

เกณฑ์สารสนเทศของเบส์ที่พัฒนาโดยใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียงสำหรับ ตัวแบบสมการหลายชั้น

Bayesian Information Criterion Developed Using Unbiased Estimator for Simultaneous Equations Model

วารางคณา เรียนสุทธิ์*

Warangkhan Riansut*

Received: June 27, 2024; Revised: October 15, 2024; Accepted: October 17, 2024

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอเกณฑ์ใหม่สำหรับการคัดเลือกตัวแบบสมการหลายชั้นเมื่ออิงตามเกณฑ์สารสนเทศของเบส์ ซึ่งตัวแบบสมการหลายชั้นมีการใช้อย่างแพร่หลายในสาขาสถิติและเศรษฐศาสตร์ มีลักษณะสำคัญคือ ตัวแปรตามของสมการหนึ่งจะเป็นตัวแปรอิสระของสมการที่เหลือได้ เกณฑ์ใหม่ประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator: UE) แทนที่ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator: MLE) ในเกณฑ์ System of Bayesian Information Criterion (SBIC) เรียกเกณฑ์ใหม่ว่า SBIC(UE) ดำเนินการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์ SBIC(UE) กับเกณฑ์ SBIC โดยใช้การจำลองข้อมูลและเปรียบเทียบประสิทธิภาพสังเกต L_2 พบว่า เกณฑ์ SBIC(UE) มีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ SBIC เนื่องจากมีร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องสูงกว่า มีค่าเฉลี่ยของประสิทธิภาพสังเกต L_2 สูงกว่า และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประสิทธิภาพสังเกต L_2 ต่ำกว่า เกณฑ์ SBIC มีความเอนเอียงเชิงลบมากกว่าเกณฑ์ SBIC(UE) เนื่องจากค่าประมาณของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อนเมื่อใช้ MLE มีค่าน้อยกว่าค่าประมาณเมื่อใช้ UE กล่าวคือ มีค่าประมาณต่ำเกินไป เหตุผลนี้ทำให้ประสิทธิภาพของเกณฑ์ SBIC ต่ำกว่าเกณฑ์ SBIC(UE)

คำสำคัญ : เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบ; ประสิทธิภาพ; ตัวประมาณไม่เอนเอียง; ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด; BIC

คณะวิทยาศาสตร์และนวัตกรรมดิจิทัล มหาวิทยาลัยทักษิณ

Faculty of Science and Digital Innovation, Thaksin University

* Corresponding Author, Tel. 08 8790 8476, E - mail: warang27@gmail.com

Abstract

This article introduces a new criterion for selecting a simultaneous equations model based on the Bayesian information criterion. The simultaneous equations model (SEM) is widely used in Statistics and Economics. The main characteristic of SEM is that the dependent variable of one equation can be the independent variable of the remaining equations. The new criterion performs the estimation of the error contemporaneous covariance matrix using the unbiased estimator (UE) instead of the maximum likelihood estimator (MLE) in the system of Bayesian information criterion (SBIC), and the new criterion is called SBIC(UE). The performances of SBIC(UE) and SBIC are compared using the extensive simulation study and the observed L_2 performance. It is found that SBIC(UE) is more efficient than SBIC, with a higher percentage of correct model selections, a higher average of the observed L_2 performance, and a lower standard deviation of the observed L_2 performance. SBIC is more negatively biased than SBIC(UE) because the estimate of the error contemporaneous covariance matrix when using MLE is less than the estimate when using UE, i.e., it is underestimated. For this reason, the efficiency of the SBIC is lower than the SBIC(UE).

Keywords: Model Selection Criterion; Efficiency; Unbiased Estimator; Maximum Likelihood Estimator; BIC

บทนำ

เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบได้กลายมาเป็นสิ่งสำคัญในการเลือกตัวแปรที่เหมาะสมสำหรับการสร้างสมการการถดถอยหรือระบบสมการ เช่น สมการหลายชั้น (Simultaneous Equations) เนื่องจากตัวแปรอิสระที่มีอยู่ทั้งหมดนั้นอาจไม่เหมาะสมในการอธิบายความผันแปรของตัวแปรตามหรือการพยากรณ์ค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรตามในอนาคตสำหรับการวิเคราะห์การถดถอยมีการใช้เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบหลายเกณฑ์ เช่น เกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะ (Akaike Information Criterion: AIC) (Akaike, 1974) เกณฑ์สารสนเทศของเบส์ (Bayesian Information Criterion: BIC) (Schwarz, 1978) เกณฑ์สารสนเทศ (Hannan and Quinn Information Criterion: HQIC) (Hannan and Quinn, 1979) เกณฑ์การปรับแก้ของ AIC (AICc) (Hurvich and Tsai, 1989) เกณฑ์การปรับแก้ของ AICc (AICu) (McQuarrie et al., 1997) เกณฑ์สารสนเทศของคูลแบค (Kullback Information Criterion: KIC) (Cavanaugh, 1999) เกณฑ์การปรับแก้ของ KIC (KICc) (Cavanaugh, 2004) เกณฑ์สารสนเทศของฟาม (Pham Information Criterion: PIC) (Pham, 2019) วิธีใหม่ในการเลือกตัวแบบการถดถอยโดยใช้ค่า p สำหรับการทดสอบ t และการทดสอบ F สำหรับเกณฑ์การคัดเลือกตัวแปร และค่า R -squared ที่ปรับแล้วหรือ AIC สำหรับเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่ดีที่สุด (Niyonzima, 2020) และการยกระดับเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบด้วยการทดสอบภาวะสารูปดีสำหรับการประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติ (Rossi et al., 2020) จากเกณฑ์ทั้งหมดที่กล่าวถึงพบว่า เกณฑ์ AIC และ BIC เป็นเกณฑ์ที่นิยมใช้กันทั่วไปและเป็นที่ยอมรับมากกว่าเกณฑ์อื่น ๆ จุดเด่นของเกณฑ์ AIC คือ เป็นเกณฑ์ที่มีประสิทธิภาพเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically Efficient) ดังนั้นในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ เกณฑ์นี้จะคัดเลือกตัวแบบที่มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error: MSE) ต่ำที่สุด อย่างไรก็ตาม เกณฑ์ BIC มีแนวโน้มที่จะคัดเลือกตัวแบบที่มีจำนวนพารามิเตอร์น้อยกว่าเกณฑ์ AIC จึงมีประสิทธิภาพสูงกว่า เนื่องจากเกณฑ์ BIC เป็นเกณฑ์ที่คงเส้นคงวา (Consistency) จึงสามารถระบุตัวแบบที่ถูกต้องเชิงเส้นกำกับด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ 1 ดังนั้นเมื่อตัวแบบที่เป็นไปได้มีลำดับจำกัด (Finite Order) เกณฑ์ AIC ที่มีประสิทธิภาพเชิงเส้นกำกับจะเป็นเกณฑ์ที่ไม่คงเส้นคงวาและมีแนวโน้มที่จะคัดเลือกตัวแบบที่มีจำนวนพารามิเตอร์มากเกินไป (Neath and Cavanaugh, 1997; Giombini and Szroeter, 2007)

