จุดสมดุลและคาบ 5 ของบางระบบสมการเชิงผลต่าง

EQUILIBRIUM POINT AND PERIODIC WITH PERIOD 5 OF A SYSTEM OF DIFFERENCE EQUATIONS

วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ* และปรัชญา ภัสสร

Wirot Tikjha* and Pratya Phatson

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ศึกษาระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วงแบบสองมิติที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นบนแกน x ทางลบ เราพบว่ามีจุดสมดุลเพียงหนึ่งเดียวและมีวง 5 อยู่สองวง เราแบ่งแกน x ทางลบเป็นหลายช่วงและเราใช้การคำนวณทางตรงและข้อความอุปนัยในการบรรยายพฤติกรรมของระบบสมการ พฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าวขึ้นอยู่กับการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นโดยมีลักษณะเป็นจุดสมดุลหรือคาบ 5 ในที่สุด ผลการวิจัยนี้สามารถใช้เป็นฐานเพื่อทำความเข้าใจพฤติกรรมวงกว้างของระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วง

คำสำคัญ: สมการเชิงผลต่าง จุดสมดุล ผลเฉลยที่เป็นคาบ

Abstract

In this paper we study a two-dimensional piecewise linear system of difference equations. Initial conditions are negative x axis. We found a unique equilibrium point and two 5 cycles in the system. We separate the axis into intervals and we used direct calculations and single inductive statement in each interval of the axis to describe all behaviors in each interval of initial condition. Behaviors of solution to the system depend on choosing initial condition. It is either eventually equilibrium point or eventually prime period 5. This results could extent to understand global behaviors of family in piecewise linear system of difference equations.

Keywords : Difference equation, Equilibrium point, Periodic solution

---

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก 65000

Faculty of Science and Technology, Pibulsongkram Rajabhat University, Muang District, Phitsanulok Province 65000

*corresponding author e-mail: wirottik@psru.ac.th

Received: 17 August 2019; Revised: 20 November 2019; Accepted: 21 November 2019

บทนำ

หนึ่งในเหตุผลที่สมการเชิงอนุพันธ์ถูกใช้ในการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ของปรากฏการณ์ธรรมชาติคือสมการเชิงอนุพันธ์สามารถหาผลเฉลยได้และมีทฤษฎีรองรับการมีอยู่จริงและวิธีการหาผลเฉลยหลากหลาย แต่สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อนจำนวนมากไม่สามารถหาผลเฉลยชัดแจ้งได้ ดังนั้นจึงต้องอาศัยคอมพิวเตอร์ในการประมาณค่าผลเฉลยเช่นระเบียบวิธีของออยเลอร์ ซึ่งต้องทำการประมาณค่าด้วยผลเฉลยเชิงวิยุต ทั้งด้วยหลายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติเหมาะที่จะเลือกตัวแบบเชิงวิยุต เช่น การแบ่งเซลล์ แบบจำลองประชากรแมลง แบบจำลองการแพร่พันธุ์ที่อาศัยฤดูกาล การคิดดอกเบี้ย เป็นต้น จึงเป็นเหตุผลสำคัญในการสร้างทฤษฎีบทของสมการเชิงผลต่างเพื่อศึกษาผลเฉลยเชิงวิยุตและนำไปประยุกต์ต่อไป ในการศึกษาในบทความนี้ต้องการสำรวจพฤติกรรมของระบบสมการที่มีผลเฉลยเชิงวิยุตหรือผลเฉลยของสมการเชิงผลต่าง บทประยุกต์ของสมการเชิงผลต่าง เช่น แบบจำลองโรคระบาด (Cannings et al., 2005) และแบบจำลองทางชีววิทยา (Cull, 2006; Awerbuch-Friedlander et al., 2008) เป็นต้น

การส่งของโลสิ (Lozi map) (Lozi, 1978; Botella-Soler, 2011) เป็นการส่งเชิงเส้นเป็นช่วง (piecewise linear map) ที่เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย ซึ่งมีพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่าฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดดังนั้น ระบบสมการเชิงผลต่างที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของชวาเซียน (Schwarzian derivative) (Kulenovic & Merino, 2002) ที่ใช้อธิบายความเสถียรของสมการเชิงผลต่างได้ เช่นเดียวกับการส่งโลสิสมการขนมปังขิง (gingerbreadman map) เป็นสมการที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ซึ่งถูกศึกษาในบทความ (Devaney, 1984; Aharonov et al., 1987) เขาได้ทำการศึกษาสมการขนมปังขิงและทราบถึงการมีอยู่ของปรากฏการณ์เคออส (chaos) ในบางบริเวณ นอกจากนี้ ยังมีผู้ศึกษาระบบสมการเชิงผลต่างที่มีฟังก์ชันเป็นค่าสัมบูรณ์เช่น บทความ (Grove et al., 2012) ได้กล่าวถึงปัญหาปลายเปิดของระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วง

$$x_{n+1} = |x_n| + ay_n + b, y_{n+1} = x_n + c|y_n| + d, n = 0, 1, 2, ... \qquad (1)$$

