

ลักษณะเฉพาะของความปกติบนสมาชิกในกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ Characterization of Regularity on Elements in the Bicyclic Semigroup

นเรศ สวัสดิ์รักษา^{*1} ชัญญา เล็กเจริญศรี² พันธกานต์ เวชกรณ² และพัชรภรณ์ สีทอง²
Nares Sawatraksa^{*1}, Chanya Lekjaroensri², Panthakan Wetchakorn²,
& Patcharaporn Sitong²

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์

²หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์) สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์

¹Division of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Nakhon Sawan Rajabhat University

²Master of Science Program in Teaching Mathematics, Division of Mathematics and Statistics,
Faculty of Science and Technology, Nakhon Sawan Rajabhat University

Submitted 1/7/2024 ; Revised 29/8/2024 ; Accepted 15/10/2024

บทคัดย่อ

ให้ $\mathbb{N}^0$ แทนเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $B := \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ นิยามการดำเนินการทวิภาคบนเซต B โดย

$$(a, b)(c, d) = (a - b + t, d - c + t)$$

เมื่อ $t = \max\{b, c\}$ สำหรับทุก $a, b, c, d \in \mathbb{N}^0$ จะได้ว่า B เป็นกึ่งกรุปปกติ และจะถูกระบุเรียกว่ากึ่งกรุปวัฏจักรคู่ ในงานวิจัยฉบับนี้ ศึกษาลักษณะเฉพาะของสมาชิกปกติภายใน สมาชิกปกติซ้าย สมาชิกปกติขวา และสมาชิกปกติบริบูรณ์ บนกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ นอกจากนั้น พิสูจน์ว่าเซตของสมาชิกปกติภายใน สมาชิกปกติซ้าย สมาชิกปกติขวา และสมาชิกปกติบริบูรณ์ของ B ทั้งหมด เป็นกึ่งกรุปย่อยของ B

คำสำคัญ: ปกติซ้าย ปกติขวา ปกติบริบูรณ์ ปกติภายใน

***ผู้ประสานงานหลัก (Corresponding Author)**

E-mail: nares.sa@nsru.ac.th

Abstract

Let $\mathbb{N}^0$ denote the set of all non-negative integers, and $B := \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$. Define a binary operation on B by

$$(a, b)(c, d) = (a - b + t, d - c + t)$$

where $t = \max\{b, c\}$ for all $a, b, c, d \in \mathbb{N}^0$. Then B is a regular semigroup and called the bicyclic semigroup. In this paper, we investigate characterizations of intra-regular elements, left regular elements, right regular elements, and completely regular elements on the bicyclic semigroup. Moreover, we also prove that the set of all left regular elements, right regular elements, completely regular elements, and intra-regular elements of B forms a subsemigroup of B .

Keywords: left regular, right regular, completely regular, intra-regular

บทนำ

กึ่งกรุป (semigroup) คือ โครงสร้างทางพีชคณิตที่ประกอบด้วยเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง S และการดำเนินการทวิภาคบนเซต S ที่สอดคล้องสมบัติปิด (closer) และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative) การศึกษา กึ่งกรุปอย่างเป็นทางการเริ่มขึ้นราวคริสต์ศตวรรษที่ 20 ซึ่งแนวคิดของกึ่งกรุปนับว่ามีความสำคัญต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ในหลากหลายด้าน ในทางด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ได้ใช้กึ่งกรุปเป็นตัวแบบพื้นฐาน (fundamental model) สำหรับการศึกษาาระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (linear time-invariant system) นับตั้งแต่ปี ค.ศ. 1950 เป็นต้นมา กึ่งกรุปมีบทบาทสำคัญในการศึกษาทฤษฎีวิทยาการคอมพิวเตอร์ ทั้งนี้เพราะโครงสร้างของกึ่งกรุปจำกัดมีความเชื่อมโยงกับออโตมาตาจำกัด (finite automata) การที่ออโตมาตาจะทำงานได้นั้นต้องอาศัยภาษา (languages) ในการสร้างภาษาต้องศึกษาทฤษฎีของไวยากรณ์ (grammar) ภาษาปกติ (regular languages) ภาษาทางการ (formal languages) ซึ่งอาศัยโครงสร้างของกึ่งกรุป เพราะลักษณะของการสร้างประโยคของภาษานั้นอาศัยสมบัติปิดและการเปลี่ยนหมู่ซึ่งเป็นเงื่อนไขของระบบทางคณิตศาสตร์ที่เป็นกึ่งกรุป นอกจากนี้แล้วโครงสร้างของกึ่งกรุปมีความซับซ้อนน้อยกว่าโครงสร้างทางพีชคณิตนามธรรมอื่น ๆ [1-5]

