

สำรวจรูปแบบเหลี่ยมปาสกาล

รองศาสตราจารย์รัตนพร บ่อคำ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

เรื่องน่ารู้เกี่ยวกับรูปแบบเหลี่ยมปาสกาล นี้ผู้เขียนได้อ่านจาก Website จึงขอนำมาเผยแพร่ ในวารสารฉบับนี้ เพื่อผู้ที่ยังไม่ได้อ่าน ได้เพิ่มพูนความรู้บ้างไม่มากก็น้อย

รูปแบบเหลี่ยมปาสกาลคือรูปแบบเหลี่ยมที่มีจำนวนเรียงอยู่เป็นรูปสามเหลี่ยมโดยจำนวนนั้นอยู่ในสูตร

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ เมื่อ } \binom{n}{r} \text{ คือสัมประสิทธิ์}$$

ทวินาม (Binomial coefficients)

รูปแบบเหลี่ยมปาสกาลนี้ เป็นผลจากการศึกษาของนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ Blaise Pascal (ค.ศ. 1623 - 1662) ซึ่งได้ทำการศึกษาต่อจาก นักคณิตศาสตร์ชาวจีนชื่อ Yanghui (ค.ศ. 1238 - 1298) และนักดาราศาสตร์-กวีนิพนธ์ ชาวเปอร์เซีย ชื่อ Omar Khayya'm (ค.ศ. 1048-1131) รูปแบบเหลี่ยมปาสกาลมีลักษณะดังนี้

1	:	$(a+b)^0 = 1$
1 1	:	$(a+b)^1 = a + b$
1 2 1	:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	:	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1 4 6 4 1	:	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	:	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
1 6 15 20 15 6 1	:	$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

จากการนำสัมประสิทธิ์ในการกระจายทวินามมาเขียนลงเป็นแถวเรียงข้างต้นจะได้ตัวเลขเรียงอยู่เป็นรูปสามเหลี่ยม เรียกว่ารูปแบบเหลี่ยมปาสกาล จะพบว่า สามารถหาแถวต่อ ๆ ไปได้ไม่ยากนัก นั่นก็คือจะสามารถหาเทอมต่าง ๆ ในการกระจายทวินามได้ด้วย

นอกจากนี้จะพบว่า ในรูปแบบเหลี่ยมปาสกาลจะสามารถหาเลขยกกำลังในรูป 2^n ได้ ทั้งนี้เพราะแต่ละแถวในรูปแบบเหลี่ยมปาสกาลเมื่อนำตัวเลขมารวมกันผลบวกที่ได้จะมีค่าเป็น 2^n

1	:	1	$\rightarrow 2^0$
1 1	:	2	$\rightarrow 2^1$
1 2 1	:	4	$\rightarrow 2^2$
1 3 3 1	:	8	$\rightarrow 2^3$
1 4 6 4 1	:	16	$\rightarrow 2^4$
1 5 10 10 5 1	:	32	$\rightarrow 2^5$
1 6 15 20 15 6 1	:	64	$\rightarrow 2^6$

เมื่ออ่านตัวเลขในแต่ละแถวเรียงกัน โดยอ่านจำนวนในแต่ละแถวเรียงตามค่าประจำหลัก จะเป็นค่าของจำนวนในรูปเลขยกกำลังในรูป 11^n เช่น

