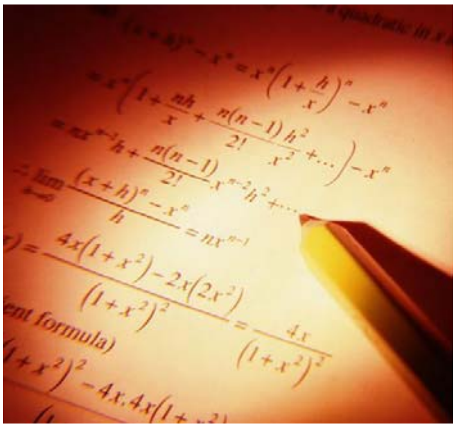
ข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์

รัตนพร บ่อคำ[1]



ในฐานะที่ผู้เขียนได้สอนคณิตศาสตร์มานาน ได้พบข้อผิดพลาดที่น่าสนใจเพื่อทำให้ผู้สนใจได้แลกเปลี่ยนเรียนรู้ข้อผิดพลาดเหล่านี้ ซึ่งเป็นสิ่งที่น่าสนใจไม่น้อย และผู้เขียนคิดว่าน่าจะได้ประโยชน์ต่อผู้สนใจโดยทั่วไปพอสมควร ดังต่อไปนี้

ข้อผิดพลาด 1) การใช้เครื่องหมาย “=” โดยไม่คำนึงถึงความหมาย เครื่องหมาย “=” ในทางคณิตศาสตร์ เป็นการแสดงการเท่ากัน เช่น การเขียน สมการเป็นการแสดงการเท่ากันก็จะใช้เครื่องหมาย “=” เช่น $2 = 1+1$, $X = 2$ เป็นการแสดงการเท่ากัน แต่ในบางครั้ง เมื่อนักเรียน หรือบางครั้งครูผู้สอน ไม่ระวังมักทำดังนี้

วิธีทำ $= 4+6$

$= 10$

จะพบว่าในที่นี้ไม่มีการแสดงการเท่ากันของปริมาณใด ๆ ซึ่งไม่ถูกต้อง

ข้อผิดพลาด 2) การนำเครื่องหมายการดำเนินการทางคณิตศาสตร์มาใช้ไม่ถูกต้อง

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์เช่น การบวก การลบ การคูณ การหาร $(+, -, \times, \div)$ นั้น จะใช้กับจำนวน เช่น $3+4$, 6×8 , $12 \div 3$ เป็นต้น แต่โดยทั่วไปมักเห็นการใช้ที่ไม่ถูกต้องเช่น

 +  = 8

ในกรณีนี้ต้องเป็น  รวมกับ  เท่ากับ 8

[1]รองศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม พิษณุโลก 65000

เขียนเป็นสัญลักษณ์ ดังนี้

$$4 + 4 = 8$$

ข้อผิดพลาด 3) ความหมายของการคูณกับการหาผลคูณในแนวตั้ง

เช่น $3 \times 456 = \square$

ในที่นี้ จะพบว่า

$$\begin{aligned} 3 \times 456 &= 456 + 456 + 456 \\ &= 1,368 \end{aligned}$$

นั่นคือ มี 456 อยู่ 3 ตัว หรือ 3 ครั้ง หรือ 3 ครั้งของ 456 แสดงว่า 3 จำนวนครั้งที่นำ 456 มาบวกซ้ำ ๆ กัน เรียกว่า 3 เป็นตัวคูณ ดังนั้นจึง นำมาเขียนในแนวตั้งดังนี้

$$\begin{array}{r} 456_{\times} \\ \underline{3} \\ \underline{\underline{1368}} \end{array}$$

เรียกว่า 3 เป็นตัวคูณ และ 456 เป็นตัวตั้ง ดังนั้นกรณีที่ต้องการหาผลคูณในโจทย์ที่ตัวตั้งน้อยกว่าตัวคูณ ก็สามารถทำได้โดยใช้การสลับที่ของการคูณเสียก่อน เช่นตัวอย่างต่อไปนี้