สำหรับตัวแบบการถดถอยพบว่า มีการศึกษาและพัฒนาเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบอย่างต่อเนื่อง ในขณะที่เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่ใช้กับตัวแบบสมการหลายชั้นยังมีการศึกษาและพัฒนาไม่มากนัก สมการหลายชั้นเป็นแบบทางสถิติและเศรษฐศาสตร์ที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย ซึ่งมีลักษณะสำคัญ คือ ตัวแปรตามหรือตัวแปรอธิบายภายนอก (External Explanatory Variables) ของสมการหนึ่งอาจเป็นตัวแปรอิสระหรือตัวแปรอธิบาย (Explanatory Variables) ของสมการที่เหลือได้ ดังนั้นตัวแปรตามจะกลายเป็นแบบสุ่มและมีความสัมพันธ์กับค่าคลาดเคลื่อนของสมการที่ปรากฏเป็นตัวแปรอิสระ (Perez-Sanchez et al., 2021) ตัวอย่างของสมการหลายชั้น เช่น การคิดต้นทุนพร้อมกับผลตอบแทนจากการปลูกยางพาราในรูปแบบของระบบสมการหลายชั้น กรณีศึกษาอำเภอป่าพะยอม จังหวัดพัทลุง และอำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช พบว่า ตัวแปรต้นทุนซึ่งเป็นตัวแปรตามในสมการแรกจะเป็นตัวแปรอิสระของสมการผลตอบแทนที่ได้รับในสมการต่อมา (Keerativibool, 2014a) การพัฒนาเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสมการหลายชั้นเกณฑ์แรก คือ เกณฑ์ SAIC (System of Akaike Information Criterion) (Keerativibool et al., 2011) ต่อมามีการแก้ปัญหาเกณฑ์ SAIC ที่คัดเลือกตัวแบบซึ่งมีจำนวนพารามิเตอร์มากเกินไป เรียกเกณฑ์ SBIC (System of Bayesian Information Criterion) (Keerativibool, 2012) อย่างไรก็ตาม เกณฑ์ SBIC มีการใช้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator: MLE) ในการประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อน (Contemporaneous Covariance Matrix of Error) ซึ่งอาจทำให้เกณฑ์ SBIC มีความเอนเอียงเชิงลบ และจะส่งผลให้ประสิทธิภาพของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องจากเกณฑ์ SBIC ต่ำกว่าที่ควรจะเป็น (Keerativibool, 2014b) ดังนั้นการศึกษานี้จึงประยุกต์ใช้แนวคิดของ McQuarrie et al. (1997) ในการใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator: UE) ประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อนเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว

วิธีดำเนินการวิจัย

รูปแบบโครงสร้าง (Structural Form) ของตัวแบบสมการหลายชั้นที่มี M สมการ (ตัวแปรตามหรือตัวแปรอธิบายภายนอก M ตัว) แสดงด้วย $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tM}$ และตัวแปรที่กำหนดไว้ล่วงหน้า K ตัว (ตัวแปรอิสระหรือตัวแปรอธิบาย) แสดงด้วย $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tK}$ สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (1)

$$\begin{aligned}
 y_{t1} &= \gamma_{21}y_{t2} + \gamma_{31}y_{t3} + \dots + \gamma_{M-1,1}y_{t,M-1} + \gamma_{M1}y_{tM} \\
 &\quad + \beta_{11}x_{t1} + \beta_{21}x_{t2} + \dots + \beta_{K1}x_{tK} + u_{t1} \\
 y_{t2} &= \gamma_{12}y_{t1} + \gamma_{32}y_{t3} + \dots + \gamma_{M-1,2}y_{t,M-1} + \gamma_{M2}y_{tM} \\
 &\quad + \beta_{12}x_{t1} + \beta_{22}x_{t2} + \dots + \beta_{K2}x_{tK} + u_{t2} \\
 &\quad \vdots \\
 y_{tM} &= \gamma_{1M}y_{t1} + \gamma_{2M}y_{t2} + \gamma_{3M}y_{t3} + \dots + \gamma_{M-1,M}y_{t,M-1} \\
 &\quad + \beta_{1M}x_{t1} + \beta_{2M}x_{t2} + \dots + \beta_{KM}x_{tK} + u_{tM}
 \end{aligned} \tag{1}$$

ในสมการที่ (1) กำหนดให้ตัวแปรอิสระตัวแรกของทุกสมการ (x_{t1}) มีค่าเท่ากับ 1 พารามิเตอร์ γ และ β แทนสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ ตามลำดับ $u_{t1}, u_{t2}, \dots, u_{tM}$ แทนค่าคลาดเคลื่อนของแต่ละสมการที่มีความสัมพันธ์กัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 รูปแบบโครงสร้างของตัวแบบสมการหลายชั้นสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (2)

$$Y\Gamma + XB = U \tag{2}$$

โดยที่

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1M} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T1} & y_{T2} & \dots & y_{TM} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_{12} & \dots & -\gamma_{1M} \\ -\gamma_{21} & 1 & \dots & -\gamma_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{M1} & -\gamma_{M2} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \dots & x_{TK} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12} & \dots & -\beta_{1M} \\ -\beta_{21} & -\beta_{22} & \dots & -\beta_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{K1} & -\beta_{K2} & \dots & -\beta_{KM} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1M} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{T1} & u_{T2} & \dots & u_{TM} \end{bmatrix}$$

จากรูปแบบโครงสร้างในสมการที่ (2) สามารถเขียนในรูปแบบลดรูป (Reduced Form) ได้ดังสมการที่ (3)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{\Pi} + \mathbf{E} \quad (3)$$

โดยที่ $\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}^{-1}$ แทนเมทริกซ์ของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าขนาด $K \times M$ และ $\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{\Gamma}^{-1}$ แทนเมทริกซ์ของค่าคลาดเคลื่อนที่มีความสัมพันธ์กันขนาด $T \times M$ เมื่อพิจารณาสมการ M สมการในสมการที่ (3) สามารถแสดงเป็นตัวแทนเรียงซ้อนของแต่ละสมการได้ดังสมการที่ (4)