เมื่อพารามิเตอร์ a, b, c และ d เป็นสมาชิกในเซต $\{-1, 0, 1\}$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบสมการ $(x_0, y_0) \in R^2$ เขาได้ศึกษาระบบสมการ (1) ที่มีค่าพารามิเตอร์ $a = b = -1$ และ $c = 1, d = 0$ ได้ทราบว่าทุกผลเฉลยเป็นคาบ 3 ในที่สุดนั่นคือไม่ว่าจะเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นใด ใน R^2 ผลเฉลยจะเป็นคาบ 3 ในที่สุดหรืออาจกล่าวได้ว่า คาบ 3 เป็นตัวดึงดูด (attractor) และในบทความวิจัย (Tikjha et al. 2010; 2017) ยังได้ศึกษากรณีเฉพาะของระบบสมการที่ (1) พบว่ามีผลเฉลยที่เป็นคาบและพิสูจน์ได้ว่าผลเฉลยจะเป็นคาบในที่สุดหรือเป็นจุดสมดุลในที่สุดขึ้นอยู่กับการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นนอกจากนี้ บทความวิจัย (Krinket & Tikjha, 2015) ได้ศึกษากรณีเฉพาะของระบบสมการ (1) สำหรับค่า พารามิเตอร์

$a=b=-1$, $c=-1$ และ $d=1$ บทความดังกล่าวได้แสดงว่าผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นบางช่วงบนแกน y เป็นคาบ 4 ในที่สุด ซึ่งการเป็นคาบในที่สุดยังมีผู้วิจัยในกรณีเฉพาะของระบบสมการ (1) ได้แก่ บทความวิจัย (Tikjha et al., 2017; 2018) ในบทความนี้สนใจที่จะศึกษากรณีเฉพาะของระบบสมการที่เป็นการวางนัยของระบบสมการที่ได้ศึกษาโดย (Krinket & Tikjha, 2015) ซึ่งเป็นการวางนัยเป็นพารามิเตอร์ b ดังระบบสมการ:

$$x_{n+1}=\left|x_n\right|-y_n-b, y_{n+1}=x_n-|\mathrm{y}_n|+1, n=0,1,2,... \tag{2}$$

โดยบทความนี้ศึกษากรณีเฉพาะ $b=6$ ได้แก่ระบบสมการ

$$x_{n+1}=\left|x_n\right|-y_n-6, y_{n+1}=x_n-|\mathrm{y}_n|+1, n=0,1,2,... \tag{3}$$

โดยเราศึกษาลักษณะการเป็นคาบและจุดสมดุลของผลเฉลยของระบบสมการ (3) ที่แตกต่างจากบทความที่ได้ศึกษามาก่อนหน้าโดยมีพารามิเตอร์และ/หรือเงื่อนไขเริ่มต้นที่ต่างกัน

วิธีดำเนินการวิจัย

จากการศึกษาบทความสมการเชิงผลต่างที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ดังที่กล่าวไปแล้วข้างต้นว่าไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของชวาเซียน อธิบายความเสถียรของสมการเชิงผลต่างจากบทความวิจัย (Grove et al., 2012; Tikjha et al. 2010; 2017) อธิบายความเสถียรและพฤติกรรมต่าง ๆ จากการศึกษาแบบรูปของผลเฉลยดังนั้นเราจึงทำการสำรวจโดยวิธีการทำซ้ำ (iteration) และเปลี่ยนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) เช่นเดียวกับบทความ (Grove et al., 2012; Tikjha et al., 2010) เป็นค่าต่าง ๆ ที่มากพอที่จะสามารถคาดเดาพฤติกรรมของผลเฉลยโดยรวมได้ในแต่ละเงื่อนไขเฉพาะที่เป็นเซตย่อยของ R^2 โดยบทความนี้สนใจเฉพาะเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจุดที่อยู่ในแกน x ทางลบจากนั้นนำผลจากการสำรวจมาสร้างข้อความคาดการณ์และทำการพิสูจน์ซึ่งการพิสูจน์จำเป็นต้องอาศัยบทนิยามใน (Grove & Ladas, 2005) ที่สำคัญดังต่อไปนี้ **สมการเชิงผลต่าง** (difference equation) อันดับ $k+1$ คือ สมการที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$x_{n+1}=f\left(x_n,\ x_{n-1},\ \ldots,\ x_{n-k}\right),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{4}$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากเซต J^{k+1} ไปยัง J ซึ่งเซต J เป็นช่วงบนจำนวนจริงหรือยูเนียนของช่วงบนจำนวนจริงและ J อาจเป็นเซตไม่ต่อเนื่อง **ผลเฉลย** (solution) ของสมการเชิงผลต่าง (4) คือลำดับ $\left\{x_n\right\}_{n=-k}^{\infty}$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงผลต่าง (4) สำหรับทุกๆ $n\geq 0$ เมื่อกำหนดให้**เงื่อนไขเริ่มต้น** (initial condition) $x_{-k},\ x_{-k+1},\ \ldots,\ x_0\in J$ จะได้ว่า

$$x_1 = f\left(x_0,\ x_{-1},\ \ldots,\ x_{-k}\right), x_2 = f\left(x_1,\ x_0,\ \ldots,\ x_{-k+1}\right), \ldots$$