แนวคิดที่สำคัญอีกแนวคิดหนึ่งของกึ่งกรุปที่ถูกนำเสนอโดย Clifford [6] ในปี ค.ศ. 1941 ซึ่งศึกษาสมาชิก a ของกึ่งกรุป S ที่สอดคล้องเงื่อนไขว่า มี $x \in S$ ที่ทำให้ $a = axa$ และ $ax = xa$ ซึ่งเรียกว่า สมาชิกปกติบริบูรณ์ (completely regular) และในปี ค.ศ. 1953 Croisot [7] ได้ศึกษาแนวคิดดังกล่าวอีกครั้งหนึ่ง และยังศึกษาแนวคิดอื่นที่มีความใกล้เคียงกัน คือ สมาชิกปกติซ้าย (left regular) สมาชิกปกติขวา (right regular) และสมาชิกปกติภายใน (intra-regular) นอกจากนี้ยังได้มีการพิสูจน์ว่า a เป็นสมาชิกปกติบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ a เป็นสมาชิกปกติซ้ายและขวา และแนวคิดของความปกติทั้งหมดเป็นแนวคิดเดียวกันในกึ่งกรุปสลับที่ [8]

ให้ N^0 แทนเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $B = N^0 \times N^0$ นิยามการดำเนินการทวิภาคบน B โดย

$$(a, b)(c, d) = (a - b + t, d - c + t)$$

เมื่อ $t = \max\{b, c\}$ สำหรับทุก $a, b, c, d \in N^0$ จะได้ว่า B เป็นกึ่งกรุป และเรียกว่า กึ่งกรุปวัฏจักรคู่ (bicyclic semigroup) งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ได้มีการเผยแพร่เป็นครั้งแรกโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อ Lyapin [9] ในปี ค.ศ. 1953 แต่มีการกล่าวอ้างจาก Clifford และ Preston อ้างว่ามีบุคคลที่ทำงานร่วมกับ David Rees ได้ศึกษาเกี่ยวกับกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ในช่วงก่อนปี ค.ศ. 1943 แต่ไม่ได้มีการเผยแพร่ผลงาน กึ่งกรุปวัฏจักรคู่ถือเป็นโครงสร้างทางพีชคณิตที่สำคัญของคณิตศาสตร์สำหรับทฤษฎีโครงสร้างของกึ่งกรุป ดังนั้นจึงมีการประยุกต์ใช้ในหลากหลายงาน เช่น การอธิบายกราฟต้นไม้แบบทวิภาค และพีชคณิตเชิงสัมพันธ์ เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 2020 Hovsepyan [10] นำเสนอเงื่อนไขของสมสณฐานระหว่างกึ่งกรุปย่อยผกผันของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ ในปี ค.ศ. 2022 Gutik และคณะ [11] พิสูจน์ว่าเซตของฟังก์ชันอันตรสณฐาน (endomorphisms) บนกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ทั้งหมดสมสณฐานกับกึ่งผลคูณตรง (semidirect product) และในปีเดียวกันนี้ Schwab [12] แสดงว่า กึ่งกรุปวัฏจักรคู่เป็นโมนอยด์ผกผันเชิงเดียวคู่เชิงการจัด (combinatorial bisimple inverse monoid) เพียงชนิดเดียวที่มีโมนอยด์ย่อยผกผันแบบเกจเป็นกึ่งแลตทิซ (semilattice) ของนิพจน์ (idempotent) เมื่อไม่นานมานี้ (ค.ศ. 2024) Kudryavtsev [13]

พิสูจน์ว่า กึ่งกรุปวัฏจักรไม่เป็นทั้งแบบฝังเฉพาะที่ในชั้นของกึ่งกรุปจำกัด (locally embeddable into the class of finite semigroups) และแบบคลุมเฉพาะที่โดยชั้นของกึ่งกรุปจำกัด (locally wrapped by the class of finite semigroups) นอกจากนี้ยังมีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากได้ขยายแนวคิดของกึ่งกรุปวัฏจักรจากเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบไปยังเซตของจำนวนเต็ม

ในงานวิจัยฉบับนี้ คณะผู้จัดทำศึกษาลักษณะเฉพาะของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ บนกึ่งกรุปวัฏจักร นอกจากนั้น คณะผู้จัดทำพิสูจน์ว่าเซตของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของ B ทั้งหมดเป็นกึ่งกรุปย่อยของ B

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาลักษณะเฉพาะของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ บนกึ่งกรุปวัฏจักร
2. เพื่อพิสูจน์ว่าเซตของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของกึ่งกรุปวัฏจักรทั้งหมดเป็นกึ่งกรุปย่อย

วิธีดำเนินการวิจัย

การดำเนินการศึกษาลักษณะเฉพาะของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ บนกึ่งกรุปวัฏจักร เริ่มต้นจากการศึกษาตัวอย่างของสมาชิกในกึ่งกรุปวัฏจักรตามนิยามของหัวข้อที่กล่าวมาแล้วข้างต้น หลังจากนั้น กำหนดเงื่อนไขของสมาชิกของกึ่งกรุปวัฏจักร และสุดท้าย ดำเนินการพิสูจน์ทฤษฎีบท ดังหัวข้อต่อไปนี้

สมาชิกปรกติภายใน

บทนิยาม 1 [8] ให้ S เป็นกึ่งกรุป และ $a \in S$ จะกล่าวว่า a เป็นสมาชิกปรกติภายใน (intra-regular element) ของ S ก็ต่อเมื่อ มี $b, c \in S$ ที่ทำให้ $a = ba^2c$

การศึกษาตัวอย่างของสมาชิกปรกติภายในจะแบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้

ตัวอย่าง 1 (4,3) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}(3,4)(4,3)(4,3)(3,3) &= (3 - 4 + \max\{4,4\}, 3 - 4 + \max\{4,4\}) \\ &\quad (4 - 3 + \max\{3,3\}, 3 - 3 + \max\{3,3\}) \\ &= (3 - 4 + 4, 3 - 4 + 4)(4 - 3 + 3, 3 - 3 + 3) \\ &= (3,3)(4,3) \\ &= (3 - 3 + \max\{3,4\}, 3 - 4 + \max\{3,4\}) \\ &= (3 - 3 + 4, 3 - 4 + 4) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

ดังนั้น (4,3) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B

ตัวอย่าง 2 (3,4) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 (3,3)(3,4)(3,4)(4,3) &= (3 - 3 + \max\{3,3\} \ 4 - 3 + \max\{3,3\}) \\
 &\quad (3 - 4 + \max\{4,4\}, 3 - 4 + \max\{4,4\}) \\
 &= (3 - 3 + 3, 4 - 3 + 3)(3 - 4 + 4, 3 - 4 + 4) \\
 &= (3,4)(3,3) \\
 &= (3 - 4 + \max\{4,3\}, 3 - 3 + \max\{4,3\}) \\
 &= (3 - 4 + 4, 3 - 3 + 4) \\
 &= (3,4)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น (3,4) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B

ตัวอย่าง 3 (4,4) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 (3,3)(4,4)(4,4)(3,3) &= (3 - 3 + \max\{3,4\}, 4 - 4 + \max\{3,4\}) \\
 &\quad (4 - 4 + \max\{4,3\}, 3 - 3 + \max\{4,3\}) \\
 &= (3 - 3 + 4, 4 - 4 + 4)(4 - 4 + 4, 3 - 3 + 4) \\
 &= (4,4)(4,4) \\
 &= (4 - 4 + \max\{4,4\}, 4 - 4 + \max\{4,4\}) \\
 &= (4 - 4 + 4, 4 - 4 + 4) \\
 &= (4,4)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น (4,4) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B

การสังเกตจากตัวอย่าง นำไปสู่ข้อสรุปทางทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 (x, y) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B สำหรับทุก $(x, y) \in B$

บทพิสูจน์ ให้ $(x, y) \in B$ จะแสดงว่า (x, y) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B

กรณี 1 สมมติว่า $x \leq y$ จะได้ว่า $\max\{x, y\} = y$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
 (x, x)(x, y)(x, y)(y, x) &= (x - x + \max\{x, x\}, y - x + \max\{x, x\}) \\
 &\quad (x - y + \max\{y, y\}, x - y + \max\{y, y\}) \\
 &= (x - x + x, y - x + x)(x - y + y, x - y + y) \\
 &= (x, y)(x, x) \\
 &= (x - y + \max\{y, x\}, x - x + \max\{y, x\}) \\
 &= (x - y + y, x - x + y) \\
 &= (x, y)
 \end{aligned}$$

