

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1$

The Solutions of Diophantine Equation $\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1$

พัชรา ม่วงการ¹ จักรพันธ์ จันทโสภา¹ และชลธิศ เสือนุ่ม^{1*}

Patchara Muangkarn¹ Jakkraphan Janthasopha¹ and Cholatis Suanoom^{1*}

Received: March 15, 2024; Revised: April 26, 2024; Accepted: April 29, 2024

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เราแนะนำผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบ $\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1$ เมื่อ v_1 เป็น

จำนวนเต็มบวก โดยที่ $2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ และ $k = v_1$ โดยผลการวิจัยพบว่า จะมีเพียง 1 ผลเฉลย เมื่อ $v_1 = 2$ จะมีเพียง 3 ผลเฉลยเมื่อ $v_1 = 3$ และจะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 4 ผลเฉลยเมื่อ $v_1 \geq 4$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์; ผลเฉลยทั่วไปของสมการ; สมการเชิงเส้น

¹ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

¹ Faculty Science and Technology, Kamphaeng Phet Rajabhat University

* Corresponding Author; Tel. 06 1416 1559, E - mail: cholatis.suanoom@gmail.com

Abstract

In this paper, we introduce solutions of the Diophantine equation on the following from:

$$\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1 \text{ where } v_1 \text{ are positive integer such that } 2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k \text{ and } k = v_1.$$

The results show that there will be only 1 solution when $v_1 = 2$, there will be only 3 solutions when $v_1 = 3$, and there will be at least 4 partial solutions when $v_1 \geq 4$.

Keywords: Diophantine Equation; General Solutions of Equations; Linear Equation

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ เป็นสมการที่สนใจผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น อาจจะเป็นสมการดีกรีมากกว่าหนึ่ง อาจจะมีตัวแปรเดียวหรือหลายตัวแปร หรืออาจเป็นระบบสมการที่กำหนดตัวแปรมากกว่าจำนวนสมการ และเป็นสาขาหนึ่งในการศึกษาทฤษฎีจำนวน ในปี พ.ศ. 2561 [1] ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1}{v_1} + \frac{3}{v_2} + \frac{5}{v_3} + \dots + \frac{2k+1}{v_k} = 1$ (1) และ $\frac{2}{v_1} + \frac{4}{v_2} + \frac{6}{v_3} + \dots + \frac{2k}{v_k} = 1$ (2) เมื่อ $2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k = v_1$ โดยผลการวิจัยพบว่า สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ (1) เมื่อ $v_1 = 2$ และ $v_1 = 3$ จะมีผลเฉลย 1 คำตอบ และ 4 คำตอบ ตามลำดับ และเมื่อ $v_1 \geq 4$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 4 คำตอบ และสำหรับสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบ (2) เมื่อ $v_1 = 2$ และ $v_1 = 3$ จะมีผลเฉลย 1 คำตอบ และ 8 คำตอบ ตามลำดับ เมื่อ $v_1 = 4$ และ $v_1 \geq 5$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 2 คำตอบ และอย่างน้อย 4 คำตอบ ตามลำดับต่อไป ในปี พ.ศ. 2564 [2] ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบของ $\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} + \frac{3}{v_3} + \dots + \frac{k}{v_k} = 1$ เมื่อ $2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $k = v_1$ ในปี พ.ศ. 2565 ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1^2}{v_1} + \frac{2^2}{v_2} + \frac{3^2}{v_3} + \dots + \frac{k^2}{v_k} = 1$ เมื่อ $2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k = v_1$ โดยผลการวิจัยพบว่า เมื่อ $v_1 = 2$ จะมีผลเฉลยเพียง 1 ผลเฉลย และ $v_1 = 3$ จะมีผลเฉลย 2 ผลเฉลย และเมื่อ $v_1 \geq 4$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 4 ผลเฉลย และในปี พ.ศ. 2565 [3] ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1^2}{v_1} + \frac{2^2}{v_2} + \frac{3^2}{v_3} + \dots + \frac{k^2}{v_k} = 1$ เมื่อ $2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k = x_1$

