ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $15^x + 4^y = z^2$

SOLUTIONS OF THE DIOPHANTINE EQUATION $15^x + 4^y = z^2$

อภิวัฒน์ คำภีระ* และเกียรติศักดิ์ กุมภาพันธ์
Abhiwat Kambheera* and Kiattisak Kumpapan

บทคัดย่อ

ในบทความนี้นักวิจัยได้ดำเนินการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $15^x + 4^y = z^2$ ซึ่งพบว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z) = (1,0,4)$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลย คาตาลานไทด์

Abstract

In this paper, we studied solutions of the Diophantine equation $15^x + 4^y = z^2$ has a unique non-negative integer. We found that this equation has solution exactly (x, y, z) is $(1, 0, 4)$.

Keywords: Diophantine equation, Solution, Catalan's type

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ อำเภอเมือง จังหวัดเพชรบูรณ์ 67000
Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University, Muang District, Phetchabun Province 67000
*corresponding author e-mail: apiwat.khu@pcru.ac.th
Received: 10 April 2020; Revised: 24 June 2020; Accepted: 30 June 2020

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (diophantion equation) คือ สมการใด ๆ ที่มีตัวแปรหนึ่งตัว หรือมากกว่าหนึ่งตัวและผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม (Sierpinski, 1964; Mordell, 1969; Andrew, 1971; Kenneth, 2000; Silverman, 2001; Punnim & Prapaphot, 2004; David, 2007; Khunpanuk, 2014) และสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น n ตัวแปร (Linear Diophantion equation in n variables) คือ สมการที่อยู่ในรูป $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ไม่เท่ากับศูนย์ และ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรจำนวน n ตัว เรียก $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ ก็ต่อเมื่อ $a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n = b$ (Khunpanuk, 2014; Punnim & Prapaphot , 2004; Andrew, 1971; David, 2007; Kenneth, 2000; Mordell, 1969; Silverman, 2001; Sierpinski, 1964) ซึ่งที่ผ่านมามีนักวิจัยที่ให้ความสนใจการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์อย่างหลากหลาย โดยในปี ค.ศ. 1952 LeVeque (1952) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2002 Sandor (2002) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 3^y = 6^z$ และ $4^x + 18^y = 22^z$ และในปี ค.ศ. 2007 Acu (2007) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ ซึ่งพบว่าสมการมีผลเฉลยสองผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x,y,z)=(3,0,3)$ และ $(x,y,z)=(2,1,3)$ จากนั้นในปี ค.ศ. 2011 Singta & Chontchaisthit (2011) ได้ค้นพบผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + 7^y = z^2$ และ $4^x + 11^y = z^2$ ซึ่งพบว่าผลเฉลยของสมการทั้งสองไม่มีผลเฉลยในเซตจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปี ค.ศ.เดียวกัน Suvarnamani (2011) ก็ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ พบว่า สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเช่นเดียวกัน ซึ่งผลงานการวิจัยที่กล่าวมานี้ต่างก็ได้ใช้ข้อคาดการณ์ซึ่งอยู่ในรูปคาตาลานไทด์ (Catalan's type) ในการพิสูจน์ผลเฉลยของสมการ ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ผู้วิจัยมีแนวคิดที่จะศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $15^x + 4^y = z^2$ โดยการนำเสนอการพิสูจน์ผลเฉลยของสมการนี้เป็นแนวคิดหนึ่งที่เป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่สนใจศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดแฟนไทน์

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษา เรื่อง ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $15^x + 4^y = z^2$ ผู้วิจัยได้ศึกษา และสร้างบทตั้งที่สำคัญสำหรับงานวิจัย ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1 สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ โดยที่ a, b, x, y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y)=(3, 2, 2, 3)$ (Mihailescu, 2004)

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a^x - b^y = 1$ นี้เป็นสิ่งที่สำคัญมากสำหรับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์อื่นๆ ที่มีรูปแบบเดียวกัน ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกสมการนี้ว่าคาตาลานไทด์ (Catalan’s type)

บทตั้ง 2 สมการไดโอแฟนไทน์ $1+4^y=z^2$ โดยที่ $y,\ z$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ จากสมการไดโอแฟนไทน์ $1+4^y=z^2$ โดยที่ $y,\ z$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $y=0$

จะได้ว่า $z^2=2$

ดังนั้น $z=\sqrt{2}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 ถ้า $y=1$

จะได้ว่า $z^2=5$

ดังนั้น $z=\sqrt{5}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 ถ้า $y>1$

จะได้ว่า $z^2=1+4^y$

ดังนั้น $1=z^2-2^{2y}$

โดยบทตั้ง 1 จะได้ว่า $z=3$ และ $2y=3$

ทำให้ได้ว่า $y=\frac{3}{2}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

จากทั้ง 3 กรณีสรุปได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $1+4^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $\square$

บทตั้ง 3 สมการไดโอแฟนไทน์ $15^x+1=z^2$ โดยที่ $x,\ z$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,\ z)=(1,\ 4)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $15+1=16=4^2$