และได้ว่า $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (4) สำหรับทุกๆ $n \geq -k$ และสำหรับแต่ละเงื่อนไขเริ่มต้นจะได้ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ เพียงชุดเดียว ผลเฉลยของสมการเชิงผลต่าง (4) ซึ่งเป็นค่าคงที่ทุก ๆ $n \geq -k$ ถูกเรียกว่า **ผลเฉลยสมดุล** (equilibrium solution) ของสมการ (4) ถ้า $x_n = \overline{x}$ เป็นผลเฉลยสมดุล สำหรับทุก ๆ $n \geq -k$ แล้ว $\overline{x}$ จะถูกเรียกว่า **จุดสมดุล** (equilibrium point) ของสมการ (4) ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ ของสมการเชิงผลต่าง (4) จะถูกเรียกว่าเป็น **คาบ** p (periodic with period p) ถ้ามีจำนวนเต็ม $p \geq 1$ ซึ่ง

$$x_{n+p} = x_n \text{ สำหรับทุกๆ } n \geq -k \tag{5}$$

เห็นได้ชัดว่าจุดสมดุลเป็นคาบ p สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก p เราจะกล่าวว่า ผลเฉลยเป็น **ไพร์มพีเรียด** p (prime period p) ถ้า p เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (5) ในกรณีนี้เรียก p - อันดับ $\left(x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_{n+p}\right)$ ว่าเป็น **วง** p (p -cycle) ของสมการ (4) และผลเฉลย $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ ของระบบสมการ (4) อาจยังไม่เป็นสมาชิกของวงหรือเป็นไพร์มพีเรียดตั้งแต่แรก หากทำการทำซ้ำผลเฉลยจนทำให้ผลเฉลยอยู่ในวงหรือผลเฉลยเป็นไพร์มพีเรียด ผลเฉลยดังกล่าวถูกเรียกว่า **คาบ** p **ในที่สุด** (eventually prime period p) นั่นคือมีจำนวนเต็ม $N \geq -k$ ซึ่ง $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ เป็นคาบ p ได้แก่ $x_{n+p} = x_n$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$ และกำหนดให้สัญลักษณ์วง 2$\begin{pmatrix} a,b \\ c,d \end{pmatrix}$ เป็นลำดับของผลเฉลย(a,b), (c,d) เป็นจุดในระนาบของระบบสมการซึ่งเราจะใช้สัญลักษณ์นี้กับวง 5 ในบทความนี้ ถ้าผลเฉลยของระบบสมการมีสมาชิกอยู่ในวงในการวนซ้ำที่ n แล้วผลเฉลยจะเป็นสมาชิกในวงนั้นสำหรับทุก ๆ การวนซ้ำที่ $k \geq n$

ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะรายงานผลการศึกษาผลเฉลยของระบบสมการ (3) โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นในแกน x ทางลบจากการสำรวจเบื้องต้นเราสามารถหาจุดสมดุลที่มีเพียงหนึ่งเดียวของระบบสมการ ได้แก่ $(-1,-4)$ ทั้งนี้จุดสมดุลดังกล่าวสามารถหาได้โดยง่ายจากการแก้ระบบสมการ

$$\overline{x} = \left|\overline{x}\right| - \overline{y} - 6 \text{ และ } \overline{y} = \overline{x} - |\overline{y}| + 1$$

นอกจากนี้เรายังค้นพบวง 5 สองวงได้แก่:

$$P_{5.1}=\begin{pmatrix}-5, & 2\\ -3, & -6\\ 3, & -8\\ 5, & -4\\ 3, & 2\end{pmatrix} \text{ และ } P_{5.2}=\begin{pmatrix}13/7, & -48/7\\ 19/7, & -4\\ 5/7, & -2/7\\ -5, & 10/7\\ -17/7, & -38/7\end{pmatrix}$$ เราจะแบ่งการศึกษาผลเฉลยที่มีเงื่อนไข

เริ่มต้นเป็นจุดบนแกน x เป็นสองช่วงได้แก่ $(-\infty,-6)$ และ $[-6,0]$

เราจะเริ่มต้นจากการหาผลเฉลยที่มีเงื่อนไขบนแกน x เมื่อ $x_0\in[-6,0]$ จากการคำนวณวนซ้ำจะได้ว่าหากเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นที่อยู่ในช่วง $[-6,-1]$ จะได้ว่าผลเฉลยเป็นจุดสมดุลใน 2 การวนซ้ำ หากเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นอยู่ในช่วง $(-1,-1/2]$ ผลเฉลยจะเป็นจุดสมดุลใน 4 การวนซ้ำ หากเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นในช่วง $(-1/2,-1/4]$ ผลเฉลยจะเป็นจุดสมดุลใน 6 การวนซ้ำ และหากเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นในช่วง $(-1/4,0]$ ผลเฉลยจะเป็นจุดสมดุลใน 7 การวนซ้ำ การพิสูจน์ข้อความข้างต้นทำได้โดยง่ายจากการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นในแต่ละช่วงย่อยแล้วทำการคำนวณการวนซ้ำ