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

โดยที่

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_M \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $\mathbf{y}$ แทนเวกเตอร์ของตัวแปรตามขนาด $TM \times 1$ ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ y_j ขนาด $T \times 1$ จำนวน M เวกเตอร์ $\tilde{\mathbf{X}}$ แทนเมทริกซ์แนวทแยงขนาด $TM \times KM$ ซึ่งประกอบด้วย เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระ $\mathbf{X}$ ขนาด $T \times K$ ในแนวทแยงจำนวน M เมทริกซ์ $\boldsymbol{\pi}$ แทนเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าขนาด $KM \times 1$ ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ π_j ขนาด $K \times 1$ จำนวน M เวกเตอร์ $\boldsymbol{\varepsilon}$ แทนเวกเตอร์ของค่าคลาดเคลื่อนที่มีความสัมพันธ์กันขนาด $TM \times 1$ ซึ่งประกอบด้วย เวกเตอร์ ε_j ขนาด $T \times 1$ จำนวน M เวกเตอร์ และ ε_{ij} แทนค่าคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงปกติเป็นอิสระกัน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ_{ij} นั่นคือ $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_{ij})$ ดังนั้น

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t1} \\ \varepsilon_{t2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{tM} \end{bmatrix} \sim N_M(0, \Sigma) \quad (5)$$

โดยที่ Σ แทนเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อนขนาด $M \times M$

การสร้างเกณฑ์การคัดเลือกตัวแปรเริ่มต้นที่การพิจารณาการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Johnson and Wichern, 1998) เพื่อให้ได้ฟังก์ชันความหนาแน่นปกติร่วมของค่าคลาดเคลื่อน M ตัว ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\pi}$) ดังสมการที่ (6)

$$L(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}, \Sigma \otimes \mathbf{I}_T) = (2\pi)^{-\frac{TM}{2}} |\Sigma \otimes \mathbf{I}_T|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\pi})' (\Sigma^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\pi})\right) \quad (6)$$

โดยที่ $\otimes$ แทน Kronecker Product ลอการิทึมของสมการที่ (6) โดยแทนค่า $\log|\Sigma \otimes \mathbf{I}_T| = T \log|\Sigma|$ จะได้ฟังก์ชันลอการิทึมดังสมการที่ (7)

$$\log L(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}, \Sigma \otimes \mathbf{I}_T) = -\frac{TM}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log|\Sigma| - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\pi})' (\Sigma^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\pi}) \quad (7)$$

กำหนดเวกเตอร์ของตัวประมาณภาวน่าจะเป็นสูงสุด $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\boldsymbol{\pi}}, \tilde{\Sigma})$ จะได้ -2 เท่าของฟังก์ชันลอการิทึมในสมการที่ (7) ดังสมการที่ (8)

$$-2 \log L(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\boldsymbol{\pi}}, \tilde{\Sigma}) = TM \log(2\pi) + T \log|\tilde{\Sigma}| + (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\boldsymbol{\pi}})' (\tilde{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\boldsymbol{\pi}}) \quad (8)$$

พิจารณาพจน์สุดท้ายของสมการที่ (8)

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\boldsymbol{\pi}})' (\tilde{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\boldsymbol{\pi}}) &= tr \left[(\tilde{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\boldsymbol{\pi}}) (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\boldsymbol{\pi}})' \right] \\ &= tr \left[\tilde{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\pi}}) (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\pi}})' \right] \\ &= T tr(\tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\Sigma}) = T tr(\mathbf{I}_M) = TM \end{aligned} \quad (9)$$

แทนค่าสมการที่ (9) ลงในสมการที่ (8) จะได้ดังสมการที่ (10)

$$-2 \log L(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\boldsymbol{\pi}}, \tilde{\Sigma}) = TM [\log(2\pi) + 1] + T \log|\tilde{\Sigma}| \quad (10)$$

เนื่องจากพจน์แรก $TM [\log(2\pi) + 1]$ ในสมการที่ (10) เป็นค่าคงที่สำหรับระบบสมการหลายชั้น M สมการ ที่มีขนาดตัวอย่างในแต่ละสมการ T หน่วย จึงสามารถละเว้นได้จากเกณฑ์ $BIC = -2 \log L(\tilde{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{y}) + (\log T)(p+1)$ (Schwarz, 1978) โดยที่พารามิเตอร์จำนวน $p+1$ ตัวของสมการหลายชั้น คือ พารามิเตอร์สำหรับ $\boldsymbol{\pi}$ จำนวน KM ตัว และพารามิเตอร์สำหรับ Σ จำนวน $M(M+1)/2$ ตัว เมื่อปรับค่าด้วยขนาดตัวอย่าง (T) จะได้เกณฑ์สารสนเทศของเบส์สำหรับตัวแบบสมการหลายชั้น (System of Bayesian Information Criterion: SBIC) (Keerativibool, 2012) ดังสมการที่ (11)

$$SBIC = \log|\tilde{\Sigma}| + \frac{(\log T)}{T} \left(KM + \frac{M(M+1)}{2} \right) \quad (11)$$

โดยที่ $\tilde{\Sigma} = \frac{1}{T} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\pi}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\pi}})$ แทนตัวประมาณภาวน่าจะเป็นสูงสุดของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อน

จากปัญหาการคัดเลือกตัวแบบที่มีจำนวนพารามิเตอร์มากเกินไปของเกณฑ์ AIC (Akaike, 1974) และเกณฑ์ AICc (Hurvich and Tsai, 1989) McQuarrie et al. (1997) ได้เปลี่ยนการประมาณค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนจากเดิมที่ใช้ตัวประมาณภาวน่าจะเป็นสูงสุดเป็นการใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียง จึงได้เกณฑ์ AICu ที่สามารถแก้ปัญหา ค่าประมาณความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนที่ต่ำเกินไปจริง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น จากองค์ความรู้ดังกล่าว ผู้วิจัยจึงแทนที่ตัวประมาณภาวน่าจะเป็นสูงสุดของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อน ($\tilde{\Sigma}$) ด้วยตัวประมาณไม่เอนเอียง ($\hat{\Sigma}$) ลงในสมการที่ (11) จะได้เกณฑ์ System of Bayesian Information Criterion (SBIC) ที่พัฒนาโดยใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียง (UE) เรียกเกณฑ์ใหม่นี้ว่าเกณฑ์ SBIC(UE) ดังสมการที่ (12)

$$SBIC(UE) = \log |\hat{\Sigma}| + \frac{(\log T)}{T} \left(KM + \frac{M(M+1)}{2} \right) \quad (12)$$

โดยที่ $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-K} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\Pi})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\Pi})$ แทนตัวประมาณไม่เอนเอียงของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อน

