

การหาค่าของแรงเข้าสู่ศูนย์กลางและความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
โดยใช้เทคนิคการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย: เครื่องบินบังคับ

Determination of Centripetal Force and Gravitational Force Using
Conical Pendulum: the Tethered Aeroplane

โชติ เนื่องนันท์¹ ชีวะ ทศนา¹ ปภัสรา ประมาณู¹ สุรีย์พร หอมหวาน¹

สุขพิชญา จรรย์ชล¹ และ จารูวรรณ เมตตากุลพิทักษ์²

Chote Nuangnun¹ Cheewa Tassana¹ Papasara Pramanu¹ Sureeporn Homhuan¹

Sukpichaya Jarunchon¹ & Jaruwan Mettakoonpitak²

¹ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี จังหวัดจันทบุรี

²ภาควิชาเคมี คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี จังหวัดจันทบุรี

¹Department of Physics, Faculty of Science and Technology, RambhaiBarni Rajabhat University

²Department of Chemistry, Faculty of Science and Technology, RambhaiBarni Rajabhat University

Submitted 29/4/2020 ; Revised 21/6/2020 ; Accepted 28/7/2020

บทคัดย่อ

งานวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาค่าแรงตึงในเส้นเชือก (F_T) แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง หรือแรงตึงในเส้นเชือกตามแนวของรัศมีของการเคลื่อนที่ ($F_r^{(v)}$) และค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (g) ด้วยเทคนิคการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยโดยใช้เครื่องบินบังคับ ในการทดลองได้มีการกำหนดความยาวของเส้นเชือกและอัตราเร็วของเครื่องบินทดลองในแนวระนาบของวงโคจร โดยมีการบันทึกวิดีโอตลอดการทดลอง รวมทั้งใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Tracker สำหรับวิเคราะห์ภาพถ่ายวิดีโอดิจิทัล ความยาวของเส้นเชือกที่เลือกใช้ ในการทดลองอยู่ระหว่าง 90 ถึง 130 เซนติเมตร ผลการวิจัยพบว่าอัตราเร็วของเครื่องบินทดลองอยู่ระหว่าง 185 ถึง 322 เซนติเมตรต่อวินาที ค่าแรงตึงในเส้นเชือก และแรงตึงในเส้นเชือกตามแนวของรัศมี มีค่าอยู่ระหว่าง 0.657 ถึง 0.862 นิวตัน และ 0.346 ถึง 0.656 นิวตัน ตามลำดับ รัศมีของการเคลื่อนที่จากการทดลอง มีความใกล้เคียงกับค่ารัศมีที่ได้จากการคำนวณทางทฤษฎีโดยมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าร้อยละ ± 2 ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก มีค่าอยู่ระหว่าง 9.628 ถึง 9.948 เมตรต่อวินาที² โดยพบว่าค่าที่ได้จากการทดลอง มีความคลาดเคลื่อนจากค่ามาตรฐานน้อยกว่าร้อยละ ± 2

คำสำคัญ : เพนดูลัมกรวย เครื่องบินบังคับ แรงตึงในเส้นเชือก

***ผู้ประสานงานหลัก (Corresponding Author)**

E-mail: chote20@hotmail.com

การหาค่าของแรงเข้าสู่ศูนย์กลางและความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
โดยใช้เทคนิคการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย: เครื่องบินบังคับ

Abstract

This research emphasized on determining the string tension (F_T), the string tension of the radial component ($F_T^{(r)}$) or the centripetal force, and gravitational force (g) using conical pendulum with tethered aeroplane. When applying string length and airspeed, a stable, horizontal, circular orbit was quickly measured using a digital video (DV) camcorder with the Tracker software, an imaging analysis program, for analyzing the aeroplane's motion. The string lengths were varied from 90 cm to 130 cm. The experimental results found that the air speeds were varied from 185 cm s^{-1} to 322 cm s^{-1} . F_T and $F_T^{(r)}$ were varied from 0.657 N to 0.862 N and 0.346 N to 0.656 N, respectively. The experimental values of path radii provide a good agreement between theoretical values and experimental results, found that the error is less than $\pm 2\%$. Finally, the gravitational forces (g) were between 9.628 ms^{-2} to 9.948 ms^{-2} which experimental results are in good agreement with the standard value with an error of less than $\pm 2\%$

Keyword : Conical pendulum, Tethered aeroplane, String tension

1. บทนำ

1.1 การเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย (Conical pendulum theory)