ต่อไปจะทำการหาผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นบนแกน x เมื่อ $x_0\in(-\infty,-6)$ พบว่าผลเฉลยเป็นคาบ 5 หรือจุดสมดุลในที่สุดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $\{(x_n,y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3) และเงื่อนไขเริ่มเป็นสมาชิกใน $l=\{(x,y)|-\infty<x<-6, y=0\}$ จะได้ว่าผลเฉลยของสมการ (3) เป็นไพร์มพีเรียด 5 หรือจุดสมดุลในที่สุด

การพิสูจน์ กำหนดให้ $(x_0,y_0)\in l$ จะได้ว่า $x_0\in(-\infty,-6)$ และ $y_0=0$ จะได้ว่า

$$x_1=|x_0|-y_0-6=-x_0-6>0 \text{ และ } y_1=x_0-|y_0|+1=x_0+1<0$$

$$x_2=|x_1|-y_1-6=-2x_0-13 \text{ และ } y_2=x_1-|y_1|+1=-4$$

กรณีที่ 1 ถ้า $x_0\in\left[-\frac{13}{2},-6\right)$ แล้ว $x_2=-2x_0-13\le 0$ และได้ว่า

$$x_3=|x_2|-y_2-6=2x_0+11<0 \text{ และ } y_3=x_2-|y_2|+1=-2x_0-4<0$$

$$x_4=|x_3|-y_3-6=-1 \text{ และ } y_4=x_3-|y_3|+1=-4$$

นั่นคือ $(x_4,y_4)=(-1,-4)$ เป็นจุดสมดุลทำให้ได้ว่าเมื่อเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0\in\left[-\frac{13}{2},-6\right)$ และ $y_0=0$ ผลเฉลยเป็นจุดสมดุลภายใน 4 การวนซ้ำและผลเฉลยที่เหลือเป็นจุดสมดุล

กรณีที่ 2 ถ้า $x_0 \in \left(-\infty,-\frac{13}{2}\right)$ แล้ว $x_2=-2x_0-13>0$ และได้ว่า

$$x_3=|x_2|-y_2-6=-2x_0-15 \quad \text{และ} \quad y_3=x_2-|y_2|+1=-2x_0-16$$

กรณีที่ 2.1 ถ้า $x_0 \in \left(-\infty,-\frac{16}{2}\right]$ แล้ว $x_3=-2x_0-15>0$ และ $y_3=-2x_0-16\ge 0$

$$x_4=|x_3|-y_3-6=-5 \quad \text{และ} \quad y_4=x_3-|y_3|+1=2$$

นั่นคือ $(x_4,y_4)=(-5,2)$ เป็นสมาชิกของ $P_{5.1}$ ทำให้ได้ว่าเมื่อเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in \left(-\infty,-\frac{16}{2}\right]$ และ $y_0=0$ ผลเฉลยเป็นสมาชิกของ $P_{5.1}$ ใน 4 การวนซ้ำและผลเฉลยที่เหลือก็ยังคงเป็นสมาชิกของ $P_{5.1}$

กรณีที่ 2.2 ถ้า $x_0 \in \left[-\frac{15}{2},-\frac{13}{2}\right)$ แล้ว $x_3=-2x_0-15\le 0$ และ $y_3=-2x_0-16<0$

$$x_4=|x_3|-y_3-6=4x_0+25<0 \quad \text{และ} \quad y_4=x_3-|y_3|+1=-4x_0-30<0$$
$$x_5=|x_4|-y_4-6=-1 \quad \text{และ} \quad y_5=x_4-|y_4|+1=-4$$

นั่นคือ $(x_5,y_5)=(-1,-4)$ เป็นจุดสมดุลทำให้ได้ว่าเมื่อเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in \left[-\frac{15}{2},-\frac{13}{2}\right)$ และ $y_0=0$ ผลเฉลยเป็นจุดสมดุลภายใน 5 การวนซ้ำและผลเฉลยที่เหลือเป็นจุดสมดุล

กรณีที่ 2.3 ถ้า $x_0 \in \left(-\frac{16}{2},-\frac{15}{2}\right)$ แล้ว $x_3=-2x_0-15>0$ และ $y_3=-2x_0-16<0$

จะได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการ (3) เป็นจุดสมดุลหรือคาบ 5 ในที่สุด โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับจำนวนเต็ม $n\ge 1$ ข้อความกำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ “สำหรับ $x_0 \in (l_n,u_n)$ จะได้ว่า

$$x_{5n-1}=-5 \quad , \quad y_{5n-1}=-2^{3n-1}x_0-\delta_n>0$$
$$x_{5n}=2^{3n-1}x_0+\delta_n-1<0 \quad , \quad y_{5n}=2^{3n-1}x_0+\delta_n-4<0$$
$$x_{5n+1}=-2^{3n}x_0-2\delta_n-1 \quad , \quad y_{5n+1}=2^{3n}x_0+2\delta_n-4<0$$

ถ้า $x_0 \in [c_n,u_n)$ แล้ว $x_{5n+1}\le 0$

$$x_{5n+2}=-1 \quad , \quad y_{5n+2}=-4$$

ถ้า $x_0 \in (l_n,c_n)$ แล้ว $x_{5n+1}>0$

$$x_{5n+2}=-2^{3n+1}x_0-4\delta_n-3 \quad , \quad y_{5n+2}=-4;$$

ถ้า $x_0 \in [d_n,c_n)$ แล้ว $x_{5n+2}\le 0$

$$x_{5n+3}=2^{3n+1}x_0+4\delta_n+1<0 \quad , \quad y_{5n+3}=-2^{3n+1}x_0-4\delta_n-6<0;$$