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์ SBIC และเกณฑ์ SBIC(UE) จะพิจารณาที่ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องและค่าประสิทธิภาพสังเกต L_2 โดยร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องจะพิจารณาจากจำนวนตัวอย่างการจำลองข้อมูลทั้งหมด 1,000 ชุด มีจำนวนชุดที่สามารถคัดเลือกตัวแบบที่มีจำนวนพารามิเตอร์เท่ากับตัวแบบที่สร้างขึ้นคิดเป็นร้อยละเท่าไร ดังสมการที่ (13)

$$\text{ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้อง} = \frac{\text{จำนวนตัวอย่างการจำลองข้อมูลที่มีจำนวนพารามิเตอร์เท่ากับตัวแบบที่สร้างขึ้น}}{1,000} \times 100 \quad (13)$$

สำหรับประสิทธิภาพสังเกต L_2 มีสูตรดังสมการที่ (14) โดยถ้าตัวแบบที่คัดเลือกใกล้เคียงกับตัวแบบที่แท้จริงแล้วประสิทธิภาพสังเกต L_2 จะมีค่าสูงขึ้น ดังนั้นเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่ดีที่สุดจะคัดเลือกตัวแบบที่ให้ประสิทธิภาพสังเกต L_2 สูงกว่าเกณฑ์อื่น ๆ แม้ในกรณีตัวอย่างมีขนาดเล็ก

$$\text{ประสิทธิภาพสังเกต } L_2 = \frac{\min_{1 \leq K \leq K^*} L_2(K)}{L_2(K_s)} \quad (14)$$

โดยที่ $L_2(K) = \frac{1}{T} (\pi - \hat{\pi})' \tilde{\mathbf{X}}' (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) \tilde{\mathbf{X}} (\pi - \hat{\pi})$ แทนระยะห่างระหว่างตัวแบบที่แท้จริงและตัวแบบโดยประมาณ $\min_{1 \leq K \leq K^*} L_2(K)$ แทนค่าที่น้อยที่สุดของ $L_2(K)$ ในชั้น (Class: K^*) ของตัวแบบโดยประมาณที่เป็นไปได้ทั้งหมด และ $L_2(K_s)$ แทนระยะห่างระหว่างตัวแบบที่แท้จริงและตัวแบบที่คัดเลือกโดยใช้เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่พิจารณา

การจำลองข้อมูล

ตัวแบบสมการหลายชั้นในรูปแบบลดรูปที่พิจารณาในการศึกษาครั้งนี้กำหนดระบบสมการจำนวน 2 ชุด ชุดละ 3 สมการ ($M = 3$) ระบบสมการชุดแรกมีค่าพารามิเตอร์ค่อนข้างสูงทำให้สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ง่าย ดังสมการที่ (15)

$$\begin{aligned} y_{i1} &= 1 + 2x_{i2} + 3x_{i3} + 4x_{i4} + \varepsilon_{i1} \\ y_{i2} &= 1 - 0.5x_{i2} - 5x_{i3} - 1.5x_{i4} + \varepsilon_{i2} \\ y_{i3} &= 1 + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + \varepsilon_{i3} \end{aligned} \quad (15)$$

และระบบสมการชุดที่สองมีค่าพารามิเตอร์ค่อนข้างต่ำทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ทำได้ยากขึ้น ดังสมการที่ (16)

$$\begin{aligned} y_{i1} &= 1 + 0.9x_{i2} + 0.8x_{i3} + 0.7x_{i4} + \varepsilon_{i1} \\ y_{i2} &= 1 - 0.25x_{i2} - 0.13x_{i3} - 0.05x_{i4} + \varepsilon_{i2} \\ y_{i3} &= 1 + 0.5x_{i2} + 0.5x_{i3} + 0.5x_{i4} + \varepsilon_{i3} \end{aligned} \quad (16)$$

ขั้นตอนการจำลองข้อมูลแสดงดังนี้

1. สร้างเวกเตอร์ของค่าคลาดเคลื่อนปกติหลายตัวแปรในสมการที่ (5) ขนาด $1,000,000 \times 1$ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างสมการเท่ากับ $\rho_{12} = 0.9$, $\rho_{13} = 0.7$ และ $\rho_{23} = 0.8$

และความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อนเท่ากับ $\sigma_{11} = 0.92 = 0.81$, $\sigma_{22} = 0.82 = 0.64$, $\sigma_{33} = 0.72 = 0.49$, $\sigma_{12} = \rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} = 0.648$, $\sigma_{13} = \rho_{13}\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{33}} = 0.441$ และ $\sigma_{23} = \rho_{23}\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{33}} = 0.448$ จะได้ค่าคลาดเคลื่อนปรกติหลายตัวแปรดังนี้

$$\mathbf{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t1} \\ \varepsilon_{t2} \\ \varepsilon_{t3} \end{bmatrix} \sim N_3 \left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.648 & 0.441 \\ 0.648 & 0.64 & 0.448 \\ 0.441 & 0.448 & 0.49 \end{bmatrix} \right)$$

2. แบ่งค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากข้อ 1 ออกเป็นตัวอย่างการจำลองข้อมูลจำนวน 1,000 ชุด โดยแต่ละชุดมีขนาดตัวอย่าง 3 ขนาด ได้แก่ ตัวอย่างขนาดเล็ก $T = 15, 20$ และ 25 ตัวอย่างขนาดกลาง $T = 30$ และ 50 และตัวอย่างขนาดใหญ่ $T = 100$ และ 500 หน่วย

3. สร้างตัวแปรอิสระ 9 ตัว ได้แก่ $x_{T2}, x_{T3}, \dots, x_{T,10}$ ที่มีค่าสังเกตตัวแปรละ 1,000,000 หน่วย เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปรกติมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 โดยตัวแปรอิสระที่ใช้ในการสร้างตัวแบบสมการหลายชั้นในสมการที่ (15) และสมการที่ (16) คือ x_{T2}, x_{T3}, x_{T4} และตัวแปรอิสระที่ไม่ได้ใช้ในการสร้างตัวแบบสมการหลายชั้นคือ $x_{T5}, x_{T6}, \dots, x_{T,10}$

4. แบ่งตัวแปรอิสระที่ได้จากข้อ 3 ออกเป็นตัวอย่างการจำลองข้อมูลจำนวน 1,000 ชุด โดยแต่ละชุดมีขนาดตัวอย่าง 3 ขนาด ได้แก่ ตัวอย่างขนาดเล็ก $T = 15, 20$ และ 25 ตัวอย่างขนาดกลาง $T = 30$ และ 50 และตัวอย่างขนาดใหญ่ $T = 100$ และ 500 หน่วย

5. ทดสอบปัญหาความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุ (Multicollinearity) ของตัวแปรอิสระในข้อ 4 โดยพิจารณาค่าความคงทนของการยอมรับ (Tolerance) มีค่าไม่น้อยกว่า 0.10 และค่าปัจจัยการขยายตัวของความแปรปรวน (Variance Inflation Factor: VIF) มีค่าน้อยกว่า 10 ทั้งชุดตัวอย่างที่ไม่ผ่านการทดสอบ เก็บตัวอย่างการจำลองข้อมูลจำนวน 1,000 ชุดที่ไม่มีปัญหาความสัมพันธ์เชิงเส้นพหุสำหรับการสร้างตัวแบบสมการหลายชั้นในขั้นตอนต่อไป

6. สร้างตัวแปรตามในสมการหลายชั้นดังสมการที่ (15) และสมการที่ (16) โดยใช้ตัวแปรอิสระจากข้อ 5 และค่าคลาดเคลื่อนจากข้อ 2

7. พิจารณาการนำตัวแปรอิสระเข้าตัวแบบครั้งละ 1 ตัว ตามลำดับ (Sequentially Nested) จนครบตัวแปรอิสระทั้งหมด 9 ตัวที่ได้สร้างในข้อ 3 ในแต่ละครั้งให้นำตัวแปรอิสระเข้าตัวแบบจะคำนวณค่าของเกณฑ์ SBIC ในสมการที่ (11) และเกณฑ์ SBIC(UE) ในสมการที่ (12) แล้วสรุปผลว่าทั้งหมด 9 ครั้งให้นำตัวแปรอิสระเข้าตัวแบบ ครั้งใดมีค่าของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบต่ำที่สุด จะได้ครั้งนั้นเป็นตัวแบบที่คัดเลือกไว้หรือตัวแบบโดยประมาณ แล้วดำเนินการซ้ำจนครบตัวอย่างการจำลองข้อมูลจำนวน 1,000 ชุด

8. จากผลการคัดเลือกตัวแบบในข้อ 7 คำนวณร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้อง ดังสมการที่ (13) และประสิทธิภาพสังเกต L_2 ดังสมการที่ (14)

ผลการทดลอง

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบ โดยการพิจารณาที่ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้อง ดังตารางที่ 1 และ 2 สรุปได้ว่า เกณฑ์ SBIC(UE) ในสมการที่ (12) มีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ SBIC ในสมการที่ (11) หรือสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากกว่าในเกือบทุกขนาดตัวอย่างที่ศึกษาไม่ว่าจะเป็นตัวอย่างขนาดเล็ก ($T = 15, 20$ และ 25) ตัวอย่างขนาดกลาง ($T = 30$ และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ ($T = 500$) ยกเว้นกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ $T = 100$ เกณฑ์ SBIC(UE) มีประสิทธิภาพเท่ากับเกณฑ์ SBIC เนื่องจากสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องเท่ากัน คือ ร้อยละ 100 อีกทั้งในกรณีตัวอย่างขนาดเล็ก ($T = 15, 20$ และ 25) เกณฑ์ SBIC(UE) ยังสามารถแก้ปัญหาการคัดเลือกตัวแบบที่มีจำนวนพารามิเตอร์ในสมการมากเกินไป (Overfit) ที่เกิดขึ้นกับเกณฑ์ SBIC

ตารางที่ 1 ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบสมการหลายชั้นในสมการที่ (15)

ขนาดตัวอย่าง	T	เกณฑ์	K								
			2	3	4*	5	6	7	8	9	10
เล็ก	15	SBIC	0	0	85.2	6.1	1.2	1.3	2	0	4.3
		SBIC(UE)	0	0	96.9	2.6	0.1	0.1	0	0	0.3
	20	SBIC	0	0	96.2	3.1	0.7	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	99.2	0.8	0	0	0	0	0
	25	SBIC	0	0	97.7	2.1	0.2	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	99	1	0	0	0	0	0
กลาง	30	SBIC	0	0	98.7	1.2	0.1	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	99.5	0.5	0	0	0	0	0
	50	SBIC	0	0	99.6	0.4	0	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	99.9	0.1	0	0	0	0	0
ใหญ่	100	SBIC	0	0	100	0	0	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	100	0	0	0	0	0	0
	500	SBIC	0	0	99.9	0.1	0	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	100	0	0	0	0	0	0

* แทนตัวแบบที่แท้จริงที่มีพารามิเตอร์จำนวน 4 ตัว และตัวหนา หมายถึง ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องสูงสุด

ตารางที่ 2 ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบสมการหลายชั้นในสมการที่ (16)

ขนาดตัวอย่าง	T	เกณฑ์	K								
			2	3	4*	5	6	7	8	9	10
เล็ก	15	SBIC	0.4	0.3	84.4	6	1.2	1.3	1.9	0.3	4.2
		SBIC(UE)	2.8	1.7	92.4	2.6	0.1	0.1	0	0	0.3
	20	SBIC	0	0	95.4	3.6	0.7	0.1	0.1	0	0.1
		SBIC(UE)	0.2	0.4	97.5	1.8	0.1	0	0	0	0
	25	SBIC	0	0	97.7	2.1	0.2	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	99	1	0	0	0	0	0
กลาง	30	SBIC	0	0	98.7	1.3	0	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	99.8	0.2	0	0	0	0	0
	50	SBIC	0	0	99.6	0.4	0	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	99.9	0.1	0	0	0	0	0
ใหญ่	100	SBIC	0	0	100	0	0	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	100	0	0	0	0	0	0
	500	SBIC	0	0	99.9	0.1	0	0	0	0	0
		SBIC(UE)	0	0	100	0	0	0	0	0	0

* แทนตัวแบบที่แท้จริงที่มีพารามิเตอร์จำนวน 4 ตัว และตัวหนา หมายถึง ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องสูงสุด

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบ โดยการพิจารณาที่ประสิทธิภาพสังเกต L_2 ดังตารางที่ 3 และ 4 สรุปได้ว่า ในเกือบทุกขนาดตัวอย่างที่ศึกษาไม่ว่าจะเป็นตัวอย่างขนาดเล็ก ($T = 15, 20$ และ 25) ตัวอย่างขนาดกลาง ($T = 30$ และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ ($T = 500$) เกณฑ์ SBIC(UE) ในสมการที่ (12) มีค่าเฉลี่ยของประสิทธิภาพสังเกต L_2 สูงกว่าและมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่ำกว่าเกณฑ์ SBIC ในสมการที่ (11) ยกเว้น กรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ $T = 100$ เกณฑ์ SBIC(UE) มีประสิทธิภาพสังเกต L_2 เท่ากับเกณฑ์ SBIC เนื่องจาก มีค่าเฉลี่ยของประสิทธิภาพสังเกต L_2 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประสิทธิภาพสังเกต L_2 จากตัวแบบสมการหลายชั้นในสมการที่ (15)

