

ปัญหาบนผลแบ่งกันของ $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ฟังก์ชันตัวแทนเท่ากันOn a Problem of Partitions of $\mathbb{Z}_m$ with Identical Representation Functions

สุภาดา โตกระแสร และ นเรศ สวัสดิ์รักษา*

Supada Tokrasae & Nares Sawatraksa*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์

Division of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Nakhon Sawan Rajabhat University

Submitted 22/4/2023 ; Revised 12/6/2023 ; Accepted 3/7/2023

บทคัดย่อ

สำหรับจำนวนเต็มบวก m ให้ $\mathbb{Z}_m$ แทนเซตของชั้นส่วนตกว่ามอดุโล m นั่นคือ $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ เมื่อ $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{m}\}$ สำหรับ $A \subseteq \mathbb{Z}_m$ และ $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ กำหนดฟังก์ชันตัวแทน

$$R_1(A, \bar{n}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{n}\}|$$

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจศึกษาปัญหาของ อันตราส ซาโคซี ใน $\mathbb{Z}_m$ โดยที่สองเซตย่อย A และ B ของ $\mathbb{Z}_m$ ที่ทำให้ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ และ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$

คำสำคัญ: ปัญหาของ Sárközy ผลแบ่งกัน ฟังก์ชันตัวแทน

*ผู้ประสานงานหลัก (Corresponding Author)

E-mail: nares.sa@nsru.ac.th

Abstract

For every positive integer m , $\mathbb{Z}_m$ represents the set of residue class modulo m such that $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ when $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z}: x \equiv y(\text{mod } m)\}$. For $A \subseteq \mathbb{Z}_m$ and $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$, the representation function was defined as

$$R_1(A, \bar{n}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{n}\}|.$$

In this paper, we studied Sárközy's problem in $\mathbb{Z}_m$ where the two subsets A and B of $\mathbb{Z}_m$ caused $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ and $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ for all $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$.

Keywords: Sárközy's problem, partition, representation function

บทนำ

ให้ X เป็นกึ่งกรุปการบวกอาบีเลียน สำหรับทุก $A \subseteq X$ และ $n \in X$ ให้ $R_1(A, n)$ แทนจำนวนผลเฉลยของสมการ $a + b = n$ โดยที่คู่อันดับ $(a, b) \in A \times A$, $R_2(A, n)$ แทนจำนวนผลเฉลยของสมการ $a + b = n$ โดยที่คู่ไม่อันดับ $(a, b) \in A \times A$ ซึ่ง $a \neq b$ และ $R_3(A, n)$ แทนจำนวนผลเฉลยของสมการ $a + b = n$ โดยที่คู่ไม่อันดับ $(a, b) \in A \times A$ ซึ่ง Nathanson [1] เรียกสัญลักษณ์ $R_1(A, n)$, $R_2(A, n)$ และ $R_3(A, n)$ ว่า “ฟังก์ชันตัวแทน” ต่อมา นักคณิตศาสตร์จำนวนมากให้ความสนใจศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันตัวแทน เช่น Erdős Sárközy Dombi Yang และ Chen เป็นต้น

ให้ N แทนเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สำหรับ $i \in \{1, 2, 3\}$ โดยอันดราส ซาโคซี (András Sárközy) นักคณิตศาสตร์ชาวฮังการี ได้ตั้งคำถามไว้ว่า “มีเซต $A, B \subseteq N$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = \infty$ จะทำให้ $R_i(A, n) = R_i(B, n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n หรือไม่” ในปี ค.ศ. 2002 Dombi [2] ตอบคำถามของอันดราส ซาโคซี ว่า สำหรับ $i = 1$ ไม่มีสองเซตย่อย A และ B ที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว แต่สำหรับ $i = 2$ สามารถหาสองเซตย่อย A และ B ที่สอดคล้องเงื่อนไขของอันดราส ซาโคซี ได้ และในปีต่อมา Chen และ Wang [3] พิสูจน์ได้ว่าสำหรับ $i = 3$ สามารถหาสองเซตย่อย A และ B ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของอันดราส ซาโคซี จากแนวคิดดังกล่าวจึงทำให้นักคณิตศาสตร์หลายท่านให้ความสนใจปัญหาของอันดราส ซาโคซี บนเซตของจำนวนเต็มมอดุโล m