งานวิจัยหรือการทดลองที่ใช้เครื่องบินบังคับแทนลูกตุ้มเพื่อศึกษาการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ (Uniform Circular Motion; UCM) ได้มีการพัฒนากระบวนการทดลองและวิจัยขึ้นมาโดยตลอด ดังนี้ Butcher (1987) ได้ทดลองใช้เครื่องบินบังคับแทนลูกตุ้มในการศึกษาการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอเพื่อวัดแรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่กระทำต่อเครื่องบินทดลอง โดยการวัดรัศมีของการเคลื่อนที่ (r) และมุมระหว่างเส้นเชือกที่แขวนเครื่องบินกับแนวดิ่ง (θ) ซึ่งเป็นการทดลองเพื่อให้นักเรียนได้หาวิธีที่ชาญฉลาดในการวัด r และ θ ซึ่งผลการทดลองที่ได้มีความสอดคล้องกับค่าที่ได้จากการคำนวณทางทฤษฎี [1] Franklin (1988) ได้ทดลองหาความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของเครื่องบิน โดยใช้วิธีที่แตกต่างออกไป โดยการวัดความสูงของระนาบการบิน (H) และคาบของการเคลื่อนที่ (T) ผลการทดลองวัดค่าของ H จากนักเรียนจำนวน 47 กลุ่ม พบว่าความแตกต่างเฉลี่ยระหว่างค่าที่วัดได้และค่าที่คำนวณทางทฤษฎีอยู่ที่ 2.7% [2] Larson และ Grant (1991) ได้พัฒนาเครื่องมือในการทดลองโดยออกแบบให้มีมาตรของสปริงเพื่อวัดค่าแรงตึงในเส้นเชือก (F_T) แล้วนำมาเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎี [3] Moses & Adolphi (1998) ได้ทดลองวัดแรงตึงในเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของคาบของการหมุนหรือความถี่เชิงมุมของการเคลื่อนที่ [4] Mazza et al. (2007) ศึกษาการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยโดยใช้เครื่องบินบังคับ โดยศึกษาความสัมพันธ์ของความยาวของเส้นเชือกที่ระยะ 119.2, 173.7, 227.7, 281.8 และ 341.1 เซนติเมตร กับอัตราเร็วของอากาศ (air speed) คาบของการเคลื่อนที่ และเส้นผ่าศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ ผลการวิจัยพบว่ารัศมีการเคลื่อนที่ที่คำนวณโดยทฤษฎีและรัศมีที่วัดได้จากการทดลองมีค่าแตกต่างกันร้อยละ 2 [5]

ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาการทดลองอย่างง่ายและใช้อุปกรณ์การทดลองที่มีราคาถูก เพื่อตรวจสอบการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยโดยใช้เครื่องบินบังคับอย่างเป็นระบบ เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของความยาวของเส้นเชือกที่ระยะที่ใช้ในการทดลองในห้องทดลองทั่วไป ได้แก่ ระยะ 90, 100, 110, 120 และ 130 เซนติเมตร กับอัตราเร็วของอากาศ รัศมีการเคลื่อนที่ เพื่อนำไปสู่การศึกษาค่าแรงเข้าสู่ศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ และการหาค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก แล้วนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีและค่ามาตรฐาน ตลอดจนถึงนำองค์ความรู้มาใช้ในการจัดการเรียนการสอนวิชาฟิสิกส์ในโรงเรียนและมหาวิทยาลัย

ในทางทฤษฎีพื้นฐานการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยประกอบด้วยลูกตุ้มมวล m แขวนด้วยเชือกยาว L เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ในแนวราบเป็นวงกลมด้วยรัศมี r แสดงดังภาพที่ 1 เมื่อพิจารณาแรงที่กระทำต่อวัตถุพบว่า มีแรงเนื่องจากน้ำหนัก mg และแรงตึงเชือก F_T จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันจะทำให้ได้ความสัมพันธ์ของแรงที่กระทำต่อลูกตุ้มในแนวระดับและในแนวดิ่ง [5] ดังสมการที่ 1 และ 2

$$F_T \cos \theta - mg = 0 \quad (1)$$

$$F_T \sin \theta = ma_c = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

เมื่อ F_T คือ แรงตึงของเส้นเชือก (นิวตัน)

m คือ มวลของวัตถุหรือมวลของลูกตุ้ม (กิโลกรัม)

a_c คือ ความเร่งเนื่องจากการเคลื่อนที่แบบวงกลม หรือความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (เมตรต่อวินาที²)