ขนาด ตัวอย่าง	T	เกณฑ์	ค่าเฉลี่ย	ค่าเบี่ยงเบน มาตรฐาน	ขนาด ตัวอย่าง	T	เกณฑ์	ค่าเฉลี่ย	ค่าเบี่ยงเบน มาตรฐาน
เล็ก	15	SBIC	0.8264	0.3010	กลาง	30	SBIC	0.9891	0.0808
		SBIC(UE)	0.9145	0.1853		30	SBIC(UE)	0.9946	0.0519
	20	SBIC	0.9610	0.1370		50	SBIC	0.9974	0.0382
		SBIC(UE)	0.9804	0.0831		50	SBIC(UE)	0.9992	0.0172
	25	SBIC	0.9819	0.0951	ใหญ่	100	SBIC	1.0000	0.0005
		SBIC(UE)	0.9894	0.0688		100	SBIC(UE)	1.0000	0.0005
	500	SBIC				500	SBIC	0.9992	0.0243
		SBIC(UE)				500	SBIC(UE)	1.0000	0.0000

ตัวหนา หมายถึง ค่าเฉลี่ยของประสิทธิภาพสังเกต L_2 สูงที่สุดและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประสิทธิภาพสังเกต L_2 ต่ำที่สุด

ตารางที่ 4 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประสิทธิภาพสังเกต L_2 จากตัวแบบสมการหลายชั้นในสมการที่ (16)

ขนาด ตัวอย่าง	T	เกณฑ์	ค่าเฉลี่ย	ค่าเบี่ยงเบน มาตรฐาน	ขนาด ตัวอย่าง	T	เกณฑ์	ค่าเฉลี่ย	ค่าเบี่ยงเบน มาตรฐาน
เล็ก	15	SBIC	0.8218	0.3040	กลาง	30	SBIC	0.9352	0.1389
		SBIC(UE)	0.8916	0.2109		30	SBIC(UE)	0.9374	0.1361
	20	SBIC	0.9271	0.1519		50	SBIC	0.9371	0.1361
		SBIC(UE)	0.9325	0.1434		50	SBIC(UE)	0.9375	0.1359
	25	SBIC	0.9319	0.1443	ใหญ่	100	SBIC	0.9376	0.1359
		SBIC(UE)	0.9354	0.1390		100	SBIC(UE)	0.9376	0.1359
	500	SBIC				500	SBIC	0.9375	0.1359
		SBIC(UE)				500	SBIC(UE)	0.9376	0.1360

ตัวหนา หมายถึง ค่าเฉลี่ยของประสิทธิภาพสังเกต L_2 สูงที่สุด และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประสิทธิภาพสังเกต L_2 ต่ำที่สุด

ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของเกณฑ์ SBIC ในสมการที่ (11) และเกณฑ์ BIC(UE) ในสมการที่ (12) จากตัวอย่างการจำลองข้อมูลจำนวน 1,000 ชุด ดังตารางที่ 5 และ 6 พบว่า เกณฑ์ SBIC มีความเอนเอียงเชิงลบมากกว่าเกณฑ์ SBIC(UE) เนื่องจากเกณฑ์ SBIC ประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ตัวประมาณภาวะนั้นจะเป็นสูงสุด ซึ่งค่าประมาณที่ได้เกิดจากการหารผลรวมกำลังสองของ

ค่าคลาดเคลื่อนด้วยจำนวนข้อมูล (T) จึงมีค่าน้อยกว่าการประมาณค่าโดยใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียงซึ่งประมาณค่าโดยการหารผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อนด้วยผลต่างของจำนวนข้อมูลและจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณค่า ($T-K$) ปัญหานี้ทำให้เกณฑ์ SBIC มีค่าต่ำกว่าที่ควรจะเป็นหรือค่าของเกณฑ์ SBIC ที่คำนวณได้ต่ำเกินไป จึงอาจเป็นสาเหตุหลักที่ทำให้ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องลดน้อยลง และประสิทธิภาพสังเกต L_2 ต่ำกว่าเกณฑ์ SBIC(UE)

ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของเกณฑ์ SBIC และเกณฑ์ SBIC(UE) จากตัวแบบสมการหลายชั้นในสมการที่ (15)

ขนาด ตัวอย่าง	T	เกณฑ์	ค่าสถิติ	K								
				2	3	4*	5	6	7	8	9	10
เล็ก	15	SBIC	$\bar{X}$	5.897	3.166	-1.857	-1.387	-0.925	-0.499	-0.113	2.104	0.393
			S.D.	0.693	0.769	0.854	0.900	0.957	1.031	1.151	1.330	1.524
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	6.326	3.835	-0.927	-0.171	0.607	1.387	2.173	4.852	3.689
			S.D.	0.693	0.769	0.854	0.900	0.957	1.031	1.151	1.330	1.524
	20	SBIC	$\bar{X}$	5.780	2.990	-2.082	-1.659	-1.249	-0.834	-0.429	1.657	0.367
			S.D.	0.574	0.627	0.683	0.706	0.738	0.769	0.799	0.874	0.893
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	6.096	3.477	-1.413	-0.796	-0.179	0.459	1.103	3.451	2.446
			S.D.	0.574	0.627	0.683	0.706	0.738	0.769	0.799	0.874	0.893
	25	SBIC	$\bar{X}$	5.680	2.819	-2.278	-1.911	-1.541	-1.178	-0.816	1.179	-0.105
			S.D.	0.528	0.545	0.566	0.593	0.607	0.623	0.645	0.745	0.695
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	5.930	3.203	-1.755	-1.242	-0.717	-0.192	0.341	2.518	1.427
			S.D.	0.528	0.545	0.566	0.593	0.607	0.623	0.645	0.745	0.695
กลาง	30	SBIC	$\bar{X}$	5.580	2.684	-2.461	-2.137	-1.806	-1.482	-1.150	0.812	-0.495
			S.D.	0.459	0.487	0.493	0.501	0.506	0.522	0.540	0.591	0.571
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	5.787	3.000	-2.032	-1.591	-1.137	-0.685	-0.219	1.882	0.721
			S.D.	0.459	0.487	0.493	0.501	0.506	0.522	0.540	0.591	0.571
	50	SBIC	$\bar{X}$	5.345	2.342	-2.899	-2.665	-2.435	-2.200	-1.968	-0.152	-1.508
			S.D.	0.362	0.377	0.382	0.387	0.390	0.391	0.396	0.437	0.406
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	5.467	2.528	-2.649	-2.349	-2.052	-1.748	-1.445	0.444	-0.839
			S.D.	0.362	0.377	0.382	0.387	0.390	0.391	0.396	0.437	0.406
ใหญ่	100	SBIC	$\bar{X}$	5.091	1.991	-3.342	-3.204	-3.066	-2.928	-2.791	-1.098	-2.515
			S.D.	0.256	0.263	0.264	0.266	0.267	0.268	0.269	0.295	0.272
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	5.151	2.083	-3.219	-3.050	-2.881	-2.710	-2.541	-0.815	-2.199
			S.D.	0.256	0.263	0.264	0.266	0.267	0.268	0.269	0.295	0.272
	500	SBIC	$\bar{X}$	4.774	1.576	-3.861	-3.824	-3.786	-3.749	-3.712	-2.124	-3.638
			S.D.	0.113	0.108	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.118	0.110
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	4.786	1.594	-3.837	-3.794	-3.750	-3.707	-3.664	-2.070	-3.577
			S.D.	0.113	0.108	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.118	0.110