จากงานวิจัยดังกล่าวมาผู้วิจัยได้ศึกษาและปรับเปลี่ยนรูปแบบของตัวเศษของสมการไดโอแฟนไทน์เป็นจำนวนกำลังสี่ดังต่อไปนี้ $\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1$ เมื่อ v_1 เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ และ $k = v_1$ เพื่อทำการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการนี้ โดยใช้วิธีการที่ได้แนวคิดมาจากผลงานของ Nechemia Burstein

ผลการศึกษา

ในบทนี้ผู้ศึกษาจะศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1$ เมื่อ $2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k = v_1$

ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1$

เมื่อ $2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k = v_1$

จะได้ว่า (i) มีเพียงผลเฉลยเดียว เมื่อ $v_1 = 2$

(ii) มีเพียง 3 ผลเฉลย เมื่อ $v_1 = 3$

(iii) มีอย่างน้อย 4 ผลเฉลย เมื่อ $v_1 \geq 4$

การพิสูจน์ จะแบ่งเป็น 3 กรณี

(i) กรณี $v_1 = 2$

$$\text{พิจารณา } \frac{1^4}{2} + \frac{2^4}{v_2} = 1$$

$$\text{จะได้ } \frac{16}{v_2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } v_2 = 32$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อ $v_1 = 2$

จะได้ผลเฉลยของสมการเพียงผลเฉลยเดียว คือ $v_2 = 32$

ดังนั้น กรณี $v_1 = 2$ จะมีเพียงผลเฉลยเดียว คือ 32

(ii) กรณี $v_1 = 3$

$$\text{พิจารณา } \frac{1^4}{3} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} = 1, \quad \frac{1}{3} + \frac{16}{v_2} + \frac{81}{v_3} = 1$$

$$\text{จะได้ } \frac{16}{v_2} + \frac{81}{v_3} = \frac{2}{3}$$

เมื่อ $v_2 = 4, 5, 6, \dots, 24$

จะทำให้ $\frac{16}{v_2} \geq \frac{2}{3}$ ดังนั้น $\frac{16}{v_2} + \frac{81}{v_3}$ จะมีค่ามากกว่า $\frac{2}{3}$ แสดงว่า เมื่อ $v_2 \leq 24$ จะทำให้สมการไม่มีผลเฉลย

และเมื่อพิจารณา $v_2 = 25, 26, 27, \dots, 145$

ดังนั้น เมื่อ $v_2 \geq 145$ จะทำให้ค่าของ $\frac{16}{v_2} + \frac{81}{v_3}$ น้อยกว่า $\frac{2}{3}$ แสดงว่า $v_2 \geq 145$ จะทำให้สมการไม่มี

ผลเฉลย

$$\text{เนื่องจาก } \frac{16}{145} + \frac{81}{146} < \frac{2}{3}$$

จะได้ $\frac{16}{32} + \frac{81}{v_3} = \frac{2}{3}$, $\frac{16}{48} + \frac{64}{v_3} = \frac{2}{3}$ และ $\frac{16}{96} + \frac{64}{v_3} = \frac{2}{3}$ ตามลำดับ

ดังนั้น $v_2 = 486,243$ และ 162 ตามลำดับ

ดังนั้น กรณี $v_1 = 3$ สมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1$ จะมีผลเฉลยเพียง 3 ผลเฉลย

ได้แก่ $(3,32,486)$, $(3,48,243)$ และ $(3,96,162)$

(iii) กรณีที่ $v_1 \geq 4$ จะพิจารณาผลเฉลยบางส่วน ในรูปผลเฉลยทั่วไปดังนี้
จะหาผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 1

$$\begin{aligned} 1 &= (1+1+1+\dots+1) \cdot \frac{1}{v_1} \\ &= \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_1} \\ &= \frac{1^4}{1^4} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{2^4}{2^4} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{3^4}{3^4} \cdot \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4} \cdot \frac{1}{v_1} \\ &= \frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $v_1 < 2^4 v_1 < 3^4 v_1 < \dots < v_1^4 v_1$ และ $k = v_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 1 จะอยู่ในรูป

$$= \frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} = 1 \quad (1)$$

เมื่อ $v_1 = v_1, v_2 = 2^4 v_1, v_3 = 3^4 v_1, \dots, v_k = v_1^4 v_1$

จะหาผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 2

เนื่องจาก $\frac{1}{N} = \frac{1}{N+M} + \frac{M}{N(N+M)}$

กำหนดให้ $N = v_1$ และ $M = 1$ จะได้ $\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_1+1} + \frac{1}{v_1(v_1+1)}$