$x_{5n+4} = -1 \qquad , \; y_{5n+4} = -4$;

ถ้า $x_0 \in (l_n, d_n)$ แล้ว $x_{5n+2} > 0$

$x_{5n+3} = -2^{3n+1}x_0 - 4\delta_n - 5 \qquad , \; y_{5n+3} = -2^{3n+1}x_0 - 4\delta_n - 6$;

ถ้า $x_0 \in (l_n, l_{n+1}]$ แล้ว $x_{5n+3} > 0$ และ $y_{5n+3} \geq 0$

$x_{5n+4} = -5 \qquad , \; y_{5n+4} = 2$;

ถ้า $x_0 \in [u_{n+1}, d_n)$ แล้ว $x_{5n+3} \leq 0$ และ $y_{5n+3} < 0$

$x_{5n+4} = 2^{3n+2}x_0 + 8\delta_n + 5 < 0 \qquad , \; y_{5n+4} = -2^{3n+2}x_0 - 8\delta_n - 10 < 0$;

$x_{5n+5} = -1 \qquad , \; y_{5n+5} = -4$;

ถ้า $x_0 \in (l_{n+1}, u_{n+1})$ แล้ว $x_{5n+3} > 0$ และ $y_{5n+3} < 0$ ”

โดยที่ $l_n = \left(\dfrac{-2-110\times 2^{3n-3}}{7\times 2^{3n-2}}\right)$, $u_n = \left(\dfrac{5-110\times 2^{3n-3}}{7\times 2^{3n-2}}\right)$, $c_n = \left(\dfrac{13-110\times 2^{3n-1}}{7\times 2^{3n}}\right)$,

$d_n = \left(\dfrac{19-110\times 2^{3n}}{7\times 2^{3n+1}}\right)$ และ $\delta_n = \left(\dfrac{-10+55\times 2^{3n-1}}{7}\right)$

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง เนื่องจาก $x_3 = -2x_0 - 15 > 0$ และ $y_3 = -2x_0 - 16 < 0$ เมื่อ $n = 1$ สำหรับ $x_0 \in (l_1, u_1) = \left(-\dfrac{16}{2}, -\dfrac{15}{2}\right)$ จะได้ว่า

$x_{5(1)-1} = x_4 = -5$, $y_{5(1)-1} = y_4 = -4x_0 - 30 = -2^{3(1)-1}x_0 - \delta_1 > 0$;

$x_{5(1)} = 4x_0 + 29 = 2^{3(1)-1}x_0 + \delta_1 - 1 < 0$, $y_{5(1)} = 4x_0 + 26 = 2^{3(1)-1}x_0 + \delta_1 - 4 < 0$;

$x_{5(1)+1} = x_6 = -8x_0 - 61 = -2^{3(1)}x_0 - 2\delta_1 - 1$,

$y_{5(1)+1} = y_6 = 8x_0 + 56 = 2^{3(1)}x_0 + 2\delta_1 - 4 < 0$;

ถ้า $x_0 \in [c_1, u_1) = \left[-\dfrac{61}{8}, -\dfrac{15}{2}\right)$ แล้ว $x_6 = -8x_0 - 61 \leq 0$ และ $y_6 = 8x_0 + 56 < 0$

ดังนั้น $x_{5(1)+2} = x_7 = -1$, $y_{5(1)+2} = y_7 = -4$

ถ้า $x_0 \in (l_1, c_1) = \left(-\dfrac{16}{2}, -\dfrac{61}{8}\right)$ แล้ว $x_6 = -8x_0 - 61 > 0$ และ $y_6 = 8x_0 + 56 < 0$

$x_{5(1)+2} = x_7 = -16x_0 - 123 = -2^{3(1)+1}x_0 - 4\delta_1 - 3$, $y_{5(1)+2} = y_7 = -4$;

ถ้า $x_0 \in [d_1, c_1) = \left[-\dfrac{123}{16}, -\dfrac{61}{8}\right)$ แล้ว $x_7 = -16x_0 - 123 \leq 0$ และ $y_7 = -4$ จะได้ว่า

$x_{5(1)+3} = x_8 = 16x_0 + 121 = 2^{3(1)+1}x_0 + 4\delta_1 + 1 < 0$,

$y_{5(1)+3} = y_8 = -16x_0 - 126 = -2^{3(1)+1}x_0 - 4\delta_1 - 6 < 0$;

$x_{5(1)+4} = x_9 = -1$, $y_{5(1)+4} = y_9 = -4$;

ถ้า $x_0 \in (l_1, d_1) = \left(-\frac{16}{2}, -\frac{123}{16}\right)$ แล้ว $x_7 = -16x_0 - 123 > 0$ และ $y_7 = -4$ จะได้ว่า

$x_{5(1)+3} = x_8 = -16x_0 - 125 = -2^{3(1)+1}x_0 - 4\delta_1 - 5$,

$y_{5(1)+3} = y_8 = -16x_0 - 126 = -2^{3(1)+1}x_0 - 4\delta_1 - 6$;