สำหรับจำนวนเต็มบวก m กำหนดให้ $\mathbb{Z}_m$ แทนเซตของชั้นส่วนตคก้างมอดุโล m นั่นคือ $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ เมื่อ $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{m}\}$ สำหรับ $A \subseteq \mathbb{Z}_m$ และ $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ กำหนดฟังก์ชันตัวแทน

$$R_i(A, \bar{n}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{n}\}|$$

ในปี ค.ศ. 2012 Yang และ Chen [4] ศึกษาการเปรียบเทียบปัญหาของอันดราส ซาโคซี ใน $\mathbb{Z}_m$ ซึ่งพวกเขากำหนดโครงสร้างของเซต $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m$ สำหรับ $i \in \{1, 2, 3\}$ ที่ทำให้ $R_i(A, \bar{n}) = R_i(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ ถัดไปในปี ค.ศ. 2017 Yang และ Tang [5] ได้ศึกษาในกรณีที่ m เป็นจำนวนเต็มคี่ โดยที่ $m \geq 3$ ว่า ไม่มีสองเซต $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 1$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ และสำหรับ $i \in \{2, 3\}$ จะมีสองเซตย่อย $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 1$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ และในปี ค.ศ. 2020 Chen และ Yan [6] ได้ศึกษาปัญหาผลแบ่งกันของ $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ฟังก์ชันตัวแทนเท่ากัน ในกรณี $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 2$ สามารถหาสองเซตย่อย A และ B ของ $\mathbb{Z}_m$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ ได้

จากแนวคิดดังกล่าว ผู้วิจัยจึงให้ความสนใจที่จะศึกษาต่อยอดซึ่งเป็นการนำเสนอแนวคิดโดยการสร้างทฤษฎีเพื่อแสดงผลการศึกษาปัญหาผลแบ่งกันของ $\mathbb{Z}_m$ ในกรณีที่สองเซตย่อย $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ และ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$

วัตถุประสงค์

เพื่อหาเซตย่อย A และ B ของ $\mathbb{Z}_m$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ และ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยศึกษาปัญหาบนผลแบ่งกันของ $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ฟังก์ชันตัวแทนเท่ากัน ในกรณี $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ สำหรับ $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ และกำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 1 ให้ $A \subseteq \mathbb{Z}_m$ ฟังก์ชันตัวแทน คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\mathbb{Z}_m$ และเรนจ์เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{N}$ นิยามโดย

$$R_1(A, \bar{n}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{n}\}|$$

ตัวอย่างการคำนวณฟังก์ชันตัวแทนในกรณี $m = 11$ ดังตัวอย่าง 1

ตัวอย่าง 1 ให้ $m = 11$ พิจารณา $\mathbb{Z}_{11} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$ ให้

$$A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

เนื่องจาก $R_1(A, \bar{n}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{n}\}|$ จะได้ว่า

$$R_1(A, \bar{0}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{0}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{5}, \bar{6}), (\bar{6}, \bar{5})\}| = 3$$

$$R_1(A, \bar{1}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{1}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{6}, \bar{6})\}| = 3$$

$$R_1(A, \bar{2}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{2}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})\}| = 3$$

$$R_1(A, \bar{3}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{3}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})\}| = 4$$

$$R_1(A, \bar{4}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{4}\}| \\ = |\{(\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})\}| = 5$$

$$R_1(A, \bar{5}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{5}\}| \\ = |\{(\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{5}, \bar{0})\}| = 6$$

$$R_1(A, \bar{6}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{6}\}| \\ = |\{(\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{2}), (\bar{5}, \bar{1}), (\bar{6}, \bar{0})\}| = 7$$