จงหาผลคูณของ 1278×3

ในที่นี้จะได้ว่า $1278 \times 3 = 3 \times 1278$

ดังนั้นจึงสามารถหาผลคูณได้ในแนวตั้งเหมือนกรณีข้างต้น

ในกรณีโจทย์บอกว่า มีกล่องสบู่อยู่ 25 กล่อง ๆละ 250 ก้อน จะมีสบู่ทั้งหมดกี่ก้อน

จะพบว่า จากโจทย์ สามารถเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $25 \times 250 = \square$

จากนั้นนำมาตั้งคูณ โดยให้ตัวตั้งเป็น 250 ตัวคูณเป็น 25

แต่โดยทั่วไปมักเขียนดังนี้

จากโจทย์สามารถเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $250 \times 25 = \square$

จากนั้นนำมาตั้งคูณ โดยให้ตัวตั้งเป็น 250 ตัวคูณเป็น 25 ไม่ถูกต้อง แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจว่า $250 \times 25 = \square$ หมายถึง ต้องการนำ 25 มาคูณกับ 250 โดยที่ตัวคูณคือ 25 ตัวตั้งคือ 250

ข้อผิดพลาด 4) การไม่ระวังในเรื่องการหาผลคูณของนิพจน์ทางพีชคณิต เช่น

$(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2$ และ $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^3$ โดยทั่วไปนักเรียนจะทำดังนี้

$$(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2 = x + y$$

$$(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^3 = x - y$$

ซึ่งไม่ถูกต้อง โดยลืมไปว่า การเขียนจำนวนในรูปเลขยกกำลังหมายถึงการนำตัวฐานมาคูณกันเท่ากับเลขชี้กำลัง ดังนั้นในที่นี้ จะต้องนำนิพจน์ในวงเล็บมาคูณกัน ดังนี้

$$(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = (x^{\frac{1}{2}\cdot 2} + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}\cdot 2})$$

$$= (x + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)$$

ดังนั้นที่นักเรียนทำผิดไปคือไม่มีพจน์กลางแต่มักนำเลขชี้กำลังมาคูณกับเลขชี้กำลังของแต่ละพจน์ ซึ่งไม่ถูกต้อง

ส่วนกรณี $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^3$ นั้นก็ต้องนำมาเขียนในรูปการคูณกัน ดังนี้

$$\begin{aligned}
(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^3 &= (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \\
&= x^{\frac{1}{2}\cdot 3} - 3x^{\frac{1}{2}\cdot 2}y^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}\cdot 2} - y^{\frac{1}{2}\cdot 3} \\
&= x^{\frac{3}{2}} - 3x\,y^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

ข้อผิดพลาด 5) การหาผลคูณของจำนวนสองจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริง เช่น $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}$

ในกรณีนี้นักเรียนจะตอบว่า $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = \sqrt{(-2)(-2)} = \sqrt{4} = 2$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

จะพบว่า $\sqrt{-2}$ ไม่ใช่จำนวนจริง เนื่องจากเราไม่สามารถหาจำนวนจริงใด ๆ ที่ยกกำลังสองแล้วได้เท่ากับ -2 นั่นก็แสดงว่า ในเมื่อไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้เท่ากับ -2 เราจึงกล่าวว่า $\sqrt{-2}$ ไม่เป็นจำนวน จริง และจะสามารถหาผลคูณของจำนวนชนิดนี้ได้ดังนี้

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = \sqrt{(-1)\cdot 2}\cdot\sqrt{(-1)\cdot 2}$$

$$= 2\sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-1)}$$

$$= 2\mathbf{i}^2 \quad \text{เมื่อ} \quad \mathbf{i} = \sqrt{-1}$$

$$= -2$$

เรียก $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ ว่าจำนวนจินตภาพ (imaginary number)

หรือกล่าวง่าย ๆ ได้ว่า ถ้าต้องการหา $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}$ จะนำจำนวน ในเครื่องหมายรากมาคูณกันก่อนแล้วหารากที่สองไม่ได้ เมื่อเป็นเช่นนี้จึงสามารถหาผลคูณได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$$

ข้อผิดพลาด 6) การหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับร้อยละ เช่น ต้องการหาคำตอบว่าเด็กนักเรียนคนหนึ่งสอบได้คะแนน 30 จากคะแนนเต็ม 40 อยากทราบว่าเด็กคนนี้ได้คะแนนร้อยละเท่าใด