ถ้า $x_0 \in (l_1, l_2] = \left(-\frac{16}{2}, -\frac{126}{16}\right]$ แล้ว $x_8 = -16x_0 - 125 > 0$ และ $y_8 = -16x_0 - 126 \geq 0$

$x_{5(1)+4} = x_9 = -5$, $y_{5(1)+4} = y_9 = 2$;

ถ้า $x_0 \in [u_2, d_1) = \left[-\frac{125}{16}, -\frac{123}{16}\right)$ แล้ว $x_8 = -16x_0 - 125 \leq 0$ และ

$y_8 = -16x_0 - 126 < 0$ จะได้ว่า

$x_{5(1)+4} = x_9 = 32x_0 + 245 = 2^{3(1)+2}x_0 + 8\delta_1 + 5 < 0$,

$y_{5(1)+4} = y_9 = -32x_0 - 250 = -2^{3(1)+2}x_0 - 8\delta_1 - 10 < 0$;

$x_{5(1)+5} = x_{10} = -1$, $y_{5(1)+5} = y_{10} = -4$;

ถ้า $x_0 \in (l_2, u_2) = \left(-\frac{126}{16}, -\frac{125}{16}\right)$ แล้ว $x_8 = -16x_0 - 125 > 0$ และ

$y_8 = -16x_0 - 126 < 0$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. กำหนดให้ $P(k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า สำหรับ

$x_0 \in (l_{k+1}, u_{k+1}) = \left(\frac{-2 - 110 \times 2^{3k}}{7 \times 2^{3k+1}}, \frac{5 - 110 \times 2^{3k}}{7 \times 2^{3k+1}}\right)$

จะได้ว่า $x_{5k+3} = -2^{3k+1}x_0 - 4\delta_k - 5 > 0$ และ $y_{5k+3} = -2^{3k+1}x_0 - 4\delta_k - 6 < 0$

ดังนั้น $x_{5(k+1)-1} = x_{5k+4} = -5$, $y_{5(k+1)-1} = y_{5k+4} = -2^{3(k+1)-1}x_0 - (8\delta_k + 10)$;

พิจารณา

$$8\delta_k + 10 = 8\left(\frac{-10 + 55 \times 2^{3k-1}}{7}\right) + 10 = \left(\frac{-10 + 55 \times 2^{3(k+1)-1}}{7}\right) = \delta_{k+1}$$

จะแสดงว่า $y_{5k+4} > 0$ เนื่องจาก $y_{5k+4} = -2^{3(k+1)-1}x_0 - (8\delta_k + 10)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปร x_0 เป็นการเพียงพอที่จะแทนค่า x_0 ด้วยขอบเขต l_{k+1} และ u_{k+1} แล้วได้ค่าเป็นบวกหรือศูนย์ดังนี้

แทนค่า x_0 ด้วย $u_{k+1} = \left(\frac{5 - 110 \times 2^{3k}}{7 \times 2^{3k+1}}\right)$ ใน y_{5k+4}

$$y_{5(k+1)-1} = -2^{3(k+1)-1}\left(\frac{5-110\times 2^{3k}}{7\times 2^{3k+1}}\right)-\left(\frac{-10+55\times 2^{3(k+1)-1}}{7}\right)=0$$

แทนค่า x_0 ด้วย $l_{k+1} = \left(\frac{-2-110\times 2^{3k}}{7\times 2^{3k+1}}\right)$ ใน y_{5k+4}

$$y_{5(k+1)-1} = -2^{3(k+1)-1}\left(\frac{-2-110\times 2^{3k}}{7\times 2^{3k+1}}\right)-\left(\frac{-10+55\times 2^{3(k+1)-1}}{7}\right)=2$$

เนื่องจาก (l_{k+1},u_{k+1}) เป็นช่วงเปิดจึงทำให้ได้ว่า $y_{5(k+1)-1} = y_{5k+4} = -2^{3(k+1)-1}x_0 - \delta_{k+1} > 0$ เพื่อให้การพิสูจน์กระชับต่อไปจะไม่แสดงการเป็นบวกหรือลบของผลเฉลยด้วยการทดสอบขอบเขต ซึ่งการทดสอบขอบเขตสามารถทำได้ดังเช่นการทดสอบขอบเขตด้านบน

ดังนั้น $x_{5(k+1)} = x_{5k+5} = 2^{3k+2}x_0 + \delta_{k+1} - 1 < 0$,

$y_{5(k+1)} = y_{5k+5} = 2^{3k+2}x_0 + \delta_{k+1} - 4 < 0$;

$x_{5(k+1)+1} = x_{5k+6} = -2^{3k+3}x_0 - 2\delta_{k+1} - 1$, $y_{5(k+1)+1} = y_{5k+6} = 2^{3k+3}x_0 + 2\delta_{k+1} - 4 < 0$;

ถ้า $x_0 \in [c_{k+1},u_{k+1}) = \left[\frac{13-110\times 2^{3k+2}}{7\times 2^{3k+3}},\frac{5-110\times 2^{3k}}{7\times 2^{3k+1}}\right)$