กรณี 2 สมมติว่า $y < x$ จะได้ว่า $\max\{x, y\} = x$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
 (y, x)(x, y)(x, y)(y, y) &= (y - x + \max\{x, x\}, y - x + \max\{x, x\}) \\
 &\quad (x - y + \max\{y, y\}, y - y + \max\{y, y\}) \\
 &= (y - x + x, y - x + x)(x - y + y, y - y + y) \\
 &= (y, y)(x, y) \\
 &= (y - y + \max\{y, x\}, y - x + \max\{y, x\}) \\
 &= (y - y + x, y - x + x) \\
 &= (x, y)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น (x, y) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B

สมาชิกปกติซ้าย

บทนิยาม 2 [8] ให้ S เป็นกึ่งกรุป และ $a \in S$ จะกล่าวว่า a เป็นสมาชิกปกติซ้าย (left regular element) ของ S ก็ต่อเมื่อ มี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = ba^2$

ตัวอย่าง 4 $(4,3)$ เป็นสมาชิกปกติซ้ายของ B

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}(3,4)(4,3)(4,3) &= (3 - 4 + \max\{4,4\}, 3 - 4 + \max\{4,4\})(4,3) \\ &= (3 - 4 + 4, 3 - 4 + 4)(4,3) \\ &= (3,3)(4,3) \\ &= (3 - 3 + \max\{3,4\}, 3 - 4 + \max\{3,4\}) \\ &= (3 - 3 + 4, 3 - 4 + 4) \\ &= (4,3)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(4,3)$ เป็นสมาชิกปกติซ้ายของ B

ตัวอย่าง 5 $(3,4)$ ไม่เป็นสมาชิกปกติซ้ายของ B

วิธีทำ สมมติว่า $(3,4)$ เป็นสมาชิกปกติซ้ายของ B จะได้ว่า มี $(a,b) \in B$ ที่ทำให้

$$(a,b)(3,4)(3,4) = (3,4)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}(a,b)(3 - 4 + \max\{4,3\}, 4 - 3 + \max\{4,3\}) &= (3,4) \\ (a,b)(3 - 4 + 4, 4 - 3 + 4) &= (3,4) \\ (a,b)(3,5) &= (3,4) \\ (a - b + t, 5 - 3 + t) &= (3,4)\end{aligned}$$

เมื่อ $t = \max\{b, 3\}$ จะได้ว่า $2 + t = 4$ นั่นคือ $t = 2$ ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับ $t = \max\{b, 3\}$

ดังนั้น $(3,4)$ ไม่เป็นสมาชิกปกติซ้ายของ B

การสังเกตจากตัวอย่าง นำไปสู่ข้อสรุปทางทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2 ให้ $(x,y) \in B$ จะได้ว่า (x,y) เป็นสมาชิกปกติซ้ายของ B ก็ต่อเมื่อ $x \geq y$

บทพิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติว่า $x < y$ และ (x,y) เป็นสมาชิกปกติซ้ายของ B จะได้ว่า มี $(a,b) \in B$

ที่ทำให้ $(a,b)(x,y)(x,y) = (x,y)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}(a,b)(x - y + \max\{y,x\}, y - x + \max\{y,x\}) &= (x,y) \\ (a,b)(x - y + y, y - x + y) &= (x,y) \\ (a,b)(x, 2y - x) &= (x,y) \\ (a - b + \max\{b,x\}, 2y - x - x + \max\{b,x\}) &= (x,y) \\ (a - b + \max\{b,x\}, 2y - 2x + \max\{b,x\}) &= (x,y)\end{aligned}$$

กรณี 1 สมมติว่า $\max\{b,x\} = x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}2y - 2x + x &= y \\ 2y - x &= y \\ x &= y\end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน $x < y$

กรณี 2 สมมติว่า $\max\{b, x\} = b$ เนื่องจาก $x < y$ จะได้ว่า $x - y < 0$ เพราะฉะนั้น

$$2y - 2x + b = y$$

$$2y - 2x + b = y$$

$$b = 2x - y$$

$$b = x + (x - y) < x$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ $\max\{b, x\} = b$

จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งทั้งสองกรณี ดังนั้น (x, y) ไม่เป็นสมาชิกปรกติซ้ายของ B เมื่อ $x < y$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $x \geq y$ จะแสดงว่า (x, y) เป็นสมาชิกปรกติซ้ายของ B เนื่องจาก $x \geq y$

