

ปัญหาชวนคิด

รัตนพร บ่อคำ

ในวิชาคณิตศาสตร์มีปัญหาหรือคำถามที่น่าสนใจและนักเรียนมักตอบไม่ได้อยู่มากมาย ผู้เขียนบทความนี้จึงขอนำมากล่าวไว้ และได้เสนอแนวตอบปัญหาอย่างง่ายและการพิสูจน์ไว้ด้วย ดังปัญหาหรือคำถามชวนคิดต่อไปนี้

ทำไม $0.999999 \dots = 1$

สมมติให้ $0.999999 \dots = x \dots (1)$

ดังนั้น $10(0.999999 \dots) = 10x$

หรือ $9.999999 \dots = 10x \dots (2)$

นำ (2) - (1); จะได้

$$9 = 9x$$

นั่นคือ $x = 1$

ดังนั้นจึงสรุปว่า $0.999999 \dots = 1$

ทำไม $n^0 = 1$ สำหรับ $n \neq 0$

จาก

$$n^x \div n^y = \frac{n^x}{n^y} = n^{x-y}$$

ดังนั้นถ้า $x = y$ จะได้ว่า

$$n^x \div n^x = n^{x-x} = n^0$$

$$\text{แต่ } n^x \div n^x = \frac{n^x}{n^x} = 1$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $n^0 = 1$

เมื่อ $n \neq 0$

ทำไม $0! = 1$

เนื่องจาก $0! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$

และเนื่องจาก

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = 4 \cdot 3!$$

ดังนั้น

$$3! = 4/4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1/4 = 24/4 = 6$$

$$2! = 3/3 = 3 \cdot 2 \cdot 1/3 = 2$$

$$1! = 2/2 = 2 \cdot 1/2 = 1$$

ดังนั้น

$$0! = 1/1 = 1$$

ทำไม 0 เป็นตัวหารไม่ได้ $\frac{0}{0} = ?$ และ

$$\frac{1}{0} = ?$$

$\frac{0}{0}$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนด (Indeterminate)

แต่ $\frac{1}{0}$ เป็นรูปแบบที่ไม่มีความหมาย

หรือไม่สามารถนิยามได้ (Undefined)

คำว่า รูปแบบยังไม่กำหนดก็คือไม่ทราบว่าจะกำหนดอย่างไร

จะกำหนดอย่างไร

มีนักเรียนบางคนบอกว่า $\frac{0}{0} = 1$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

ทั้งนี้เพราะว่า ถ้าให้ $\frac{0}{0} = x$

หรือ 0 หารด้วย 0 เท่ากับ x แล้วจาก

ความสัมพันธ์ระหว่างการคูณกับการหารจะได้

ว่า

$$0 \cdot x = 0 \text{ แต่ } 0 \text{ คูณกับอะไร ก็ได้ } 0$$

เสมอ ดังนั้น คำตอบของสมการมีได้มากมาย

ดังนั้น x เป็นค่าใดก็ได้ ไม่จำเป็นต้องเป็น 1 จึงไม่ทราบว่า จะกำหนดว่า x เป็นค่าใด

ซึ่งเรียก รูปแบบนี้ว่ารูปแบบยังไม่กำหนด

สำหรับ $\frac{1}{0}$ นั้นเป็นรูปแบบที่ไม่นิยามหรือหาค่าไม่ได้เลยว่าเป็นจำนวนใด

เพราะว่าถ้าสมมุติว่า ให้ $\frac{1}{0} = x$ จะได้ว่า $0 \cdot x = 1$ ซึ่งจะพบว่าไม่สามารถหาค่า x ที่ทำให้สมการ $0 \cdot x = 1$ เป็นจริงได้ เพราะ 0 คูณจำนวนใดก็ตามเป็น 0

ดังนั้น $\frac{1}{0}$ เป็นอนิยามหรือไม่สามารถนิยามได้ว่าเป็นเท่าใด

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าเมื่อ 0 เป็นตัวหารจะไม่สามารถหาค่าได้หรือการหารด้วย 0 ไม่สามารถทำได้นั่นเอง

สามจำนวนพีทาโกรีส (a Pythagorean triple) คืออะไร

เซตของจำนวนสามจำนวนที่ได้จากทฤษฎีบทพีทาโกรีส (Pythagoras' s theorem) เรียกว่า สามจำนวนพีทาโกรีสหรือพีทาโกรีสทริเปิล (a Pythagorean triple) คือเซตของจำนวนเต็มบวก a, b, c ที่เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรีสนั่นเอง นั่นคือ สอดคล้องกับสมการ $a^2 + b^2 = c^2$ โดยที่ c เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก และ a, b เป็นด้านประกอบมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากนั้น และจะแทนจำนวนทั้งสามในรูป (a, b, c) โดยที่ค่า a, b, c ที่น้อยที่สุด