แทนค่าสมการข้างต้นใน (1) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1+1} + \frac{1}{v_1(v_1+1)} + \left[\frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} \right] &= 1 \\ \frac{1}{v_1+1} + \left[\frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} \right] + \frac{1}{v_1(v_1+1)} &= 1 \\ \frac{1}{v_1+1} + \left[\frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} \right] + \left[\frac{(v_1+1)^4}{(v_1+1)^4} \cdot \frac{1}{v_1(v_1+1)} \right] &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{v_1+1} + \left[\frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} \right] + \left[\frac{(v_1+1)^4}{(v_1+1)^4} \cdot \frac{1}{v_1(v_1+1)} \right] = 1$$

$$\frac{1}{v_1+1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1+1-1)} + \frac{3^4}{3^4(v_1+1-1)} + \dots + \frac{(v_1+1-1)^4}{(v_1+1-1)^4(v_1+1-1)} \right] + \frac{(v_1+1)^4}{(v_1+1-1)(v_1+1)^5} = 1$$

แทนค่า v_1+1 ด้วย Y จะได้

$$\frac{1}{Y_1} + \left[\frac{2^4}{2^4(Y_1-1)} + \frac{3^4}{3^4(Y_1-1)} + \dots + \frac{(Y_1-1)^4}{(Y_1-1)^4(Y_1-1)} \right] + \frac{Y_1^4}{(Y_1-1)Y_1^5} = 1$$

และแทนค่า Y ด้วย v_1 จะได้

$$\frac{1}{v_1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-1)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-1)} + \dots + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^4(v_1-1)} \right] + \frac{v_1^4}{(v_1-1)v_1^5} = 1$$

จาก $v_1 \geq 4$ จะได้ว่า $4v_1 > v_1 + 4$

$$4(4)v_1 > 4(v_1 + 4)$$

$$16v_1 > 4v_1 + 16$$

$$16v_1 - 16 > 4v_1$$

$$2^4(v_1 - 1) > 4v_1$$

นั่นคือ $2^4(v_1 - 1) > 4v_1$

จึงทำให้ได้ $v_1 < 2^4(v_1 - 1) < 3^4(v_1 - 1) < \dots < (v_1 - 1)^4(v_1 - 1) < (v_1 - 1)v_1^5$ และ $k = x_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 2 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1^4}{v_1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-1)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-1)} + \dots + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^4(v_1-1)} \right] + \frac{v_1^4}{v_1^5(v_1-1)} = 1 \quad (2)$$

เมื่อ $v_1 = v_1, v_2 = 2^4(v_1 - 1), v_3 = 3^4(v_1 - 1), \dots, v_{k-1} = (v_1 - 1)^4(v_1 - 1), v_k = v_1^5(v_1 - 1)$

จะหาผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 3

$$\text{เนื่องจาก } \frac{1}{N} = \frac{1}{N+M} + \frac{M}{N(N+M)}$$

$$\text{กำหนดให้ } N = x_1 \text{ และ } M = 1 \text{ จะได้ } \frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_1+1} + \frac{1}{v_1(v_1+1)}$$