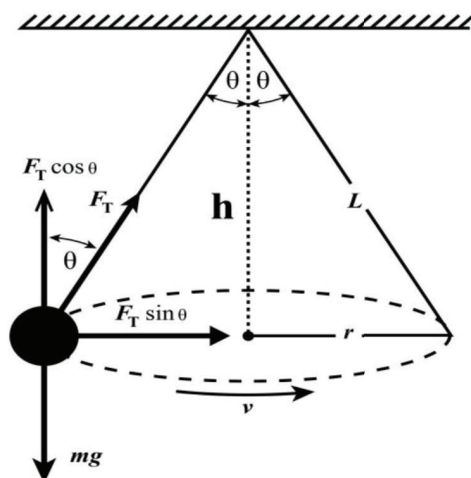
v คือ อัตราเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุ (เมตรต่อวินาที)

θ คือ มุมระหว่างเส้นเชือกที่แขวนลูกตุ้มกับแนวดิ่ง

h คือ ระยะจากระนาบของการเคลื่อนที่แบบวงกลมไปยังตำแหน่งจุดตรึงของเส้นเชือก (เมตร)

การหาค่าของแรงเข้าสู่ศูนย์กลางและความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

โดยใช้เทคนิคการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย: เครื่องบินบังคับ



ภาพที่ 1 การเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย (ดัดแปลงจาก [5])

จากสมการ (1) และสมการ (2) จะได้ $\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$ หรือ $v^2 = rg \tan \theta$ (3)

จาก $v = \frac{2\pi r}{T}$ (4)

ที่ T คือคาบของวงโคจร (Period of the orbit) หรือ คาบของการเคลื่อนที่

เมื่อ $h = \sqrt{L^2 - r^2}$ (5)

จะทำให้ได้ $\tan \theta = \frac{r}{\sqrt{L^2 - r^2}}$ (6)

การเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยนั้น รัศมีของการเคลื่อนที่ r มีความเกี่ยวข้องกับความยาวของเชือก L และคาบของการเคลื่อนที่ T เมื่อกำหนดเงื่อนไข $\tan \theta = 1$ หรือ $\theta = 45^\circ$ ในกรณีนี้ $r = h$ จะทำให้ได้

$$r = \frac{gT^2}{4\pi^2} \quad (7)$$

จากสมการ (4) และสมการ (5) ค่ารัศมีของการเคลื่อนที่คือ

$$r = \sqrt{L^2 - \left[\frac{gT^2}{4\pi^2} \right]^2} \quad (8)$$

การหาค่าของแรงเข้าสู่ศูนย์กลางและความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก โดยใช้เทคนิคการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย: เครื่องบินบังคับ

ดังนั้นจากสมการที่ (1) ถึงสมการที่ (6) จึงเป็นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องของการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยที่จะทำการหาปริมาณต่าง ๆ

การหาแรงตึงในเส้นเชือก F_T สามารถหาได้จากการยกกำลังของสมการ (1) และสมการ (2) เข้าด้วยกันจะได้

$$F_T = mg\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \quad (9)$$

จากเงื่อนไขข้างต้น ทำให้ $g = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ ดังนั้นแรงตึงในเส้นเชือกคือ

$$F_T = \frac{4\pi^2 mL}{T^2} \quad (10)$$

แรงตึงในเส้นเชือกตามแนวของรัศมีของการเคลื่อนที่ $F_T^{(r)}$ สามารถหาได้จากสมการ (2) ทำให้ได้

$$F_T^{(r)} = m\sqrt{\left(\frac{4\pi^2 L}{T^2}\right)^2 - g^2} \quad (11)$$

หมายเหตุ การพิสูจน์สมการที่ 11 แสดงใน ข้อมูลเสริม

นอกจากนี้ สามารถหาค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (g) ได้โดย

$$\text{จาก } T^2 = 4\pi^2 \frac{h}{g} \quad \text{ดังนั้น } g = \frac{4\pi^2 h}{T^2} \text{ เมื่อ } h = \sqrt{L^2 - r^2}$$

$$\text{ดังนั้น } g = \frac{4\pi^2 \sqrt{L^2 - r^2}}{T^2} \quad (12)$$

จากรายละเอียดของทฤษฎีการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยที่กล่าวมาทั้งหมด ปริมาณที่ต้องการวัดคือ เส้นผ่าศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ ความเร็วของการเคลื่อนที่ เพื่อนำไปสู่การเปรียบเทียบค่ารัศมีของการเคลื่อนที่ระหว่างค่าที่ได้จากการทดลองและค่าที่ได้จากการคำนวณทางทฤษฎี ต่อจากนั้นจึงหาค่าแรงตึงในเส้นเชือก F_T โดยสมการ (10) ค่าแรงตึงในเส้นเชือกในแนวรัศมี $F_T^{(r)}$ โดยสมการ (11) และค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g โดยสมการ (12)