วิธีคิดที่เคยพบก็คือ นักเรียนจะตอบว่า นำ 100 มาคูณ $\frac{30}{40}$ เป็นดังนี้ $\frac{30}{40}\times 100 = 75\%$

ซึ่งไม่ถูกต้อง ทั้งนี้เพราะ $\frac{30}{40}\times 100 \neq 75\%$ แต่ $\frac{30}{40}\times 100 = 75$

ดังนั้นที่ถูกก็คือต้องบอกว่าการหาร้อยละ จะต้องนำ 100% มาคูณ $\frac{30}{40}$ จะได้ว่า

$$\frac{30}{40}\times 100\% = \frac{30}{40}\times\frac{100}{100}$$

$$= \frac{75}{100} = 75\%$$

ข้อผิดพลาด 7) การหาคำตอบเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาเรื่องสัดส่วน เช่น คน 10 คน ทำงานชิ้นหนึ่งเสร็จในเวลา 5 วัน ถ้ามีคน 15 คนจะทำงานนี้จะเสร็จในเวลากี่วัน นักเรียนจะทำดังนี้ สมมุติให้ชาย 15 คนทำงานในเวลา X วัน และเขียนเป็นสัดส่วนดังนี้

กรณีที่ 1 $\frac{5}{10} = \frac{X}{15}$

หรือ กรณีที่ 2 $\frac{15}{10} = \frac{X}{5}$

ทั้งสองกรณีจะได้ว่า $X = \frac{5 \times 15}{10} = 7\frac{1}{2}$

นั่นคือคน 15 คนจะทำงานเสร็จในเวลา $7\frac{1}{2}$ วัน ซึ่งเป็นการคิดที่ไม่ถูกต้อง เพราะว่าคนมากขึ้นต้องทำงานเสร็จเร็วขึ้น จำนวนวันต้องน้อยกว่า 5 วัน ดังนั้นที่เป็นเช่นนี้ผิดตรงไหน ในที่นี้จะพบว่า สัดส่วนหมายถึงอัตราส่วนที่เท่ากัน ดังนั้นเมื่อนักเรียนเขียนสัดส่วนต้องแน่ใจว่าอัตราส่วน 2 อัตราส่วนนั้นเท่ากันหรือไม่ ในที่นี้จะพบว่า การเขียนสัดส่วนทั้งสองกรณีไม่ถูกต้อง ดังนั้นการหา อัตราส่วนที่เท่ากันทำอย่างไรมี นักเรียนบางคน ได้เสนอว่าให้กลับเศษส่วนข้างใดข้างหนึ่งเสีย ก็จะได้คำตอบที่เป็นไปได้ ซึ่งวิธีคิดดังกล่าวก็ไม่สามารถแน่ใจได้ว่าคำตอบที่ได้จะถูกต้องเสมอไป ดังเช่นถ้าเขียนสัดส่วนดังกรณีที่ 1 โดยลองกลับเศษส่วนข้างใดข้างหนึ่ง จะทำให้ได้ผลดังนี้

$\frac{10}{5} = \frac{X}{15}$ จะได้คำตอบของ X เป็น 30 วัน ซึ่งไม่ถูกต้อง

แต่ในกรณีที่เขียนสัดส่วนดังกรณีที่ 2 ถ้ากลับเศษส่วนข้างใดข้างหนึ่งจะสามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้ ซึ่งทำให้เกิดข้อสงสัยว่าถ้าเช่นนั้นวิธีการเขียนสัดส่วนที่ถูกต้องควรเป็นเช่นไร

วิธีคิด คนงาน 10 คน ทำงาน เสร็จในเวลา 5 วัน

คนงาน 1 คน ทำงานนี้เสร็จในเวลา 5×10 วัน

สมมุติคนงาน 15 คนทำงานเสร็จในเวลา X วัน

ดังนั้นคนงาน 1 คนทำงานเสร็จในเวลา 15X วัน

ดังนั้นจะได้ว่า $5 \times 10 = 15X$ …. (1)

นำ 5×15 หารทั้งสองข้างของสมการ (1)

ดังนั้นสัดส่วนที่ถูกต้องคือ $\frac{10}{15} = \frac{X}{5}$ …. (2)

หรือนำ 10×15 หารทั้งสองข้างของสมการ (1)