ดังนั้น $(1,\ 4)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $15^x+1=z^2$ ต่อไปจะแสดงว่า $15^x+1=z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว

ให้สมการ $15^x+1=z^2$ โดยที่ $x,\ z$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ พิจารณาได้ 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $x=0$

จะได้ว่า $z^2=2$

ดังนั้น $z=\sqrt{2}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 ถ้า $x=1$

จะได้ว่า $z^2=16$

ดังนั้น $z=4$

กรณีที่ 3 ถ้า $x>1$

จากสมการ $15^x + 1 = z^2$ สามารถจัดให้อยู่ในรูป $z^2 - 15^x = 1$ เมื่อนำเทียบกับสมการ $a^x - b^y = 1$ ในบทตั้ง 1 ซึ่งมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$ จะได้ว่า $z = 3$, $x = 3$ และเมื่อแทนค่าของ z และ x ในสมการ $z^2 - 15^x = 1$ ทำให้ได้ว่า $3^2 - 15^3 = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จากทั้ง 3 กรณีจึงสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $15^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, z) = (1, 4)$ □

ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 1 สมการไดโอแฟนไทน์ $15^x + 4^y = z^2$ โดยที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1,0,4)$

พิสูจน์ กำหนดให้ $15^x + 4^y = z^2$ โดยที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ พิจารณาได้ 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $x = 0$ โดยพิจารณาเฉพาะค่า x เพราะเมื่อแทนค่า $x = 0$

ในสมการ $15^x + 4^y = z^2$

จะได้ว่า $1 + 4^y = z^2$

โดยบทตั้ง 2 ทำให้ทราบว่ากรณีที่ 1 นี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 2 พิจารณาค่าของ x และ y โดยที่ $x > 1$ และ $y > 1$

จากสมการ $15^x + 4^y = z^2$

จะได้ว่า $15^x = z^2 - 4^y$

$= z^2 - 2^{2y}$

ดังนั้น $15^x = (z - 2^y)(z + 2^y)$

ให้ $x = a + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า $15^{a+b} = (z - 2^y)(z + 2^y)$ (1.1)

พิจารณา a กับ b ได้ 2 กรณี คือ $a = b$ และ $a \neq b$ โดยที่ $a, b > 0$ ดังนี้

กรณี $a = b$ จากสมการ (1.1) ทำให้ได้ว่า

$$15^{2a} = (z - 2^y)(z + 2^y)$$

$$= z^2 - 4^y$$

$$4^y = z^2 - 15^{2a}$$

ดังนั้น $4^y = (z - 15^a)(z + 15^a)$

ให้ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ทำให้ $2^u = z - 15^a$ และ $2^{2y-u} = z + 15^a$

โดยที่ $2^y > 2^u$ พิจารณา $2^{2y-u} - 2^u = (z + 15^a) - (z - 15^a) = 2(15^a)$

จะได้ว่า $2^u(2^{2y-2u}-1)=2(15^a)$

ดังนั้น $2^u=2$ และ $2^{2y-2u}-1=15^a$

ทำให้ $u=1$ จึงได้ $2^{2y-2}-1=15^a$ ทำให้ได้ว่า $2^{2y-2}-15^a=1$ เมื่อนำเทียบกับสมการ $a^x-b^y=1$ ในบทตั้ง 1 ซึ่งมีผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y)=(3, 2, 2, 3)$

จะได้ว่า $y=2, a=3$ และเมื่อแทนค่าของ y และ a ในสมการ $2^{2y-2}-15^a=1$

ทำให้ได้ว่า $2^2-15^3=1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณี $a\neq b$ และ $|a-b|$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ $a<b$ หรือ $a>b$ ซึ่งในที่นี้พิจารณาเพียงกรณีเดียวคือ $a<b$ ทั้งนี้เนื่องจากในกรณี $a>b$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี $a<b$

พิจารณากรณี $a<b$ จากสมการ (1.1)

$$15^a \cdot 15^b = (z+2^y)(z-2^y)$$

โดยคุณสมบัติการคูณทำให้ได้

$$15^a = z-2^y \tag{1.2}$$

$$15^b = z+2^y \tag{1.3}$$

หรือ

$$15^a = z+2^y \tag{1.4}$$

$$15^b = z-2^y \tag{1.5}$$

จากสมการ (1.2), (1.3) ดำเนินการแก้ระบบสมการโดยนำ (1.3)−(1.2)

เนื่องจาก $z-2^y<z+2^y$, $15^a<15^b$ และ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า $15^a(15^{b-a}-1) = 2^{y+1}$