$$R_1(A, \bar{7}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{7}\}| \\ = |\{(\bar{1}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{3}), (\bar{5}, \bar{2}), (\bar{6}, \bar{1})\}| = 6$$

$$R_1(A, \bar{8}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{8}\}| \\ = |\{(\bar{2}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{4}), (\bar{5}, \bar{3}), (\bar{6}, \bar{2})\}| = 5$$

$$R_1(A, \bar{9}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{9}\}| = |\{(\bar{3}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{5}, \bar{4}), (\bar{6}, \bar{3})\}| = 4$$

$$R_1(A, \overline{10}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{10}\}| = |\{(\bar{4}, \bar{6}), (\bar{5}, \bar{5}), (\bar{6}, \bar{4})\}| = 3$$

เริ่มต้นพิจารณาจำนวนเต็มบวก m และความสัมพันธ์ของเซตย่อย $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ ในกรณีที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ถ้า $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ แล้ว m เป็นจำนวนคี่ และ $|A| = |B|$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ จะได้ว่า

$$\binom{|A|+1}{2} + \binom{|A|}{2} = \sum_{n=0}^{m-1} R_1(A, \bar{n}) = \sum_{n=0}^{m-1} R_1(B, \bar{n}) = \binom{|B|}{2} + \binom{|B|+1}{2}$$

ให้ $|A| = k$ และ $|B| = l$ จะได้ว่า

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{l(l+1)}{2} + \frac{l(l-1)}{2}$$

นั่นคือ $k^2 + k + k^2 - k = l^2 + l + l^2 - l$ เพราะฉะนั้น $k^2 = l^2$ ดังนั้น $k = l$ นั่นคือ $|A| = |B|$ เนื่องจาก $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ และ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ทำให้ได้ว่า

$$m - 3 = |(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = 2(|A| - |A \cap B|)$$

ดังนั้น $m - 3$ เป็นจำนวนคี่ นี่แสดงว่า m เป็นจำนวนคี่

หลังจากนี้เป็นต้นไปในงานวิจัยฉบับนี้ สมมติว่า m เป็นจำนวนคี่ โดยที่ $m \geq 5$

ผู้วิจัยสนใจศึกษาฟังก์ชันตัวแทนในกรณี $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$

ถ้า $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ จะได้ว่าสามารถแบ่งการพิจารณาได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

1. $A \cup B = \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 3$
2. $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1\}$ โดยที่ $\bar{r}_1 \in \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 2$
3. $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}$ โดยที่ $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 1$
4. $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3\}$ โดยที่ $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3 \in \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 0$

จากทั้ง 4 กรณีข้างต้นสามารถพิจารณาจำนวนสมาชิกเซต A และ B ได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 ให้ $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $A \cup B = \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 3$ ถ้า $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ แล้ว $|A| = |B| = \frac{m+3}{2}$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $|A| = |B|$ ดังนี้

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| = m + 3$$

นั่นคือ $|A| = |B| = \frac{m+3}{2}$

ทฤษฎีบท 3 ให้ $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ และ $\bar{r}_1 \in \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1\}$ และ $|A \cap B| = 2$ ถ้า $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ แล้ว $|A| = |B| = \frac{m+1}{2}$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $|A| = |B|$ ดังนี้

$$2|A| = |A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| = (m - 1) + 2 = m + 1$$

นั่นคือ $|A| = |B| = \frac{m+1}{2}$

ทฤษฎีบท 4 ให้ $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ และ $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}$ และ $|A \cap B| = 1$ ถ้า $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ แล้ว $|A| = |B| = \frac{m-1}{2}$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $|A| = |B|$ ดังนี้

$$2|A| = |A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| = m - 2 + 1 = m - 1$$

นั่นคือ $|A| = |B| = \frac{m-1}{2}$

ทฤษฎีบท 5 ให้ $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ และ $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3 \in \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3\}$ และ $|A \cap B| = 0$ ถ้า $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ แล้ว $|A| = |B| = \frac{m-3}{2}$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $|A| = |B|$ ดังนี้

$$2|A| = |A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| = m - 3 + 0 = m - 3$$