จะได้ว่า $2x \geq x + y$ เพราะฉะนั้น $2x - y \geq x$ พิจารณา

$$(y, x)(x, y)(x, y) = (y, x)(x - y + \max\{y, x\}, y - x + \max\{y, x\})$$

$$= (y, x)(x - y + x, y - x + x)$$

$$= (y, x)(2x - y, y)$$

$$= (y - x + \max\{x, 2x - y\}, y - (2x - y) + \max\{x, 2x - y\})$$

$$= (y - x + 2x - y, y - (2x - y) + 2x - y)$$

$$= (x, y)$$

ดังนั้น (x, y) เป็นสมาชิกปรกติซ้ายของ B

ต่อไปจะแสดงว่าเซตของสมาชิกปรกติซ้ายของ B ทั้งหมดเป็นกึ่งกรุปย่อยของ B โดยการประยุกต์ใช้บทนิยามและทฤษฎีบทต่อไปนี้

บทนิยาม 3 [8] ให้ S เป็นกึ่งกรุป และ $T \subseteq S$ โดยที่ $T \neq \emptyset$ จะกล่าวว่า T เป็นกึ่งกรุปย่อย (subsemigroup) ของ S ก็ต่อเมื่อ T เป็นกึ่งกรุปภายใต้การดำเนินการเดียวกับ S

ทฤษฎีบท 3 [8] ให้ S เป็นกึ่งกรุป และ $T \subseteq S$ โดยที่ $T \neq \emptyset$ จะได้ว่า T เป็นกึ่งกรุปย่อยของ S ก็ต่อเมื่อ $ab \in T$ สำหรับทุก $a, b \in T$

ทฤษฎีบท 4 ให้ L เป็นเซตของสมาชิกปรกติซ้ายของ B ทั้งหมด จะได้ว่า L เป็นกึ่งกรุปย่อยของ B

บทพิสูจน์ ให้ $(a, b), (c, d) \in L$ และ $t = \max\{b, c\}$ พิจารณา

$$(a, b)(c, d) = (a - b + t, d - c + t)$$

จะแสดงว่า $a - b + t \geq d - c + t$ เนื่องจาก (a, b) และ (c, d) เป็นสมาชิกปรกติซ้ายของ B โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $a \geq b$ และ $c \geq d$ เพราะฉะนั้น $a - b \geq 0$ และ $d - c \leq 0$ ดังนั้น $d - c \leq 0 \leq a - b$ เพราะฉะนั้น $d - c + t \leq a - b + t$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $(a - b + t, d - c + t)$ เป็นสมาชิกปรกติซ้ายของ B นั่นคือ $(a, b)(c, d) \in L$ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า L เป็นกึ่งกรุปย่อยของ B

สมาชิกปกติขวา

บทนิยาม 4 [8] ให้ S เป็นกึ่งกรุป และ $a \in S$ จะกล่าวว่า a เป็นสมาชิกปกติขวา (right regular element) ของ S ก็ต่อเมื่อ มี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = a^2b$

ตัวอย่าง 6 $(3,4)$ เป็นสมาชิกปกติขวาของ B

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}(3,4)(3,4)(4,3) &= (3 - 4 + \max\{4,3\}, 4 - 3 + \max\{4,3\})(4,3) \\ &= (3 - 4 + 4, 4 - 3 + 4)(4,3) \\ &= (3,5)(4,3) \\ &= (3 - 5 + \max\{5,4\}, 3 - 4 + \max\{5,4\}) \\ &= (3 - 5 + 5, 3 - 4 + 5) \\ &= (3,4)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(3,4)$ เป็นสมาชิกปกติขวาของ B

ตัวอย่าง 7 $(4,3)$ ไม่เป็นสมาชิกปกติขวาของ B

วิธีทำ สมมติว่า $(4,3)$ เป็นสมาชิกปกติขวาของ B จะได้ว่า มี $(a,b) \in B$ ที่ทำให้

$$(4,3)(4,3)(a,b) = (4,3)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}(4 - 3 + \max\{3,4\}, 3 - 4 + \max\{3,4\})(a,b) &= (4,3) \\ (4 - 3 + 4, 3 - 4 + 4)(a,b) &= (4,3) \\ (5,3)(a,b) &= (4,3) \\ (5 - 3 + t, b - a + t) &= (4,3)\end{aligned}$$

เมื่อ $t = \max\{3, a\}$ จะได้ว่า $2 + t = 4$ นั่นคือ $t = 2$ ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับ $t = \max\{3, a\}$

