจริงโดยมิไฮเลสคู ในปี ค.ศ. 2004

ทฤษฎีบท 5 (ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู) (Mihăilescu, 2004) สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

ผลการวิจัย

หลังจากที่ได้ทบทวนความรู้พื้นฐานและพิสูจน์ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมภาค ตลอดจนได้กล่าวถึงทฤษฎีบทของมิไฮเลสคูแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา ในหัวข้อนี้จะนำทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้นใช้ในการศึกษาหาผลเฉลยของสมการที่ (1)

ทฤษฎีบท 6 ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a \equiv 3, 4, 9, 10 \pmod{13}$ จะได้ว่า ถ้าสมการที่ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้ว $x = 0$ และ $y = 1$

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการที่ (1) สมมติว่า $x > 0$ ดังนั้น $13^x \equiv 0 \pmod{13}$ และจากสมการที่ (1) จะได้ว่า $a^y \equiv z^3 \pmod{13}$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 2 และ 3 จะได้ว่า $a^y \equiv 1, 12 \pmod{13}$ และจากบทแทรก 4 จะได้ว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $y = 3k$ ดังนั้นจากสมการที่ (1) จะได้ว่า $13^x = z^3 - a^{3k} = (z - a^k)(z^2 + z \cdot a^k + a^{2k})$ และเนื่องจาก 13 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้

$$z - a^k = 13^u \quad (2)$$

และ

$$z^2 + z \cdot a^k + a^{2k} = 13^{x-u} \quad (3)$$

จากสมการที่ (2) และ (3) จะได้ว่า $(a^k + 13^u)^2 + (a^k + 13^u)a^k + a^{2k} = 13^{x-u}$ ทำให้ได้ว่า

$$13^{2u} + 3 \cdot 13^u \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} = 13^{x-u} \quad (4)$$

เนื่องจาก $a \equiv 3, 4, 9, 10 \pmod{13}$ และทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $a^k \equiv 1, 3, 4, 9, 10, 12 \pmod{13}$

กรณีที่ 1 $u = 0$ จากสมการที่ (4) จะได้ว่า

$$1 + 3 \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} = 13^x \quad (5)$$

ถ้า $a^k \equiv 1 \pmod{13}$ ดังนั้น $1 + 3 \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} \equiv 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 \equiv 7 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 3 \pmod{13}$ ดังนั้น $1 + 3 \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} \equiv 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 \equiv 37 \equiv 11 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 4 \pmod{13}$ ดังนั้น $1 + 3 \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} \equiv 1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 \equiv 61 \equiv 9 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 9 \pmod{13}$ ดังนั้น $1 + 3 \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} \equiv 1 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 9^2 \equiv 271 \equiv 11 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 10 \pmod{13}$ ดังนั้น $1 + 3 \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} \equiv 1 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 \equiv 331 \equiv 6 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 12 \pmod{13}$ ดังนั้น $1 + 3 \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} \equiv 1 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 12^2 \equiv 469 \equiv 1 \pmod{13}$

เพราะฉะนั้น $1 + 3 \cdot a^k + 3 \cdot a^{2k} \equiv 1, 6, 7, 9, 11 \pmod{13}$ และจากสมการที่ (5) จะได้ว่า $13^x \equiv 1, 6, 7, 9, 11 \pmod{13}$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ $13^x \equiv 0 \pmod{13}$ ดังนั้น กรณี $u = 0$ เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 $u > 0$ จากสมการที่ (4) จะได้ว่า $3 \cdot a^{2k} \equiv 0 \pmod{13}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ

ถ้า $a^k \equiv 1 \pmod{13}$ ดังนั้น $3 \cdot a^{2k} \equiv 3 \cdot 1^2 \equiv 3 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 3 \pmod{13}$ ดังนั้น $3 \cdot a^{2k} \equiv 3 \cdot 3^2 \equiv 27 \equiv 1 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 4 \pmod{13}$ ดังนั้น $3 \cdot a^{2k} \equiv 3 \cdot 4^2 \equiv 48 \equiv 9 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 9 \pmod{13}$ ดังนั้น $3 \cdot a^{2k} \equiv 3 \cdot 9^2 \equiv 243 \equiv 9 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 10 \pmod{13}$ ดังนั้น $3 \cdot a^{2k} \equiv 3 \cdot 10^2 \equiv 300 \equiv 1 \pmod{13}$

ถ้า $a^k \equiv 12 \pmod{13}$ ดังนั้น $3 \cdot a^{2k} \equiv 3 \cdot 12^2 \equiv 432 \equiv 3 \pmod{13}$

ดังนั้น กรณี $u > 0$ เป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $x = 0$ และจากสมการที่ (1) จะได้ว่า

$$z^3 - a^y = 1 \quad (6)$$

เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a \equiv 3, 4, 9, 10 \pmod{13}$ ดังนั้น $a > 1$ และจากสมการที่ (6) จะเห็นได้ว่า $z^3 = a^y + 1 > 1$ ดังนั้น $z > 1$ สมมติว่า $y > 1$ และจากทฤษฎีบท 5 จะได้ว่ามีผลเฉลย $(z, a, 3, y)$ อื่นนอกเหนือจาก $(3, 2, 2, 3)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ทำให้ได้ว่า $y = 0$ หรือ 1 สมมติว่า $y = 0$ จากสมการที่ (6) จะได้ว่า $z^3 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $y = 1$

ทฤษฎีบท 7 ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a \equiv 3, 9, 10 \pmod{13}$ จะได้ว่า สมการที่ (1) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ x, y, z และเป็นผลเฉลยของสมการที่ (1) จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $x = 0$ และ $y = 1$ ดังนั้น

$$z^3 = a + 1 \quad (7)$$

เนื่องจาก $a \equiv 3, 9, 10 \pmod{13}$ ดังนั้นจากสมการที่ (7) จะได้ว่า $z^3 \equiv 4, 10, 11 \pmod{13}$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2