นั่นคือ $|A| = |B| = \frac{m-3}{2}$

ทฤษฎีบท 6 ไม่มีเซตย่อย $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ที่ทำให้

$$R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n}) \text{ สำหรับทุก } \bar{n} \in \mathbb{Z}_m$$

บทพิสูจน์ ให้ $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ที่ทำให้

$$R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n}) \text{ สำหรับทุก } \bar{n} \in \mathbb{Z}_m$$

เนื่องจาก $m \geq 5$ และ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3 \geq 2$ จะได้ $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \neq \emptyset$ ให้ $\bar{x} \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ จะได้ $\bar{x} \in A \cup B$ และ $\bar{x} \notin A \cap B$ จะได้ $\bar{x} \in A$ หรือ $\bar{x} \in B$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่า $\bar{x} \in A$ จะได้ $\bar{x} \notin B$ พิจารณาสมการ $\bar{a} \oplus \bar{a} = \overline{2x}$ จะได้ว่า $\bar{a} = \bar{x}$ ดังนั้น $\bar{a} \oplus \bar{a} = \overline{2x}$ มีคำตอบเพียงชุดคำตอบเดียวและ

$$(\bar{x}, \bar{x}) \in \{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} + \bar{b} = \overline{2x}\}$$

เพราะฉะนั้น $R_1(A, \overline{2x})$ เป็นจำนวนคี่ และ $R_1(B, \overline{2x})$ เป็นจำนวนคู่ ทำให้ได้

$$R_1(A, \overline{2x}) \neq R_1(B, \overline{2x})$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น ไม่มีเซต $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ เป็นจริง

ผลการวิจัย

จากการศึกษาปัญหามวลแบ่งกันของ $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ฟังก์ชันตัวแทนเท่ากัน ในกรณี $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ สำหรับ $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ ได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6 ไม่มีเซตย่อย $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ที่ทำให้

$$R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n}) \text{ สำหรับทุก } \bar{n} \in \mathbb{Z}_m$$

ตัวอย่าง 2 ให้ $m = 11$ พิจารณา $\mathbb{Z}_{11} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$ ให้

$$A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} \text{ และ } B = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$$

เนื่องจาก $R_1(A, \bar{n}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{n}\}|$ จะได้ว่า

$$R_1(A, \bar{0}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{0}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{5}, \bar{6}), (\bar{6}, \bar{5})\}| = 3$$

$$R_1(A, \bar{1}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{1}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{6}, \bar{6})\}| = 3$$

$$R_1(A, \bar{2}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{2}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})\}| = 3$$

$$R_1(A, \bar{3}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{3}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})\}| = 4$$

$$R_1(A, \bar{4}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{4}\}| \\ = |\{(\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})\}| = 5$$

$$R_1(A, \bar{5}) = |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A : \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{5}\}| \\ = |\{(\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{5}, \bar{0})\}| = 6$$

$$\begin{aligned}
R_1(A, \bar{6}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{6}\}| \\
&= |\{(\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{2}), (\bar{5}, \bar{1}), (\bar{6}, \bar{0})\}| = 7 \\
R_1(A, \bar{7}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{7}\}| \\
&= |\{(\bar{1}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{3}), (\bar{5}, \bar{2}), (\bar{6}, \bar{1})\}| = 6 \\
R_1(A, \bar{8}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{8}\}| \\
&= |\{(\bar{2}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{4}), (\bar{5}, \bar{3}), (\bar{6}, \bar{2})\}| = 5 \\
R_1(A, \bar{9}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{9}\}| = |\{(\bar{3}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{5}, \bar{4}), (\bar{6}, \bar{3})\}| = 4 \\
R_1(A, \overline{10}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in A \times A: \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{10}\}| = |\{(\bar{4}, \bar{6}), (\bar{5}, \bar{5}), (\bar{6}, \bar{4})\}| = 3
\end{aligned}$$