* แทนตัวแบบที่แท้จริงที่มีพารามิเตอร์จำนวน 4 ตัว และตัวหนา หมายถึง ค่าเฉลี่ยของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่ดีที่สุด

ตารางที่ 6 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของเกณฑ์ SBIC และเกณฑ์ SBIC(UE) จากตัวแบบสมการหลายชั้นในสมการที่ (16)

ขนาด ตัวอย่าง	T	เกณฑ์	ค่าสถิติ	K								
				2	3	4*	5	6	7	8	9	10
เล็ก	15	SBIC	$\bar{X}$	-0.088	-0.407	-1.857	-1.387	-0.925	-0.499	-0.113	0.919	0.393
			S.D.	0.727	0.785	0.854	0.900	0.957	1.031	1.151	1.308	1.524
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	0.342	0.263	-0.927	-0.171	0.607	1.387	2.173	3.668	3.689
			S.D.	0.727	0.785	0.854	0.900	0.957	1.031	1.151	1.308	1.524
	20	SBIC	$\bar{X}$	-0.203	-0.602	-2.080	-1.670	-1.253	-0.842	-0.445	0.552	0.354
			S.D.	0.603	0.635	0.659	0.694	0.722	0.753	0.794	0.846	0.889
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	0.113	-0.114	-1.411	-0.807	-0.183	0.450	1.087	2.346	2.434
			S.D.	0.603	0.635	0.659	0.694	0.722	0.753	0.794	0.846	0.889
	25	SBIC	$\bar{X}$	-0.302	-0.747	-2.278	-1.911	-1.541	-1.178	-0.816	0.098	-0.105
			S.D.	0.532	0.545	0.566	0.593	0.607	0.623	0.645	0.703	0.695
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	-0.052	-0.363	-1.755	-1.242	-0.717	-0.192	0.341	1.436	1.427
			S.D.	0.532	0.545	0.566	0.593	0.607	0.623	0.645	0.703	0.695
กลาง	30	SBIC	$\bar{X}$	-0.390	-0.882	-2.446	-2.117	-1.782	-1.457	-1.136	-0.279	-0.485
			S.D.	0.477	0.489	0.499	0.511	0.518	0.531	0.553	0.577	0.583
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	-0.184	-0.566	-2.017	-1.570	-1.112	-0.660	-0.205	0.791	0.731
			S.D.	0.477	0.489	0.499	0.511	0.518	0.531	0.553	0.577	0.583
	50	SBIC	$\bar{X}$	-0.651	-1.229	-2.899	-2.665	-2.435	-2.200	-1.968	-1.227	-1.508
			S.D.	0.362	0.374	0.382	0.387	0.390	0.391	0.396	0.422	0.406
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	-0.528	-1.043	-2.649	-2.349	-2.052	-1.748	-1.445	-0.631	-0.839
			S.D.	0.362	0.374	0.382	0.387	0.390	0.391	0.396	0.422	0.406
ใหญ่	10	SBIC	$\bar{X}$	-0.907	-1.581	-3.342	-3.204	-3.066	-2.928	-2.791	-2.164	-2.515
			S.D.	0.259	0.261	0.264	0.266	0.267	0.268	0.269	0.284	0.272
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	-0.847	-1.490	-3.219	-3.050	-2.881	-2.710	-2.541	-1.881	-2.199
			S.D.	0.259	0.261	0.264	0.266	0.267	0.268	0.269	0.284	0.272
	50	SBIC	$\bar{X}$	-1.219	-1.996	-3.861	-3.824	-3.786	-3.749	-3.712	-3.191	-3.638
			S.D.	0.107	0.108	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.113	0.110
		SBIC(UE)	$\bar{X}$	-1.207	-1.978	-3.837	-3.794	-3.750	-3.707	-3.664	-3.137	-3.577
			S.D.	0.107	0.108	0.110	0.110	0.110	0.110	0.110	0.113	0.110

* แทนตัวแบบที่แท้จริงที่มีพารามิเตอร์จำนวน 4 ตัว และตัวหนา หมายถึง ค่าเฉลี่ยของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่ต่ำที่สุด

สรุปผลและอภิปราย

จากการศึกษาของ Keerativibool (2012) ที่ได้พัฒนาเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสมการหลายชั้นเมื่ออิงตามเกณฑ์สารสนเทศของเบส์ โดยใช้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในการประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อน เรียกเกณฑ์ System of Bayesian Information Criterion (SBIC) พบว่า ค่าประมาณของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะมีค่าต่ำเกินไป เนื่องจากการหารผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อนด้วยจำนวนข้อมูล (T) จึงส่งผลให้เกณฑ์ SBIC มีความเอนเอียงเชิงลบ (Negative Bias) หรือมีค่าประมาณต่ำเกินไป ทำให้ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องและประสิทธิภาพสังเกต L_2 ต่ำกว่าที่ควรจะเป็น โดยจะได้ตัวแบบที่มีจำนวนพารามิเตอร์ในสมการมากเกินไป ดังนั้นการศึกษานี้ผู้วิจัยจึงประมาณค่าของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียง ซึ่งคำนวณจากผลรวมกำลังสองของ