ดังนั้น $(4,3)$ ไม่เป็นสมาชิกปกติขวาของ B

การสังเกตจากตัวอย่าง นำไปสู่ข้อสรุปทางทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5 ให้ $(x,y) \in B$ จะได้ว่า (x,y) เป็นสมาชิกปกติขวาของ B ก็ต่อเมื่อ $x \leq y$

บทพิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติว่า $x > y$ และ (x,y) เป็นสมาชิกปกติขวาของ B จะได้ว่า มี $(a,b) \in B$ ที่ทำให้ $(x,y)(x,y)(a,b) = (x,y)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}(x - y + \max\{y, x\}, y - x + \max\{y, x\})(a,b) &= (x,y) \\ (x - y + x, y - x + x)(a,b) &= (x,y) \\ (2x - y, y)(a,b) &= (x,y) \\ (2x - y - y + \max\{y, a\}, b - a + \max\{y, a\}) &= (x,y) \\ (2x - 2y + \max\{y, a\}, b - a + \max\{y, a\}) &= (x,y)\end{aligned}$$

กรณี 1 สมมติว่า $\max\{y, a\} = y$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}2x - 2y + y &= x \\ 2x - y &= x \\ x &= y\end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน $x > y$

กรณี 2 สมมติว่า $\max\{y, a\} = a$ เนื่องจาก $x > y$ จะได้ว่า $y - x < 0$ เพราะฉะนั้น

$$2x - 2y + a = x$$

$$x - 2y + a = x$$

$$a = 2y - x$$

$$a = y + (y - x) < y$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ $\max\{y, a\} = a$

จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งทั้งสองกรณี ดังนั้น (x, y) ไม่เป็นสมาชิกปรกติขวาของ B เมื่อ $x > y$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $x \leq y$ จะแสดงว่า (x, y) เป็นสมาชิกปรกติขวาของ B เนื่องจาก $x \leq y$

จะได้ว่า $2y \geq x + y$ เพราะฉะนั้น $2y - x \geq y$ พิจารณา

$$(x, y)(x, y)(y, x) = (x - y + \max\{y, x\}, y - x + \max\{y, x\})(y, x)$$

$$= (x - y + y, y - x + y)(y, x)$$

$$= (x, 2y - x)(y, x)$$

$$= (x - (2y - x) + \max\{2y - x, y\}, x - y + \max\{2y - x, y\})$$

$$= (x - (2y - x) + 2y - x, x - y + 2y - x)$$

$$= (x, y)$$

ดังนั้น (x, y) เป็นสมาชิกปรกติขวาของ B

ทฤษฎีบท 6 ให้ R เป็นเซตของสมาชิกปรกติขวาของ B ทั้งหมด จะได้ว่า R เป็นกึ่งกรุปย่อยของ B

บทพิสูจน์ ให้ $(a, b), (c, d) \in R$ และ $t = \max\{b, c\}$ พิจารณา

$$(a, b)(c, d) = (a - b + t, d - c + t)$$

จะแสดงว่า $a - b + t \leq d - c + t$ เนื่องจาก (a, b) และ (c, d) เป็นสมาชิกปรกติขวาของ B

โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $a \leq b$ และ $c \leq d$ เพราะฉะนั้น $a - b \leq 0$ และ $d - c \geq 0$ ดังนั้น

$a - b \leq 0 \leq d - c$ เพราะฉะนั้น $a - b + t \leq d - c + t$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$(a - b + t, d - c + t)$ เป็นสมาชิกปรกติขวาของ B นั่นคือ $(a, b)(c, d) \in R$ โดยทฤษฎีบท 3

จะได้ว่า R เป็นกึ่งกรุปย่อยของ B

สมาชิกปรกติบริบูรณ์

บทนิยาม 5 [8] ให้ S เป็นกึ่งกรุป และ $a \in S$ จะกล่าวว่า a เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์ (completely regular element) ของ S ก็ต่อเมื่อ มี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = aba$ และ $ab = ba$

ตัวอย่าง 8 $(3, 3)$ เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของ B

วิธีทำ พิจารณา

$$(3, 3)(3, 3)(3, 3) = (3 - 3 + \max\{3, 3\}, 3 - 3 + \max\{3, 3\})(3, 3)$$

$$= (3 - 3 + 3, 3 - 3 + 3)(3, 3)$$

$$= (3, 3)(3, 3)$$

$$= (3 - 3 + \max\{3, 3\}, 3 - 3 + \max\{3, 3\})$$

$$= (3 - 3 + 3, 3 - 3 + 3)$$

$$= (3, 3)$$

ดังนั้น $(3, 3)$ เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของ B

ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นว่ามีสมาชิกในกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ที่สอดคล้องเงื่อนไขของสมาชิก
ปรกติบริบูรณ์เพียงแค่ 1 เงื่อนไข ดังนี้