จะได้สัดส่วนเป็น $\frac{5}{15} = \frac{X}{10}$ …. (3)

จาก สัดส่วน (2) และ (3) หาค่า X ได้เป็น $3\frac{1}{3}$ วัน นั่นคือ คนงาน 15 คนทำงานชิ้น เดียวกันจะแล้วเสร็จใน $3\frac{1}{3}$ วัน

ข้อผิดพลาด 8) $0^0 = 0$

มีนักเรียนบอกว่าจำนวนจริงใด ๆ ยกกำลังศูนย์แล้วเป็น 1 นั่นคือ $a^0 = 1, a \neq 0$ ซึ่งเป็นจริง แต่ข้อสรุปที่ว่า ดังนั้นถ้า $a = 0$ จะได้ว่า $0^0 = 0$ ข้อสรุปนี้ถูกหรือไม่

สำหรับการสรุปว่า 0^0 มีค่าเป็นเท่าใดยังมีข้อที่ตกลงกันไม่ได้

บางท่านให้นิยามไปเลยว่า $0^0 = 1$ โดยมีความคิดว่า

0^0 หมายถึงการไม่ได้คูณกันเลยของศูนย์ (an empty product of Zeros)

การอธิบายเชิงการจัด (combinatorial interpretation) ของ 0^0 คือจำนวนของความว่างเปล่าของสมาชิกของเซตว่าง ซึ่งจะได้ว่า 0^0 มี ค่าเป็น 1

ในเรื่องเซต หมายถึงจำนวนฟังก์ชันจากเซตว่างไปยังเซตว่าง ซึ่งจะได้ว่ามีฟังก์ชันอยู่ 1 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันศูนย์

ในเรื่องทฤษฎีบทของพหุนาม และอนุกรมกำลัง ที่ว่า พจน์ค่าคงตัว (constant term) สามารถเขียนในรูป ax^n สำหรับทุก ๆ หรือ เอกลักษณ์ที่ไม่เป็นจริง สำหรับ $x = 0$ ยกเว้นเมื่อ $0^0 = 1$ หรือทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem) จะไม่เป็นจริงเมื่อ $x = 0$ ยกเว้น $0^0 = 1$

ในวิชาแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (diferrential calculus) กฎเกี่ยวกับการยกกำลัง (power rule)ไม่จริง สำหรับ $n=1$ เมื่อ $x=0$ ยกเว้น $0^0=1$

อีกกรณีหนึ่ง 0^0 เรียกว่าเป็นรูปแบบไม่กำหนด (indeterminate form) เป็นการกล่าวเกี่ยวกับการหา ลิมิต ของฟังก์ชันที่เกี่ยวกับกับการดำเนินการทางพีชคณิตซึ่ง สามารถคำนวณได้โดยการแทนค่าถ้าผลลัพธ์ไม่ได้กำหนดลิมิตเริ่มต้น แล้วนิพจน์นั้นจะเรียกว่า อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด (indeterminate form) เช่น ฟังก์ชัน z^z เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซตของจำนวนเชิงซ้อน โดยการเลือก $z^z=e^{z\log z}$ แต่จะพบว่า จะไม่สามารถหา $\log z$ ได้เมื่อ $z=0$ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องกำหนดฟังก์ชันนี้ว่า เป็นฟังก์ชันในโดเมนของจำนวนจริงบวก

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วการสรุปว่า $0^0=0$ นั้นไม่ถูกต้องแต่จะกล่าวว่า 0^0 อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดหรือเป็นจำนวนที่ยังไม่กำหนดว่าจะเป็นเท่าใด นั่นเอง แต่อย่างไรก็ดี $0^0\neq 0$ และจะพบข้อสรุปดังต่อไปนี้

$a^{+\infty}=+\infty \quad , \quad a^{-\infty}=0$ เมื่อ $1<a\leq +\infty$

$a^{+\infty}=0 \quad , \quad a^{-\infty}=+\infty$ เมื่อ $0\leq a<1$

$0^b=0 \quad , \quad (+\infty)^b=+\infty$ เมื่อ $0<b\leq +\infty$

$0^b=+\infty \quad , \quad (+\infty)^b=0$ เมื่อ $-\infty\leq b<0$