แล้วทำการทดสอบขอบเขตของ x_0 จะได้ว่า $x_{5(k+1)+1} = x_{5k+6} \le 0$

จึงทำให้ได้ว่า $x_{5(k+1)+1} = x_{5k+6} = -2^{3k+3}x_0 - 2\delta_{k+1} - 1 \le 0$

และจาก $y_{5(k+1)+1} = y_{5k+6} = 2^{3k+3}x_0 + 2\delta_{k+1} - 4 < 0$

ดังนั้น $x_{5(k+1)+2} = x_{5k+7} = -1$, $y_{5(k+1)+2} = y_{5k+7} = -4$

ถ้า $x_0 \in (l_{k+1},c_{k+1}) = \left(\frac{-2-110\times 2^{3k}}{7\times 2^{3k+1}},\frac{13-110\times 2^{3k+2}}{7\times 2^{3k+3}}\right)$

แล้วทำการทดสอบขอบเขตของ x_0 จะได้ว่า $x_{5(k+1)+1} = x_{5k+6} > 0$

ดังนั้น $x_{5(k+1)+2} = x_{5k+7} = -2^{3k+4}x_0 - 4\delta_{k+1} - 3$, $y_{5(k+1)+2} = y_{5k+7} = -4$;

ถ้า $x_0 \in [d_{k+1},c_{k+1}) = \left[\frac{19-110\times 2^{3k+3}}{7\times 2^{3k+4}},\frac{13-110\times 2^{3k+2}}{7\times 2^{3k+3}}\right)$

แล้วทำการทดสอบขอบเขตของ x_0 จะได้ว่า $x_{5(k+1)+2} = x_{5k+7} \le 0$

ทดลองขอบเขตของ x_{5k+7} แทน x_0 ด้วย $\left(\frac{19-110\times 2^{3k+3}}{7\times 2^{3k+4}}\right)$

ดังนั้น $x_{5(k+1)+3} = x_{5k+8} = 2^{3k+4}x_0 + 4\delta_{k+1} + 1 < 0$,

$y_{5(k+1)+3} = y_{5k+8} = -2^{3k+4}x_0 - 4\delta_{k+1} - 6 < 0$;

$x_{5(k+1)+4} = x_{5k+9} = -1$, $y_{5(k+1)+4} = y_{5k+9} = -4$;

ถ้า $x_0 \in (l_{k+1}, d_{k+1}) = \left(\dfrac{-2-110\times 2^{3k}}{7\times 2^{3k+1}}, \dfrac{19-110\times 2^{3k+3}}{7\times 2^{3k+4}} \right)$

แล้วทำการทดสอบขอบเขตของ x_0 จะได้ว่า $x_{5(k+1)+2} = x_{5k+7} > 0$

ดังนั้น $x_{5(k+1)+3} = x_{5k+8} = -2^{3k+4}x_0 - 4\delta_{k+1} - 5$,

$y_{5(k+1)+3} = y_{5k+8} = -2^{3k+4}x_0 - 4\delta_{k+1} - 6$;

ถ้า $x_0 \in (l_{k+1}, l_{k+2}] = \left(\dfrac{-2-110\times 2^{3k}}{7\times 2^{3k+1}}, \dfrac{-2-110\times 2^{3k+3}}{7\times 2^{3k+4}} \right]$ แล้วทำการทดสอบขอบเขตของ x_0

จะได้ว่า $x_{5(k+1)+3} = x_{5k+8} > 0$ และ $y_{5(k+1)+3} = y_{5k+8} \geq 0$

ดังนั้น $x_{5(k+1)+4} = x_{5k+9} = -5$, $y_{5(k+1)+4} = y_{5k+9} = 2$;

ถ้า $x_0 \in [u_{k+2}, d_{k+1}) = \left[\dfrac{5-110\times 2^{3k+3}}{7\times 2^{3k+4}}, \dfrac{19-110\times 2^{3k+3}}{7\times 2^{3k+4}} \right)$ แล้วทำการทดสอบขอบเขตของ

x_0 จะได้ว่า $x_{5(k+1)+3} = x_{5k+8} \leq 0$ และ $y_{5(k+1)+3} = y_{5k+8} < 0$

ดังนั้น $x_{5(k+1)+4} = x_{5k+9} = 2^{3k+5}x_0 + 8\delta_{k+1} + 5 < 0$

$y_{5(k+1)+4} = y_{5k+9} = -2^{3k+5}x_0 - 8\delta_{k+1} - 10 < 0$

ดังนั้น $x_{5(k+1)+5} = x_{5k+10} = -1$, $y_{5(k+1)+5} = y_{5k+10} = -4$;

ถ้า $x_0 \in (l_{k+2}, u_{k+2}) = \left(\dfrac{-2-110\times 2^{3k+3}}{7\times 2^{3k+4}}, \dfrac{5-110\times 2^{3k+3}}{7\times 2^{3k+4}} \right)$ แล้วทำการทดสอบขอบเขตของ x_0

จะได้ว่า $x_{5(k+1)+3} = x_{5k+8} > 0$ และ $y_{5(k+1)+3} = y_{5k+8} < 0$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกๆ $n \geq 1$ สังเกตว่า $P(n)$ อธิบายพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการ (3) โดยผลเฉลยจะเป็นไพร์มพีเรียด 5 หรือจุดสมดุลขึ้นอยู่กับการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นและได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = -\frac{55}{7}$$