$11^0 = 1$ แถวที่เลขชี้กำลังเป็น 0

$11^1 = 11$ แถวที่เลขชี้กำลังเป็น 1

$11^2 = 121$ แถวที่เลขชี้กำลังเป็น 2

$11^3 = 1331$ แถวที่เลขชี้กำลังเป็น 3

$11^4 = 14641$ แถวที่เลขชี้กำลังเป็น 4

$11^5 = 161051$ แถวที่เลขชี้กำลังเป็น 5 1 5 10 10 5 1

สำหรับ 11^5 นั้นจะพบว่ามีปัญหาตัวเลข

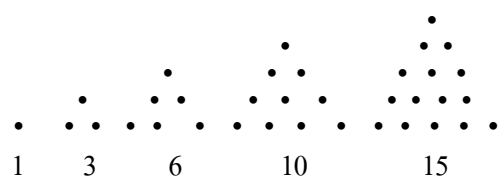
ในแถวที่มีเลขชี้กำลังเป็น 5 คือ 1 5 10 10 5 1 ในหลักร้อย และหลักพัน ซึ่งเป็นเลข 2 หลัก จึงไม่สามารถอ่านเรียงตามค่าประจำตำแหน่งได้ทันที ต้องทำให้แต่ละหลักเป็นเลขโดดเสียก่อน ในที่นี้ หลักร้อย เป็น 10 ร้อย ต้องเขียนเลขในตำแหน่ง หลักร้อย เป็น 0 ส่วน 10 ร้อย คือ 1 พัน ต้องทดไป ในหลักพัน ดังนั้นหลักพันจึงเป็น 11 พัน จึงเขียนเลขในตำแหน่งหลักพันเป็น 1 ทดไป 10 พัน หรือ 1 หมื่น รวมกับหลักหมื่นเดิมคือ 5 หมื่น ดังนั้นตัวเลขในหลักหมื่นคือ 6 ส่วนหลักแสนคือ 1 เพราะไม่มีตัวทดและสามารถเขียนให้เห็นได้ง่ายดังนี้

หลัก	แสน	หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย
	1	5	10	10	5	1
	1	6	1	0	5	1 $\rightarrow 11^5$

ทำนองเดียวกันค่าของ 11^8 ก็สามารถหาได้จากอุปสามเหลี่ยมปาสกาล ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินามอันดับ 8 อยู่ในแถวที่มีเลขชี้กำลังเป็น 8 ดังนี้

หลัก	พันล้าน	ร้อยล้าน	สิบล้าน	ล้าน	แสน	หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย
	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	2	1	4	3	5	8	8	8	1	$\rightarrow 11^8$

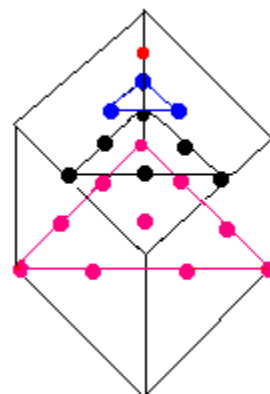
จำนวนรูปสามเหลี่ยม (Triangular number) คือจำนวนจุดที่เรียงอยู่เป็นแนวเส้นตรงแต่ละจุดจะอยู่ห่างเท่าๆ กัน กลายเป็นรูปสามเหลี่ยม โดยจำนวนจุดในแต่ละด้านของสามเหลี่ยมนั้นเป็นจำนวนเต็มบวก 1,2,3,4,... ดังรูป



ในรูปสามเหลี่ยมปาสคาลจะสามารถมองเห็นจำนวนรูปสามเหลี่ยมได้ โดยสังเกตเส้นแนวทแยงเส้นที่ 3 นับจากบนลงล่าง (ตัวหนา) จะได้จำนวนรูปสามเหลี่ยมดังนี้ 1,3,6,10,15,...

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

จำนวนทรงสี่หน้า (Tetrahedral numbers) คือจำนวนที่มีเทอมต่างๆ อยู่ในรูป $T_n = \binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ นั่นคือลำดับจำนวนทรงสี่หน้า คือ 1, 4, 10, 20, 35, 56,... นอกจากนี้จากกล่าวได้ว่าเทอมต่างๆ ในลำดับนี้ได้จากการรวมเทอมที่อยู่ข้างหน้าในลำดับจำนวนรูปสามเหลี่ยม เช่น $4 = 1+3$, $10 = 1+3+6$, $20 = 1+3+6+10$ เป็นต้น



ดังรูปข้างบน แสดงจำนวนทรงสี่หน้า ที่มีจำนวนรูปสามเหลี่ยมในทรงสี่หน้า นอกจากนี้การกระจายฟังก์ชัน $\frac{x}{(1-x)^4}$ ดังนี้

$$\frac{x}{(1-x)^4} = x + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 + 35x^5 + \dots$$