คือ $a=3, b=4, c=5$ จะพบว่า 3, 4, 5 จะมีตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม) เท่ากับ 1 เรียกจำนวนทั้งสาม ที่สอดคล้องสมการดังกล่าว และมี ห.ร.ม.เป็น 1 ว่า สามจำนวนพีทาโกรีสขั้นปฐมฐาน (Primitive Pythagorean triples) จะพบว่าสามารถหา สามจำนวนพีทาโกรีสอื่น ๆ ได้อีกโดย ถ้านำจำนวนเต็มบวก $d > 1$ คูณ กับ a, b, c จะได้ผลคูณเป็น da, db, dc และจะได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ}$$

$$(da)^2 + (db)^2 = (dc)^2$$

ดังนั้นจะได้ว่า (6, 8, 10), (9, 12, 15) จะเป็นสามจำนวนพีทาโกรีสแต่ไม่ได้เป็นสามจำนวนพีทาโกรีสขั้นปฐมฐานเพราะว่า ห.ร.ม. ของ 6, 8, 10 เท่ากับ 2 และ ห.ร.ม. ของ 9, 12, 15 เท่ากับ 3 ไม่ใช่ 1

การหาสูตรของสามจำนวนพีทาโกรีสขั้นปฐมฐาน

ถ้า (a, b, c) แทนสามจำนวนพีทาโกรีสขั้นปฐมฐาน และถ้า 2 จำนวนใดใน a, b, c มี ห.ร.ม เป็น d แล้ว จากสมการ $a^2 + b^2 = c^2$ จะได้ว่า d^2 จะต้องสามารถหารกำลังสองของจำนวนที่เหลือได้ลงตัว

ดังนั้น d จะหาร a, b, c ได้ลงตัวด้วย ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะกำหนดให้ (a, b, c) เป็นสามจำนวนพีทาโกรีสขั้นปฐมฐาน ดังนั้นไม่มี 2 จำนวนใดใน a, b, c มีตัวหารร่วมที่มากกว่า 1

ต่อไปจะพบว่า เลข 3 จำนวนนั้นจะต้องไม่เป็นเลขคี่ทั้งหมด

$$\text{เพราะว่า ถ้าให้ } a = 2r+1$$

$$b = 2s+1$$

$$c = 2t+1$$

เมื่อ r, s, t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
จะได้ว่า

$$(2r+1)^2 + (2s+1)^2 = (2t+1)^2$$

$$4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 = 4t^2 + 4t + 1$$

ดังนั้น

$$4r^2 + 4r + 4s^2 + 4s - 4t^2 - 4t + 1 = 0$$

หรือ เขียนเป็น

$$4(r^2 + r + s^2 + s - t^2 - t + 1) = 3$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ จากสมการข้างบนนี้
แสดงว่า 4 เป็นตัวหารของ 3 ได้ผลลัพธ์เป็น
จำนวนเต็ม (เพราะ $r, s, t, 1$ เป็นจำนวนเต็ม)
แต่แท้จริงแล้ว 3 หารด้วย 4 ไม่ลงตัว

ต่อไปจะสมมติให้ c เป็นเลขคู่ และ
 a, b เป็นเลขคี่

ดังนั้นถ้าให้

$$a = 2r + 1$$

$$b = 2s + 1$$

$$c = 2t$$

จะได้ว่า

$$(2r+1)^2 + (2s+1)^2 = (2t)^2$$

$$4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 = 4t^2$$

ดังนั้น

$$4r^2 + 4r + 4s^2 + 4s - 4t^2 - 4t + 2 = 0$$

หรือ เขียนเป็น

$$4(r^2 + r + s^2 + s - t^2 - t + 1) = 2$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ 4 หาร 2 ไม่ลงตัวเช่นกัน
ดังนั้น a หรือ b ตัวใดตัวหนึ่ง ต้องเป็นเลขคู่
หรือมีจะนั้นก็แสดงว่าอีก 2 จำนวนต้องเป็นเลขคี่

ถ้าให้ b เป็นเลขคู่โดยที่ a, c เป็น
เลขคี่ (กรณีให้ a เป็นเลขคู่ โดยที่ b, c เป็นเลข
คี่ ก็ทำได้เช่นเดียวกัน) จะได้ว่า

จาก $a^2 + b^2 = c^2$

จะได้ $b^2 = c^2 - a^2$

หรือ

$$\left(\frac{b^2}{2}\right) = \frac{(c-a)}{2} \cdot \frac{(c+a)}{2}$$

แต่เนื่องจาก b เป็นเลขคู่ และ a, c
เป็นเลขคี่ ดังนั้นจะได้ว่า $\frac{b}{2}, \frac{(c-a)}{2},$