แทนค่าสมการข้างต้นใน (2) จะได้

$$\frac{1}{v_1+1} + \frac{1}{v_1(v_1+1)} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-1)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-1)} + \dots + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^4(v_1-1)} \right] + \frac{v_1^4}{v_1^5(v_1-1)} = 1$$

$$\frac{1}{v_1+1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-1)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-1)} + \dots + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^4(v_1-1)} \right] + \frac{v_1^4}{v_1^5(v_1-1)} + \frac{1}{v_1(v_1-1)} = 1$$

$$\frac{1}{v_1+1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-1)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-1)} + \dots + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^4(v_1-1)} \right] + \frac{v_1^4}{v_1^5(v_1-1)} + \frac{(v_1+1)^4}{(v_1-1)^4} \cdot \frac{1}{v_1(v_1+1)} = 1$$

$$\frac{1}{v_1+1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1+1-1-1)} + \frac{3^4}{3^4(v_1+1-1-1)} + \dots + \frac{(v_1+1-1-1)^4}{(v_1+1-1-1)^4(v_1+1-1-1)} \right] + \frac{(v_1+1-1)^4}{(v_1+1-1)^5(v_1+1-1-1)} + \frac{(v_1+1)^4}{(v_1+1)^4(v_1+1-1)(v_1+1)} = 1$$

แทนค่า v_1+1 ด้วย Y จะได้

$$\frac{1}{Y} + \left[\frac{2^4}{2^4(Y-2)} + \frac{3^4}{3^4(Y-2)} + \dots + \frac{(Y-2)^4}{(Y-2)^4(Y-2)} \right] + \frac{(Y-1)^4}{(Y-1)^5(Y-2)} + \frac{Y^4}{Y^4(Y-1)(Y)} = 1$$

และแทนค่า Y ด้วย v_1 จะได้

$$\frac{1}{v_1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-2)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-2)} + \dots + \frac{(v_1-2)^4}{(v_1-2)^4(v_1-2)} \right] + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^5(v_1-2)} + \frac{v_1^4}{v_1^5(v_1-1)} = 1$$

จาก $v_1 \geq 4$ จะได้ว่า $v_1 + 4v_1 > v_1 + 8$

$$4(4)v_1 > 4(v_1 + 4)$$

$$16v_1 > 4v_1 + 32$$

$$16v_1 - 32 > 4v_1$$

$$2^4(v_1 - 2) > 4v_1$$

ดังนั้น $4(v_1 - 2) > v_1$

นั่นคือ $2^4(v_1 - 2) > v_1$

จาก $(v_1 - 1) > (v_1 - 2)$ จะได้ $(v_1 - 1)^4 \geq (v_1 - 2)^4$ ดังนั้น $(v_1 - 2)^4 < (v_1 - 1)^4$

จึงทำให้ได้ว่า $v_1 < 2^4(v_1 - 2) < 3^4(v_1 - 2) < \dots < (v_1 - 2)^4(v_1 - 2) < (v_1 - 2)(v_1 - 1)^4 < v_1^5(v_1 - 1)$

และ $k = v_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 3 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1}{v_1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-2)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-2)} + \dots + \frac{(v_1-2)^4}{(v_1-2)^4(v_1-2)} \right] + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^5(v_1-2)} + \frac{v_1^4}{v_1^5(v_1-1)} = 1 \quad (3)$$

$$\text{ซึ่ง } v_1 = v_1, v_2 = 2^4(v_1 - 2), v_3 = 3^4(v_1 - 2), \dots, v_{n-2} = (v_1 - 2)^4(v_1 - 2), \\ v_{k-1} = (v_1 - 2)(v_1 - 1)^5, v_k = v_1^5(v_1 - 1)$$

จะหาผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 4

$$\text{จากรูปแบบเศษส่วน } \frac{1}{N} = \frac{1}{N+M} + \frac{M}{N(N+M)}$$

กำหนดให้ $N = x_1$ และ $M = T$ โดยที่ T เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $T = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{15v_1}{16} \right\rfloor$