และเมื่อเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) = \left(-\dfrac{55}{7}, 0\right)$ จะได้ว่า $(x_1, y_1) = \left(\dfrac{13}{7}, -\dfrac{48}{7}\right) \in P_{5.2}$

จึงสามารถสรุปได้ว่าเมื่อเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in \left(-\frac{16}{2}, -\frac{15}{2}\right)$ และ $y_0 = 0$ มีผลเฉลยเป็นไพร์มพีเรียด 5 หรือจุดสมดุลในที่สุดและได้ว่าสำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) บนแกน x ทางลบเมื่อ $x_0 \in (-\infty, -6)$ ผลเฉลยของระบบสมการเป็นจุดสมดุลหรือไพร์มพีเรียด 5 ในที่สุด □

อภิปรายผล

จากทฤษฎีบทเห็นข้อแตกต่างของผลเฉลยของระบบสมการ (3) โดยบทความวิจัย (Krinket & Tikjha, 2015) พบว่าผลเฉลยเป็นคาบ 4 ในที่สุดแต่บทความนี้ได้แสดงให้เห็นถึงการมีอยู่ของคาบ 5และจุดสมดุล ยืนยันได้ว่าการเปลี่ยนพารามิเตอร์มีผลต่อการมีอยู่ของคาบที่เปลี่ยนไปและการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นมีผลต่อพฤติกรรมของระบบสมการและจุด $(-55/7, 0)$ เป็นจุดเปลี่ยนของพฤติกรรมของผลเฉลยจากการเป็นจุดสมดุลที่ในสุดเป็นการเป็นคาบ 5 ในที่สุด ทั้งนี้ผู้ที่สนใจวิจัยอาจนำวิธีการสำรวจในบทความนี้ไปศึกษาพฤติกรรมของระบบสมการโดยที่เงื่อนไขเริ่มต้นจุดอื่นนอกเหนือจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่ทำวิจัยไปแล้ว

สรุปผลการวิจัย

พฤติกรรมของระบบสมการ (3) เป็นคาบ 5 หรือจุดสมดุลในที่สุดแต่วง 5 มีอยู่สองวง ได้แก่ $P_{5.1}$ และ $P_{5.2}$ เห็นได้ว่าวง $P_{5.1}$ ดึงดูดผลเฉลยทุกผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจุดบนแกน x ซึ่ง $x_0 \in (-\infty, -55/7)$ และจุดสมดุลดึงดูดผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจุดบนแกน x ซึ่ง $x_0 \in (-55/7, 0]$ และ $P_{5.2}$ ดึงดูดผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจุดบนแกน x ซึ่ง $x_0 = -55/7$

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยที่ได้รับทุนสนับสนุนจากสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ (RDI-1-61-6-26)

เอกสารอ้างอิง

Aharonov D, Devaney RL, Ellas U. The dynamics of a piecewiselinear map and its smooth approximation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1987; 7(2): 351-372.

Awerbuch-Friedlander T, Levins R, Camouzis E. et al. A Non-Linear System of Difference Equations Linking Mosquitoes Habitats and Community Interventions. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 2008; 1577-1588.

Botella-Soler V, Castelo JM, Oteo JA. et al. Bifurcations in the Lozi map. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011; 44: 1-17.

Cannings C, Hoppensteadt FC, Segel LA. *Epidemic Modelling: An Introduction*, New York, NY: Cambridge University Press; 2005.

Cull P. Difference Equations as Bilogical Models. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 2006; 965-981.

Devanney RL. A piecewise linear model of the the zones of instability of an area-preservingmap. *Physica*. 1984; 10D: 387-393.

Grove EA, Ladas G. *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*. New York, NY: Chapman Hall; 2005.

Grove EA, Lapierre E, Tikjha W. On the Global Behavior of $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1$ and $y_{n+1} = x_n + |y_n|$. *Cubo Mathematical Journal*, 2012; 14: 125-166.

Krinket S, Tikjha W. Prime period solution of cartain piecewise linear system of difference equation. *Proceedings of the Pibulsongkram Research*, 2015; 76-83.

Kulenovic MRS, Merino O. *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*. New York, Ny: Chapman & Hall/Crc; 2002.

Lozi R. Un attracteur etrange du type attracteur de Henon. *Journal de Physique, Colloque*. 1978; 39: 9-10.

Tikjha W, Lenbury Y, Lapierre EG. On the Global Character of the System of Piecewise Linear Difference Equations $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1$ and $y_{n+1} = x_n - |y_n|$. *Advances in Difference Equations.* 2010; Article ID 573281 (14 pages), doi:10.1155/2010/573281(2010).

Tikjha W, Lapierre EG, Sitthiwirattham T. The stable equilibrium of a system of piecewise linear difference equations. *Advances in Difference Equations*. 2017; 67 (10), doi: 10.1186/s13662-017-1117-2(2017).

Tikjha W, Wata T, Sukmamorn S. et al. Prime Period 4 and Equilibrium Solutions of a System of Difference Equations $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2$ and $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ with Initial Conditions $x_0 = 0$ and $0 < y_0 < ½$. *Srinakharinwirot Science Journal*, 2017; 33(2): 184-193.