และเนื่องจาก $R_1(B, \bar{n}) = |\{(\bar{x}, \bar{y}) \in B \times B: \bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{n}\}|$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
R_1(B, \bar{0}) &= |\{(\bar{x}, \bar{y}) \in B \times B: \bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{0}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{5}, \bar{6}), (\bar{6}, \bar{5})\}| = 3 \\
R_1(B, \bar{1}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{1}\}| = |\{(\bar{5}, \bar{7}), (\bar{6}, \bar{6}), (\bar{7}, \bar{5})\}| = 3 \\
R_1(B, \bar{2}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{2}\}| = |\{(\bar{5}, \bar{8}), (\bar{6}, \bar{7}), (\bar{7}, \bar{6}), (\bar{8}, \bar{5})\}| = 4 \\
R_1(B, \bar{3}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{3}\}| \\
&= |\{(\bar{5}, \bar{9}), (\bar{6}, \bar{8}), (\bar{7}, \bar{7}), (\bar{8}, \bar{6}), (\bar{9}, \bar{5})\}| = 5 \\
R_1(B, \bar{4}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{4}\}| \\
&= |\{(\bar{5}, \overline{10}), (\bar{6}, \bar{9}), (\bar{7}, \bar{8}), (\bar{8}, \bar{7}), (\bar{9}, \bar{6}), (\overline{10}, \bar{5})\}| = 6 \\
R_1(B, \bar{5}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{5}\}| \\
&= |\{(\bar{0}, \bar{5}), (\bar{5}, \bar{0}), (\bar{6}, \overline{10}), (\bar{7}, \bar{9}), (\bar{8}, \bar{8}), (\bar{9}, \bar{7}), (\overline{10}, \bar{6})\}| = 7 \\
R_1(B, \bar{6}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{6}\}| \\
&= |\{(\bar{0}, \bar{6}), (\bar{6}, \bar{0}), (\bar{8}, \bar{9}), (\bar{9}, \bar{8}), (\bar{7}, \overline{10}), (\overline{10}, \bar{7})\}| = 6 \\
R_1(B, \bar{7}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{7}\}| \\
&= |\{(\bar{0}, \bar{7}), (\bar{7}, \bar{0}), (\bar{9}, \bar{9}), (\bar{8}, \overline{10}), (\overline{10}, \bar{8})\}| = 5 \\
R_1(B, \bar{8}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{8}\}| \\
&= |\{(\bar{0}, \bar{8}), (\bar{8}, \bar{0}), (\bar{9}, \overline{10}), (\overline{10}, \bar{9})\}| = 4 \\
R_1(B, \bar{9}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{9}\}| = |\{(\bar{0}, \bar{9}), (\bar{9}, \bar{0}), (\overline{10}, \overline{10})\}| = 3 \\
R_1(B, \overline{10}) &= |\{(\bar{a}, \bar{b}) \in B \times B: \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{10}\}| = |\{(\bar{5}, \bar{5}), (\bar{0}, \overline{10}), (\overline{10}, \bar{0})\}| = 3
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่าจำนวนชุดคำตอบของ $R_1(A, \bar{n})$ ไม่เท่ากับจำนวนชุดคำตอบ $R_1(B, \bar{n})$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทคือ ไม่มีเซตย่อย $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ นั่นเอง

อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบของปัญหาของอันตราส ซาโคชิ ใน $\mathbb{Z}_m$ นั้นจะมีผลการศึกษาที่มีความสอดคล้องและเป็นไปตามแนวคิดของ Yang และ Chen [4] ในปี ค.ศ. 2012 ที่ศึกษาการเปรียบเทียบของปัญหาของอันตราส ซาโคชิ ใน $\mathbb{Z}_m$ ซึ่งพวกเขาได้กำหนดโครงสร้างของเซต