แทนค่าสมการข้างต้น ใน (1) จะได้

$$\frac{1}{v_1 + T} + \frac{T}{v_1(v_1 + T)} + \left[\frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} \right] = 1$$

$$\frac{1}{v_1 + T} + \left[\frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} \right] + \frac{T}{v_1(v_1 + T)} = 1$$

$$\frac{1^4}{v_1 + T} + \frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} + \left[\underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_T \cdot \frac{T}{v_1(v_1 + T)} \right] = 1$$

$$\frac{1^4}{v_1 + T} + \frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} + \left[\frac{(v_1 + 1)^4}{(v_1 + 1)^4} + \frac{(v_1 + 2)^4}{(v_1 + 2)^4} + \dots + \frac{(v_1 + T)^4}{(v_1 + T)^4} \right] \cdot \frac{1}{v_1(v_1 + T)} = 1$$

$$\frac{1^4}{v_1 + T} + \frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} + \frac{(v_1 + 1)^4}{(v_1 + 1)^4 v_1(v_1 + T)} + \frac{(v_1 + 2)^4}{(v_1 + 2)^4 v_1(v_1 + T)} + \dots + \frac{(v_1 + T)^4}{(v_1 + T)^4 x_1(v_1 + T)} = 1$$

จะเห็นว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูป $k = x_1$ จึงจัดรูปดังนี้

$$\frac{1^4}{v_1 + T} + \frac{2^4}{2^4(v_1 + T - T)} + \frac{3^4}{3^4(v_1 + T - T)} + \dots + \frac{(v_1 + T - T)^4}{(v_1 + T - T)^4(v_1 + T - T)} \\ + \frac{(v_1 + T - T + 1)^4}{(v_1 + T - T + 1)^4(v_1 + T - T)(v_1 + T)} + \frac{(v_1 + T - T + 2)^4}{(v_1 + T - T + 2)^4(v_1 + T - T)(v_1 + T)} \\ + \dots + \frac{(v_1 + T)^4}{(v_1 + T)^4(v_1 + T - T)(v_1 + T)} = 1$$

จากนั้นแทนค่า $v_1 + T$ ด้วย Y จะได้

$$\frac{1^4}{Y} + \frac{2^4}{2^4(Y - T)} + \frac{3^4}{3^4(Y - T)} + \dots + \frac{(Y - T)^4}{(Y - T)^4 Y - T} + \frac{(Y - T + 1)^4}{(Y - T + 1)^4(Y - T)(Y)} \\ + \frac{(Y - T + 2)^4}{(Y - T + 2)^4(Y - T)(Y)} + \dots + \frac{(Y)^4}{(Y)^4(Y - T)(Y)} = 1$$

จากนั้นแทนค่า Y ด้วย v_1 จะได้

$$\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{2^4(v_1-T)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-T)} + \dots + \frac{(v_1-T)^4}{(v_1-T)^4(v_1-T)} + \frac{(v_1-T+1)^4}{(v_1-T+1)^4(v_1-T)v_1} + \frac{(v_1-T+2)^4}{(v_1-T+2)^4(v_1-T)v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4(v_1-T)v_1} = 1$$

$$\text{เมื่อ } T = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{15v_1}{16} \right\rfloor$$

$$\text{จาก } T < \frac{15v_1}{16}$$

$$\text{จะได้ว่า } v_1 - T > v_1 - \frac{15v_1}{16}$$

$$v_1 - T + 2 > v_1 - \frac{15v_1}{16} + 2$$

$$v_1 - T + 2 > \frac{16v_1 - 15v_1 + 32}{16}$$

$$\text{จึงทำให้ } v_1 - T + 2 > \frac{v_1 + 31}{16}$$

$$\text{และ } v_1 \geq 4 \text{ จึงทำให้ได้ว่า } v_1 - T + 2 > 1$$

$$\text{พิจารณา } 1 < (v_1 - T + 2) + 1$$

$$(v_1 - T) < (v_1 - T)(v_1 - T + 2) + 1$$

$$(v_1 - T) < ((v_1 - T) + 1)^4$$

$$(v_1 - T)^4(v_1 - T) < (v_1 - T + 1)^4 \cdot v_1$$

$$\text{จึงทำให้ได้ว่า } v_1 < 2^4(v_1 - T) < 3^4(v_1 - T) < \dots < (v_1 - T)^4(v_1 - T) < (v_1 - T + 1)^4(v_1 - T)v_1$$