ตัวอย่าง 9 พิจารณา

$$\begin{aligned}(3,4)(4,3)(3,4) &= (3 - 4 + \max\{4,4\}, 3 - 4 + \max\{4,4\})(3,4) \\ &= (3 - 4 + 4, 3 - 4 + 4)(3,4) \\ &= (3,3)(3,4) \\ &= (3 - 3 + \max\{3,3\}, 4 - 3 + \max\{3,3\}) \\ &= (3 - 3 + 3, 4 - 3 + 3) \\ &= (3,4)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}(3,4)(4,3) &= (3 - 4 + \max\{4,4\}, 3 - 4 + \max\{4,4\}) = (3 - 4 + 4, 3 - 4 + 4) = (3,3) \\ (4,3)(3,4) &= (4 - 3 + \max\{3,3\}, 4 - 3 + \max\{3,3\}) = (4 - 3 + 3, 4 - 3 + 3) = (4,4)\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $(3,4)(4,3)(3,4) = (3,4)$ และ $(3,4)(4,3) \neq (4,3)(3,4)$

ในการศึกษาทฤษฎีของกึ่งกรุปได้มีการพิสูจน์ไว้แล้วว่า a สมาชิกในกึ่งกรุป S เป็นสมาชิก
ปรกติบริบูรณ์ของ S ก็ต่อเมื่อ a เป็นทั้งสมาชิกปรกติซ้ายและปรกติขวาของ S (ดูที่ [8]) ดังนั้นทฤษฎี
บทต่อไปนี้จะเป็ผลที่ได้จากทฤษฎีบท 2 และ 5

บทแทรก 1 ให้ $(x, y) \in B$ จะได้ว่า (x, y) เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของ B ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ทฤษฎีบท 4 และ 6 ทำให้ได้ผลการศึกษาต่อไปนี้

บทแทรก 2 ให้ C เป็นเซตของสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของ B ทั้งหมด จะได้ว่า C เป็นกึ่งกรุปย่อยของ B

ผลการวิจัย

จากการศึกษาลักษณะเฉพาะของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา
และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ บนกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ ได้ผลดังนี้

1. (x, y) เป็นสมาชิกปรกติภายในของ B สำหรับทุก $(x, y) \in B$
2. (x, y) เป็นสมาชิกปรกติซ้ายของ B ก็ต่อเมื่อ $x \leq y$
3. (x, y) เป็นสมาชิกปรกติขวาของ B ก็ต่อเมื่อ $x \geq y$
4. (x, y) เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของ B ก็ต่อเมื่อ $x = y$

และเซตของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของ B
ทั้งหมดเป็นกึ่งกรุปย่อยของ B

อภิปรายผลการวิจัย

จากการศึกษาพบว่า สมาชิกของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ทั้งหมดเป็นสมาชิกปรกติภายใน จึงทำให้โครงสร้างของสมาชิกปรกติภายในเป็นโครงสร้างที่ใหญ่ที่สุดเช่นเดียวกับสมาชิกปรกติ (regular) [14] ซึ่งโดยทั่วไปแล้วไม่เป็นจริงสำหรับโครงสร้างของกึ่งกรุปทั่วไป แต่สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ยังเป็นโครงสร้างที่มีลักษณะเฉพาะคล้ายกับโครงสร้างกึ่งกรุปทั่วไป และสมาชิกปรกติบริบูรณ์มีลักษณะเฉพาะเช่นเดียวกับสมาชิกนิพจน์ (idempotent) [14] นอกจากนี้ เซตของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ทั้งหมดเป็นกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าเป็นกึ่งกรุปที่แตกต่างจากกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ และจะเห็นว่าเซตของสมาชิกปรกติซ้ายของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ทั้งหมดสมมูลฐานกับเซตของสมาชิกปรกติขวาของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ทั้งหมด ซึ่งแตกต่างจากผลการศึกษาของ Hovsepian [10] ในปี ค.ศ. 2020 ที่นำเสนอเงื่อนไขของการสมมูลฐานระหว่างกึ่งกรุปย่อยผกผันของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ ทำให้สามารถนำจากผลการศึกษาไปศึกษาสมบัติอื่น ๆ ของกึ่งกรุปได้ อาทิเช่น ไอเดิล (ideal) ความสัมพันธ์ของกรีน (Green's relation) อันดับบางส่วนธรรมชาติ (natural partial ordered) เป็นต้น

สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาลักษณะเฉพาะของสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ บนกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ พบว่า ผลการศึกษาสามารถอธิบายลักษณะเฉพาะของสมาชิกในกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ เพื่อใช้ในการตรวจสอบสมาชิกปรกติภายใน สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา และสมาชิกปรกติบริบูรณ์ของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ ดังนี้

1. ทุกสมาชิกของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่เป็นสมาชิกปรกติภายใน
2. สมาชิกปรกติซ้ายของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่จะต้องมีสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับไม่เกินสมาชิกตัวหลัง
3. สมาชิกปรกติซ้ายของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่จะต้องมีสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับไม่เกินสมาชิกตัวหน้า
4. สมาชิกปรกติบริบูรณ์ของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่มีเฉพาะคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเท่ากับตัวหลัง

นอกจากนั้น สามารถจำแนกสมาชิกในกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ออกเป็นกึ่งกรุปย่อยได้ ยิ่งไปกว่านั้น เซตของสมาชิกปรกติภายในของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ทั้งหมดเป็นเซตเดียวกับกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ ดังนั้นสมาชิกปรกติภายในเป็นโครงสร้างที่ใหญ่ที่สุดในกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ และสมาชิกปรกติบริบูรณ์เป็นของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่โครงสร้างที่เล็กที่สุด นอกจากนี้ โครงสร้างสมาชิกปรกติซ้ายและสมาชิกปรกติขวาของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่เป็นโครงสร้างที่มีลักษณะเฉพาะที่ตรงกันข้าม และกล่าวได้ว่าเซตของสมาชิกปรกติซ้ายและสมาชิกปรกติขวาของกึ่งกรุปวัฏจักรคู่ทั้งหมดมีจำนวนเชิงการนับ (cardinal number) เท่ากันอีกด้วย

เอกสารอ้างอิง

- [1] Krohn, K., Rhodes, J. L., & Arbib, M. A. (1968). *Algebraic theory of machines, languages, and semigroups*. New York: Academic Press.
- [2] Arbib, M. A. (1969). *Theories of abstract automata (Prentice-Hall series in automatic computation)*. Prentice-Hall, Inc.
- [3] Boorman, S. A., & White, H. C. (1976). Social structure from multiple networks. II. Role structures. *American journal of sociology*, 81(6), 1384–1446.
- [4] Boyd, J. P., Haehl, J. H., & Sailer, L. D. (1972). Kinship systems and inverse semigroups. *Journal of Mathematical Sociology*, 2(1), 37–61.
- [5] Reddy, P. S., & Dawud, M. (2015). Applications of semigroups. *Global Journey of Science Frontier Research*, 15(F3), 17–25.
- [6] Clifford, A. H. (1941). Semigroups admitting relative inverses. *Annals of Mathematics*, 42(4), 1037–1049.
- [7] Croisot, R. (1953). Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 70(4), 361–379.
- [8] Petrich, M., & Reilly, N. R. (1999). *Completely regular semigroups*. New York: Wiley.
- [9] Lyapin, E. (1953). Canonical form of elements of an associative system given by defining relations. *Leningradskii Gosudarstvennyi Pedagogicheskii Institut Uchenye Zapiski*, 89, 45–54.
- [10] Hovsepyan, K. H. (2020). Inverse subsemigroups of the bicyclic semigroup. *Mathematical Notes*, 108, 550–556.
- [11] Gutik, O., Prokhorenkova, O., & Sekh, D. (2022). On endomorphisms of the bicyclic semigroup and the extended bicyclic semigroup. DOI:10.30970/vmm.2021.92.005-016
- [12] Schwab, E. D. (2022). The bicyclic semigroup as the quotient inverse semigroup by any gauge inverse submonoid. *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications*, 9(2), 53–61.
- [13] Kudryavtsev, D. (2024). Restrictions on local embeddability into finite semigroups. *Semigroup Forum*, 109, 148–166
- [14] Clifford, A. H., & Preston, G. B. (1961). *The algebraic theory of semigroups*, vol. 1. Providence: American Mathematical Society.