ทฤษฎีบท 8 ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a \equiv 4 \pmod{13}$ จะได้ว่า สมการที่ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) = (0, 1, \sqrt[3]{a+1})$ เมื่อ $\sqrt[3]{a+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการที่ (1) เนื่องจาก $a \equiv 4 \pmod{13}$ และทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $x=0$ และ $y=1$ ดังนั้นจากสมการที่ (1) จะได้ว่า $z^3 = a+1$ หรือ $z = \sqrt[3]{a+1}$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0, 1, \sqrt[3]{a+1})$ เมื่อ $\sqrt[3]{a+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

บทแทรก 9 สมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + 342^y = z^3$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) = (0, 1, 7)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $342 \equiv 4 \pmod{13}$ และ $\sqrt[3]{342+1} = 7$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 1, 7)$

บทแทรก 10 สมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + 511^y = z^3$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) = (0, 1, 8)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $511 \equiv 4 \pmod{13}$ และ $\sqrt[3]{511+1} = 8$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 1, 8)$

บทแทรก 11 สมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + 17^y = z^3$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ จาก $17 \equiv 4 \pmod{13}$ แต่ $\sqrt[3]{17+1}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจากทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + 17^y = z^3$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทแทรก 12 ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a \equiv 4 \pmod{13}$ จะได้ว่า ถ้า $a = p^n$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว สมการที่ (1) ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ x, y, z ที่เป็นผลเฉลยของสมการที่ (1) และจากทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า $z^3 = a+1 = p^n+1$ ดังนั้น $p^n = z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้

$$z-1 = p^v \quad (8)$$

และ

$$z^2 + z + 1 = p^{n-v} \quad (9)$$

จากสมการที่ (8) และ (9) จะได้ว่า $(1+p^v)^2 + (1+p^v) + 1 = p^{n-v}$ ทำให้ได้ว่า

$$p^{2v} + 3 \cdot p^v + 3 = p^{n-v} \quad (10)$$

กรณีที่ 1 $v=0$ จากสมการที่ (10) จะได้สมการที่ (11)

$$1+3+3 = p^n \quad (11)$$

ดังนั้น $a \equiv 7 \pmod{13}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $a \equiv 4 \pmod{13}$

กรณีที่ 2 $v > 0$ จากสมการที่ (10) จะได้ว่า $p|3$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p=3$ และจากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3 (กรณีที่ 1) ได้ว่า $3^n \equiv 1, 3, 9 \pmod{13}$ เพราะฉะนั้น $a \equiv 1, 3, 9 \pmod{13}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $a \equiv 4 \pmod{13}$

สรุปผลและการอภิปรายผล

จากการวิจัยข้างต้นพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $13^x + a^y = z^3$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a \equiv 3, 9, 10 \pmod{13}$ หรือ $a \equiv 4 \pmod{13}$ โดยที่ $a = p^n$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก นอกจากนี้ ถ้า $a \equiv 4 \pmod{13}$ แล้ว สมการดังกล่าวมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) = (0, 1, \sqrt[3]{a+1})$ เมื่อ $\sqrt[3]{a+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

ในการวิจัยครั้งนี้จะเห็นได้ว่ายังศึกษาผลเฉลยของสมการดังกล่าวไม่ครบทุกกรณี ยกตัวอย่างเช่น กรณีที่ $a \equiv 0 \pmod{13}$ หรือ กรณีที่ $a \equiv 1 \pmod{13}$ เป็นต้น ดังนั้นจึงยังคงเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาค้นคว้าต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนวิจัยจากมหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี และผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

References

- Burshtein, N. (2017). All the Solutions of the Diophantine Equation $p^3 + q^2 = z^3$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 14(2), 207-211. <http://dx.doi.org/10.22457/apam.v14n2a1>
- Burshtein, N. (2018). The Infinitude of Solutions to the Diophantine Equation $p^3 + q = z^3$ when p, q are Primes. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 17(1), 135-136. <http://dx.doi.org/10.22457/apam.v17n1a15>
- Burshtein, N. (2020). On Solutions to the Diophantine Equations $p^x + q^y = z^3$ when $p \geq 2$, q are Primes and $1 \leq x, y \leq 2$ are Integers. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 22(1), 13-19. <http://dx.doi.org/10.22457/apam.v22n1a03679>
- Burshtein, N. (2021). All the Solutions of the Diophantine Equation $p^3 + q^y = z^3$ with Distinct Odd Primes p, q when $y > 3$. *Journal of Mathematics and Informatics*, 20(1), 1-4. <http://dx.doi.org/10.22457/jmi.v20a01188>
- Mihăilescu, P. (2004). Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2004(572), 167-195. <http://dx.doi.org/10.1515/crll.2004.048>
- Mina, R.J.S. and Bacani, J.B. (2022). On a Diophantine Equation of Type $p^x + q^y = z^3$. *Konuralp Journal of Mathematics*, 10(1), 55-58.
- Niven, I., Zuckerman, H.S. and Montgomery, H.L. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers* (5thed). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Tadee, S. (2023). The Diophantine Equations $8^x + p^y = z^3$ and $8^x - p^y = z^3$. *Science and Technology Nakhon Sawan Rajabhat University Journal*, 15(21), 98-106.
- Tadee, S. (2024). On the Diophantine Equation $3^x + n^y = z^3$. *Rattanakosin Journal of Science and Technology*, 6(2), 79-84. <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/RJST/article/view/251748>