ค่าคลาดเคลื่อนหารด้วยผลต่างของจำนวนข้อมูลและจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณค่า ($T - K$) เรียกชื่อเกณฑ์ใหม่ว่า เกณฑ์ SBIC(UE) เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสมการหลายชั้นทั้ง 2 เกณฑ์ คือ เกณฑ์ SBIC และเกณฑ์ SBIC(UE) นำมาใช้ในการคัดเลือกระบบสมการที่ดีที่สุด ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพโดยการจำลองข้อมูลจำนวน 1,000 ชุด พบว่า ในเกือบทุกขนาดตัวอย่างที่ศึกษาไม่ว่าจะเป็นตัวอย่างขนาดเล็ก ($T = 15, 20$ และ 25) ตัวอย่างขนาดกลาง ($T = 30$ และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ ($T = 500$) เกณฑ์ SBIC(UE) สามารถคัดเลือกตัวแบบที่ถูกต้องได้มากกว่า เกณฑ์ SBIC รวมถึงมีค่าเฉลี่ยของประสิทธิภาพสังเกต L_2 สูงกว่าและมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่ำกว่าเกณฑ์ SBIC ยกเว้นกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ $T = 100$ เกณฑ์ SBIC(UE) สามารถคัดเลือกตัวแบบที่ถูกต้องได้เท่ากับเกณฑ์ SBIC มีค่าเฉลี่ยของประสิทธิภาพสังเกต และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับเกณฑ์ SBIC ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เกณฑ์ SBIC(UE) มีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ SBIC ในทุกสถานการณ์ของการศึกษาจำลอง และสามารถแก้ปัญหาการมีจำนวน พารามิเตอร์ในสมการมากเกินไปได้ ผลการศึกษานี้สอดคล้องกับการศึกษาของ Keerativibool (2014b) ที่พบว่า ค่าของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่เข้าใกล้ค่าอนันต์ (Infinity: ∞) ทำให้ความน่าจะเป็นที่จะคัดเลือกตัวแบบได้ จำนวนพารามิเตอร์มากเกินไปเข้าใกล้ 0 แต่จะมีความเสี่ยงที่จะมีความน่าจะเป็นที่จะคัดเลือกตัวแบบได้จำนวนพารามิเตอร์ น้อยเกินไปเพิ่มขึ้น สอดคล้องกับผลการศึกษาในตารางที่ 2 ที่พบว่า กรณีตัวอย่างขนาดเล็ก $T = 15$ เกณฑ์ SBIC(UE) มีร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบได้จำนวนพารามิเตอร์มากเกินไป ($K = 5, 6, 7, 8, 9$ และ 10) เข้าใกล้ 0 แต่มีร้อยละ ของการคัดเลือกตัวแบบได้จำนวนพารามิเตอร์น้อยเกินไป ($K = 2$ และ 3) สูงกว่าเกณฑ์ SBIC

ปัจจุบันยังมีการศึกษาจำนวนน้อยเกี่ยวกับเกณฑ์ในการคัดเลือกตัวแบบสมการหลายชั้น ดังนั้นการศึกษารังต่อไป ผู้วิจัยพยายามพัฒนาเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบเกณฑ์อื่น ๆ เพื่อใช้ในการคัดเลือกตัวแบบสมการหลายชั้น เช่น เกณฑ์สารสนเทศของคุลแบค (KIC) โดยใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียงในการประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ ค่าคลาดเคลื่อน จากนั้นเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการคัดเลือกตัวแบบที่ถูกต้อง รวมถึงการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษานี้ได้รับงบประมาณสนับสนุนจากกองทุนส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม (กองทุนส่งเสริม ววน.) โดยมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2567

References

- Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723. <https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100705>
- Cavanaugh, J.E. (1999). A Large-Sample Model Selection Criterion Based on Kullback's Symmetric Divergence. *Statistics & Probability Letters*, 42(4), 333-343. [https://doi.org/10.1016/S0167-7152\(98\)00200-4](https://doi.org/10.1016/S0167-7152(98)00200-4)
- Cavanaugh, J.E. (2004). Criteria for Linear Model Selection Based on Kullback's Symmetric Divergence. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 46(2), 257-274. <https://doi.org/10.1111/j.1467-842X.2004.00328.x>
- Giombini, G. and Szroeter, J. (2007). Quasi Akaike and Quasi Schwarz Criteria for Model Selection: A Surprising Consistency Result. *Economics Letters*, 95(2), 259-266. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2006.10.019>
- Hannan, E.J. and Quinn, B.G. (1979). The Determination of the Order of an Autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology*, 41(2), 190-195.

- Hurvich, C.M. and Tsai, C.L. (1989). Regression and Time Series Model Selection in Small Samples. *Biometrika*, 76(2), 297-307. <https://doi.org/10.1093/biomet/76.2.297>
- Johnson, R.A. and Wichern, D.W. (1998). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. (4th ed). Englewood Cliffs, Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- Keerativibool, W. (2012). New Criteria for Selection in Simultaneous Equations Model. *Thailand Statistician*, 10(2), 163-181.
- Keerativibool, W., Jitthavech, J. and Lorchirachoonkul, V. (2011). Model Selection in a System of Simultaneous Equations Model. *Communications Statistics - Theory Methods*, 40(3), 373-393. <https://doi.org/10.1080/03610920903353717>
- Keerativibool, W. (2014a). Costs and Benefits Gained from Planting Para Rubber in the Form of System of Simultaneous Equations: A Case Study of Pa Phayom District, Phatthalung Province and Thung Song District, Nakhon Si Thammarat Province. *NIDA Development Journal*, 54(3), 95-124.
- Keerativibool, W. (2014b). Study on the Penalty Functions of Model Selection Criteria. *Thailand Statistician*, 12(2), 161-178.
- McQuarrie, A.D.R., Shumway, R.H. and Tsai, C.L. (1997). The Model Selection Criterion AICu. *Statistics and Probability Letters*, 34(3), 285-292.
- Neath, A.A. and Cavanaugh, J.E. (1997). Regression and Time Series Model Selection Using Variants of the Schwarz Information Criterion. *Communications Statistics-Theory Methods*, 26(3), 559-580. <https://doi.org/10.1080/03610929708831934>
- Niyonzima, F. (2020). A New Method for Regression Model Selection. *Global Science Research Journals*, 8(2), 1858-1899.
- Perez-Sanchez, B., Gonzalez, M., Perea, C. and Lopez-Espin, J.J. (2021). A New Computational Method for Estimating Simultaneous Equations Models Using Entropy as a Parameter Criteria. *Mathematics*, 9(7), 1-9. <https://doi.org/10.3390/math9070700>
- Pham, H. (2019). A New Criterion for Model Selection. *Mathematics*, 7(12), 1215. <https://doi.org/10.3390/math7121215>
- Rossi, R., Murari, A., Gaudio, P. and Gelfusa, M. (2020). Upgrading Model Selection Criteria with Goodness of Fit Tests for Practical Applications. *Entropy*, 22(4), 1-13. <https://doi.org/10.3390/e22040447>
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461-464.