$$< (v_1 - T + 2)^4(v_1 - T)v_1 < x_1^4(v_1 - T)v_1 \text{ และ } k = v_1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 4 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{2^4(v_1-T)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-T)} + \dots + \frac{(v_1-T)^4}{(v_1-T)^4(v_1-T)} + \frac{(v_1-T+1)^4}{(v_1-T+1)^4(v_1-T)v_1} + \frac{(v_1-T+2)^4}{(v_1-T+2)^4(v_1-T)v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4(v_1-T)v_1} = 1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{ซึ่ง } v_1 &= v_1, v_2 = 2^4(v_1 - T), v_3 = 3^4(v_1 - T), \dots, v_{v_1-T} = (v_1 - T)^4(v_1 - T), \\ v_{v_1-T+1} &= (v_1 - T + 1)^4(v_1 - T)v_1, v_{2v_1-T+2} = (v_1 - T + 2)^4(v_1 - T)v_1, \dots, \\ v_k &= v_1^4(v_1 - T)v_1 \end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } T = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{15v_1}{16} \right\rfloor$$

สรุปได้ว่า เมื่อ $v_1 \geq 4$ สมการนี้จะมีผลเฉลยทั่วไปบางส่วนอย่างน้อย 4 ผลเฉลย ได้แก่

ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 1 :

$$\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{2^4 v_1} + \frac{3^4}{3^4 v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4 v_1} = 1$$

ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 2 :

$$\frac{1^4}{v_1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-1)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-1)} + \dots + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^4(v_1-1)} \right] + \frac{v_1^4}{v_1^5(v_1-1)} = 1$$

ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 3 :

$$\frac{1}{v_1} + \left[\frac{2^4}{2^4(v_1-2)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-2)} + \dots + \frac{(v_1-2)^4}{(v_1-2)^4(v_1-2)} \right] + \frac{(v_1-1)^4}{(v_1-1)^5(v_1-2)} + \frac{v_1^4}{v_1^5(v_1-1)} = 1$$

ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบที่ 4 :

$$\begin{aligned} & \frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{2^4(v_1-T)} + \frac{3^4}{3^4(v_1-T)} + \dots + \frac{(v_1-T)^4}{(v_1-T)^4(v_1-T)} + \frac{(v_1-T+1)^4}{(v_1-T+1)^4(v_1-T)v_1} \\ & + \frac{(v_1-T+2)^4}{(v_1-T+2)^4(v_1-T)v_1} + \dots + \frac{v_1^4}{v_1^4(v_1-T)v_1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } T = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{15v_1}{16} \right\rfloor$$

สรุปผลและการอภิปรายผล

ในบทความนี้ เราแนะนำผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบ $\frac{1^4}{v_1} + \frac{2^4}{v_2} + \frac{3^4}{v_3} + \dots + \frac{k^4}{v_k} = 1$ เมื่อ v_i เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ และ $k = v_1$ โดยผลการวิจัยพบว่า จะมีเพียง 1 ผลเฉลยเมื่อ $v_1 = 2$ จะมีเพียง 3 ผลเฉลยเมื่อ $v_1 = 3$ และจะมีผลเฉลยทั่วไปบางส่วนอย่างน้อย 4 ผลเฉลยเมื่อ $v_1 \geq 4$

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

References

- [1] Thamkaew, P., Kameeh, P., Maneelek, P., and Wongmookham, S. (2019). Solutions of the Diophantine equation (1) $1/v_1 + 3/v_2 + 5/v_3 + \dots + (2k-1)/v_k = 1$ and (2) $2/v_1 + 4/v_2 + 6/v_3 + \dots + 2k/v_k = 1$. **Sakthong: Journal of Science and Technology (STTT)**. Vol. 6, No. 1, pp. 1-10
- [2] Burshtein, N. (2017). On solution of the Diophantine equation, $1/v_1 + 2/v_2 + 3/v_3 + \dots + k/v_k = 1$ when $2 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$ are integers and $k = v_1$. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**. Vol. 23, Number 2, pp. 30-35
- [3] Thamkaew, P. and Thamkaew, J. (2022). Solutions of the Diophantine Equation $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \dots + \frac{k^2}{x_k} = 1$. **Science and Technology Nakhon Sawan Rajabhat University Journal**. Vol. 14, Issue 20, pp. 128-126