$\frac{(c+a)}{2}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

สมมติให้ตัวหารร่วมมากของ $\frac{(c-a)}{2},$

$$\frac{(c+a)}{2} \text{ เป็น } 1$$

ถ้า d เป็นตัวหารร่วมอื่นๆ แล้ว d
ต้องหารผลบวก และผลต่าง ของ c กับ a ได้ลง
ตัว

แต่เนื่องจากห.ร.ม. ของ c กับ a คือ 1
ดังนั้น d ต้องหาร 1 ได้ลงตัว นั่นคือ

$$d = 1$$

และจะได้ว่า ผลคูณของ $\frac{(c-a)}{2}$ กับ $\frac{(c+a)}{2}$

ต้องเป็นกำลังสองสมบูรณ์

หรือ $\frac{(c-a)}{2} \cdot \frac{(c+a)}{2} = p^2$

จะมีกรณีที่เป็นไปได้กรณีเดียวคือแต่ละ
จำนวนเป็นกำลังสองสมบูรณ์หรือไม่ นั่นคือจะมี
จำนวนเต็มบวก x และ y ที่ซึ่ง

$$x^2 = \frac{c+a}{2}$$

$$y^2 = \frac{c-a}{2} \dots\dots\dots*$$

$$xy = \frac{b}{2}$$

นอกจากนี้ x ต้องมากกว่า y ด้วย
 เพราะว่า $x^2 = y^2 + a^2 > y^2$ และ
 $y > 0$ และ $c > a$ และเนื่องจาก x^2 และ y^2
 มี ห.ร.ม. เป็น 1 เช่นเดียวกันกับ ห.ร.ม ของ x
 และ y

ดังนั้น x และ y ไม่สามารถเป็นเลขคี่
 ทั้งสองตัวพร้อมกัน หรือจะได้ว่า

$x^2 - y^2 = a$ ต้องเป็นเลขคี่ซึ่ง
 เป็นไปไม่ได้ จึงได้ว่า x และ y ตัวใดตัว
 หนึ่งต้องเป็นเลขคี่

จากสมการ* ข้างต้นหาค่า a, b และ
 c จะได้ดังนี้

$$a = x^2 - y^2$$

$$b = 2xy \dots\dots\dots**$$

$$c = x^2 + y^2$$

$x > y > 0$ และเป็นจำนวนเต็ม
 $x - y$ เป็นเลขคี่ และ ห.ร.ม. ของ x กับ
 y หรือ $(x, y) = 1$

ตรวจสอบว่า (a, b, c) มีนิยามดังกล่าว
 ข้างต้น (**) เป็นสามจำนวนพีทาโกรีสหรือไม่
 ไม่ได้ดังนี้

$$a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$$

$$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$= (x^2 + y^2)^2 = c^2$$

สูตรการหาค่า a, b, c ใน (a, b, c) ใน
 (*) สามารถหาสามจำนวนพีทาโกรีสปฐมฐาน

ซึ่งทุก ๆ คู่ของจำนวนเต็มบวก x และ y ที่
 สอดคล้องเงื่อนไขนี้จะมีจำนวนที่เป็นสามจำนวน
 พีทาโกรีสปฐมฐาน และ ทุก ๆ สามจำนวน
 พีทาโกรีสปฐมฐาน (a, b, c) จะมีจำนวนเต็ม
 บวก x และ y ที่สอดคล้องเงื่อนไขนี้

จากสูตรดังกล่าวมาแล้วนี้จะสามารถหา
 (a, b, c) ซึ่งเป็นสามจำนวนพีทาโกรีสปฐม
 ฐานได้โดยกำหนดค่า x และ y ให้
 สอดคล้อง ดังจะเขียนเป็นตารางเมื่อกำหนดค่า x
 และ y ให้ไม่เกิน 7 ได้ดังนี้

ตัวอย่างของสามจำนวนพีทาโกรีสปฐมฐาน

x	y	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85

เอกสารอ้างอิง

Drexel University. (2006). **Ask Dr. Math**

FAQ: Dividing by Zero. [Online].

Available: <http://mathforum.org/dr.math/>

[faq/faq.devideby0.html](http://mathforum.org/faq/faq.devideby0.html). [2006, May 10].

Drexel University. (2006). **Ask Dr. Math**
FAQ: $0.9999\dots=1$. [Online].
Available: <http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.0.9999.html>. [2006,May 14]

Drexel University. (2006). **Ask Dr. Math**
FAQ: Pythagorean Triples. [Online].
Available: <http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pythag.triples.html>. [2006,July 14].

Drexel University. (2006). **Ask Dr. Math**
FAQ: $0!=1$. [Online]. Available:
<http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.0factorial.html>. [2006,July 14].

Drexel University. (2006). **Ask Dr. Math** **FAQ:**
Zero to Zero Power. [Online].
Available: <http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.0.to.0.power.htm>. [2006,July 14].