จะได้นิพจน์ทางขวามือคือลำดับ 1, 4, 10, 20, 35, 56,...ซึ่งแต่ละเทอมเป็นสัมประสิทธิ์

ของการกระจายฟังก์ชันข้างต้นเป็นลำดับ
จำนวนทรงสี่หน้าด้วย จะพบว่า ลำดับนี้
สามารถหาได้จากแนวทแยงมุมเส้นที่ 4 นับจาก
บนลงล่างของรูปสามเหลี่ยมปาสคาลนั่นเอง
ดังรูป

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
	1	5		10		10		5	1
1		6	15		20		15	6	1

จำนวนทรงห้าหน้า (Pentatope numbers)

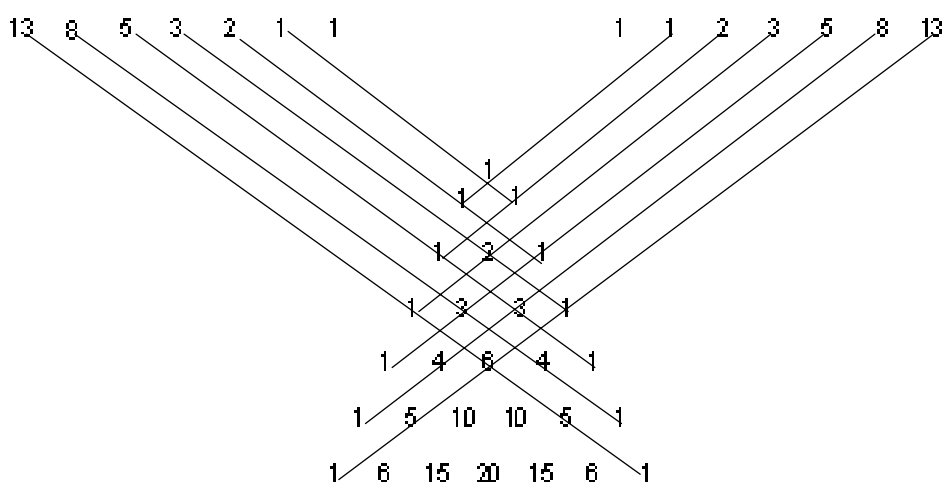
จาก การกระจายฟังก์ชัน $\frac{x}{(1-x)^5}$ ดังนี้

$$\frac{x}{(1-x)^5} = x + 5x^2 + 15x^3 + 35x^4 + 70x^5 + \dots$$

จะพบว่า จะมีลำดับในการกระจายนี้
คือ 1, 5, 15, 35, 70, ... ซึ่งจำนวนดังกล่าวนี้
อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมเส้นที่ 5 ของรูป
สามเหลี่ยมปาสคาล นั่นเอง นอกจากนี้จะ
พบว่า เทอมต่าง ๆ ในลำดับนี้ได้จากการบวก
เทอมที่อยู่ข้างหน้าของลำดับจำนวนทรงสี่หน้า
เช่น $5 = 1+4$, $15 = 1+4+10$, $35 =$
 $1+4+10+20$ เป็นต้น

จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci numbers)

ลำดับฟีโบนัชชีคือลำดับ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
ซึ่งแต่ละเทอมในลำดับฟีโบนัชชี จะได้จาก
ผลบวกของ 2 เทอมที่อยู่ข้างหน้า เช่น $5 =$
 $2+3$, $8 = 3+5$, $13 = 5+8$ เป็นต้น ในรูป
สามเหลี่ยมปาสคาล จะพบจำนวนฟีโบนัชชีได้
เช่นเดียวกันโดยการลากเส้นทแยง ดังรูปข้างล่าง
นี้



เอกการอ้างอิง

- Pascal's Triangle [online]. Available : http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_tetrahedral.html[26/3/47].
- Pascal's Triangle [online]. Available : [http://mathworld.wolfram.com/Pascal's Triangle.html](http://mathworld.wolfram.com/Pascal's%20Triangle.html). [05/25/2005]
- Pentatope Number . [online]. Available : <http://mathworld.wolfram.com/PentatopeNumber.html>. [05/25/2005]