ดังนั้น $15^a=1$ และ $15^{b-a}-1=2^{y+1}$

นั่นคือ $a=0$ และ $2^{y+1}=15^{b-a}-1=15^b-1$

จาก $2^{y+1}=15^b-1$ สามารถจัดให้อยู่ในรูป $15^b-2^{y+1}=1$ เมื่อนำไปเทียบกับสมการ $a^x-b^y=1$ ในบทตั้ง 1 ซึ่งมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y)=(3, 2, 2, 3)$ จะได้ว่า $b=2$ และ $y=2$ และเมื่อแทนค่าของ b และ y ในสมการ $15^b-2^{y+1}=1$ ทำให้ได้ว่า $15^2-2^3=1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จากสมการ (1.4), (1.5) แก้ระบบสมการโดยนำ (1.4)−(1.5) ซึ่งดำเนินการทำนองเดียวกัน เมื่อจัดรูปสมการแล้วจะได้ว่า $15^a(1-15^{b-a})=2^{y+1}$ ทำให้ได้ว่า $15^a=1$ และ $1-15^{b-a}=2^{y+1}$

ดังนั้น $a=0$ และ $2^{y+1}+15^b=1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เนื่องจาก $y>1$ และ $b>0$

จากกรณีที่ $x>1$, $y>1$ จะได้ว่า $15^x+4^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 3 ถ้า $y=0$ โดยพิจารณาเฉพาะค่า y เพราะเมื่อแทนค่า $y=0$

ในสมการ $15^x+4^y=z^2$ จะได้ว่า $15^x+4^0=15^x+1=z^2$

โดยบทตั้ง 3 ทำให้ได้ว่า $x=1$ และ $z=4$ เป็นผลเฉลย

ดังนั้น สมการ $15^x+4^y=z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z)=(1, 0, 4)$ □

อภิปรายผล

จากการศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $15^x+4^y=z^2$ ผู้วิจัยได้ใช้บทตั้งที่ 1 – 3 เป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ซึ่งแนวคิดนี้สอดคล้องกับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $a^x-b^y=1$ (LeVeque, 1952), $3^x+3^y=6^z$, $4^x+18^y=22^z$ (Sandor, 2002), $2^x+5^y=z^2$ (Acu, 2007), $4^x+7^y=z^2$ และ $4^x+11^y=z^2$ (Singta & Chontchaisthit, 2011) และสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x+p^y=z^2$ (Suvarnamani, 2011) ซึ่งวิธีการนี้จะเป็นประโยชน์อย่างมากกับผู้ที่สนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เป็นอย่างมาก ยิ่งไปกว่านั้นก็คือ คาตาลานไทด์ (Catalan's type) หรือสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a^x-b^y=1$ ซึ่งมีผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y)=(3, 2, 2, 3)$ ยังเป็นกุญแจสำคัญที่ใช้สำหรับแก้ไขปัญหาการศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

สรุปผลการวิจัย

การศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $15^x+4^y=z^2$ พบว่ามีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z)=(1, 0, 4)$ โดยที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาครั้งนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจากหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ที่ได้ให้การสนับสนุนการค้นคว้าให้มีคุณภาพ ผู้วิจัยหวังว่าบทความฉบับนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจศึกษาค้นคว้า และขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่ได้ตรวจสอบความถูกต้องรวมถึงให้ข้อเสนอแนะที่ดี จึงขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

เอกสารอ้างอิง

Acu D. On a diophantine equation $2^x+5^y=z^2$. *General Mathematics*. 2007; 15(4); 145-148.

Andrew GE. *Number Theory*. Philadephia: W.B. Saunders, 1971.

David MB. *Elementary Number Theory*. 6th ed. Singapore: McGraw-Hill, 2007.

Kenneth HR. *Elementary Number Theory and its Application*. 4th ed. Addison Wesley Longman, Inc. 2000.

Khunpanuk C. *Number Theory*. Phetchabun: Phetchabun Coppyceter, 2014.

LeVeque WMJ. On the equation $a^x-b^y=1$. *American Journal of Mathematics*. 1952; 74: 325-331.

Mihailescu P. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal Reine Angew Math*. 2004; 27: 167-195.

Mordell LJ. *Diophantine Equations*. New York: Academic Press, 1969.

Punnim N. Prapaphot N. *Number Theory*. Bangkok: The Promotion of Academic Olympiad and Development of Science Education Foundation under the patronage of Her Royal Highness Princess Galyani Vadhana Krom Luang Naradhiwas Rajanagarindra, 2004.

Silverman JH. *A Friendly Introduction to Number Theory*. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 2001.

Sandor J. On a diophantine equation $3^x + 3^y = 6^z$. Geometric theorems, Diophantine equations, and arithmetric functions. *American: American Research Press Rehobot*. 2002; 4: 89-90.

Sandor J. On a diophantine equation $4^x + 18^y = 22^z$, Geometric theorems, Diophantine equations, and arithmetric functions. *American: American Research Press Rehobot*. 2002; 4: 91-92.

Sierpinski W. *Elementary Theory of Numbers*. Warszawa, 1964.

Suvarnamani A, Singta A, Chotchaisthit S. On two Diophantine equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$. *Science and Technology RMUTT Journal*. 2011; 1(1): 25-28.

Suvarnamani A. Solution of the diophantine equation $2^x + p^y = z^2$. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*. 2011; 1(3): 1415-1419.