$A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ ก็ต่อเมื่อ m เป็นจำนวนคู่ และ $|A| = m/2$ เมื่อ $B = \mathbb{Z}_m/A$ ในปี ค.ศ. 2017 Yang และ Tang [5] ซึ่งได้ศึกษาในกรณีที่ m เป็นจำนวนคี่ โดยที่ $m \geq 3$ จะได้ว่า ไม่มีเซต $A, B \subseteq \mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 1$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ และในปี ค.ศ. 2020 Chen และ Yan [6] ได้ศึกษาปัญหาผลแบ่งกันของ $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ฟังก์ชันตัวแทนเท่ากัน ในกรณี $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 2$ สามารถหาสองเซตย่อย A และ B ของ $\mathbb{Z}_m$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ ได้ และจากผลการวิจัย ผู้วิจัยได้ศึกษาปัญหาของ อันดราส ซาโคซี ใน $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ฟังก์ชันตัวแทนเท่ากัน ในกรณี $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ว่าไม่มีเซตย่อย A และ B ของ $\mathbb{Z}_m$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ ซึ่งผู้วิจัย คาดว่า ถ้า $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้วจะสามารถเกิดผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เพียง 2 กรณีเท่านั้น คือ

1. ถ้า $m - k$ และ m เป็นจำนวนคู่ แล้วสามารถหาเซตย่อย A และ B ของ $\mathbb{Z}_m$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$
2. ถ้า $m - k$ และ m เป็นจำนวนคี่ แล้วไม่สามารถหาเซตย่อย A และ B ของ $\mathbb{Z}_m$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$

สรุปผลการวิจัย

การศึกษานี้ศึกษาผลแบ่งกันของ $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ฟังก์ชันตัวแทนเท่ากัน พบว่าปัญหาผลแบ่งกันของ $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ฟังก์ชันตัวแทนเท่ากัน ในกรณี $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ซึ่งทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$ สามารถพิจารณาได้เฉพาะกรณีที่ m เป็นจำนวนคี่ และ $m \geq 3$ และแบ่งการพิจารณาได้ทั้งหมด 4 กรณีดังนี้

1. $A \cup B = \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 3$
2. $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1\}$ โดยที่ $\bar{r}_1 \in \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 2$
3. $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}$ โดยที่ $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 1$
4. $A \cup B = \mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3\}$ โดยที่ $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3 \in \mathbb{Z}_m$ และ $|A \cap B| = 0$

ในการศึกษาทั้ง 4 กรณี มีผลการศึกษาไปในแนวทางเดียวกันโดยจำนวนสมาชิกของ A และ B มีจำนวนเท่ากัน คือ $\frac{m+3}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}$ และ $\frac{m-3}{2}$ ตามลำดับ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่า ไม่มีเซตย่อย A และ B ของ $\mathbb{Z}_m$ โดยที่ $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m - 3$ ที่ทำให้ $R_1(A, \bar{n}) = R_1(B, \bar{n})$ สำหรับทุก $\bar{n} \in \mathbb{Z}_m$

เอกสารอ้างอิง

- [1] Nathanson, M. (1978). Representation functions of sequences in additive number theory (pp. 16 - 20). In 72th *Proceedings of the American Mathematical Society (PROC)*, USA.
- [2] Dombi, G. (2002). Additive properties of certain sets. *Acta Arithmetica*, 103, 137–146.
- [3] Chen, Y. G., & Wang, B. (2003). On additive properties of two special sequences. *Acta Arithmetica*, 110, 299-303.
- [4] Yang, Q., & Chen, F. (2012). Partitions of $\mathbb{Z}_m$ with the same representation functions. *Australasian Journal of Combinatorics*, 53, 257–262.
- [5] Yang, Q., & Tang, M. (2017). Representation functions on finite sets with extreme symmetric differences. *Journal of Number Theory*, 180, 73–85.
- [6] Chen, S., & Yan, X. (2020). Partitions of $\mathbb{Z}_m$ with identical representation function. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 103(2), 204-209.