2. วัตถุประสงค์

1. เพื่อหาค่าแรงตึงในเส้นเชือก F_T แรงตึงในเส้นเชือกในแนวรัศมี $F_T^{(r)}$ ของการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย โดยใช้เครื่องบินบังคับ

2. เพื่อหาค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g ด้วยเทคนิคการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย โดยใช้เครื่องบินบังคับ

3. วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 การเตรียมการก่อนการทดลอง

การศึกษาการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ โดยใช้เครื่องบินบังคับ (tethered aeroplane) ดังภาพที่ 2 (ก) เป็นเครื่องบินบังคับ Cessna-182 ผลิตโดย Novatoy มีระยะความกว้างของปีก 22.9 เซนติเมตร หรือ 9 นิ้ว มีความยาว 21.8 เซนติเมตร หรือ 8 นิ้วครึ่ง และน้ำหนักพร้อมกับแบตเตอรี่ AA 2 ก้อนคือ 0.057 กิโลกรัม โดยเครื่องบินทดลองจะยึดติดกับสายไนลอน (nylon string) ที่ผูกติดกับเดือยที่ติดตั้งบนเพดาน ซึ่งการติดตั้งและการหาจุดศูนย์กลางมวลของเครื่องบินบังคับ แสดงดังภาพที่ 2 (ข) และ (ค)



(ก)



(ข)



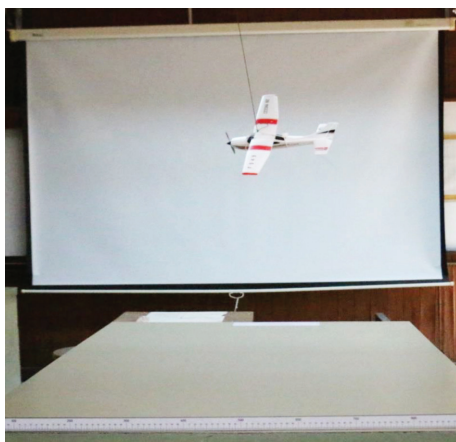
(ค)

ภาพที่ 2 (ก) เครื่องบินบังคับ Cessna-182 ที่ใช้ในการทดลอง (ข) การติดตั้งและการหาจุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass; CM) ของเครื่องบินบังคับ (ค) การติดตั้งเครื่องบินบังคับหลังจากการหาจุดศูนย์กลางมวล

ในที่นี้ศูนย์กลางมวลของระบบเป็นจุดเฉพาะเจาะจง ซึ่งเสมือนหนึ่งมวลของระบบนั้นรวมตัวกันอยู่ ณ จุดนั้น ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและมวลขององค์ประกอบที่รวมกันอยู่ในระบบนั่นเอง ในการทดลองนั้นในความเป็นจริงปริมาณความยาวเส้นเชือก L ที่กล่าวข้างต้นจะมีความยาวมากกว่าความยาวของเส้นเชือกเล็กน้อย เนื่องด้วยเป็นระยะห่างระหว่างเดือยและศูนย์กลางมวล (CM) ของและการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของเครื่องบินบังคับ Cessna-182 แสดงดังภาพที่ 2 (ข)

3.2 การทดลอง

การทดลองการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย ดำเนินการโดยชั่งน้ำหนักของเครื่องบินบังคับ Cessna-182 จัดรูปแบบการทดลองตามระบบของเพนดูลัมกรวย โดยใช้เครื่องบินบังคับ Cessna-182 แทนลูกตุ้ม ดังภาพที่ 1 จากนั้นหาจุดศูนย์กลางมวลของเครื่องบินบังคับเพื่อหาตำแหน่งสำหรับการผูกเชือกกับเครื่องบินบังคับ ดังภาพที่ 2 (ข) และ 2 (ค) เมื่อนำเครื่องบินบังคับ Cessna-182 แหวนแทนลูกตุ้มแล้ววัดความยาวของเส้นเชือก เมื่อเครื่องบินเริ่มเคลื่อนที่ ปล่อยให้เครื่องบินเคลื่อนที่จนกระทั่งพร้อมที่จะจับเวลาทำการทดลองโดยการจับเวลาและบันทึกวิถีของการเคลื่อนที่ของเครื่องบินบังคับ ดังภาพที่ 3 ซึ่งผู้ทดลองจะต้องควบคุมให้มุมระหว่างเส้นเชือกที่แขวนเครื่องบินทดลองกับแนวดิ่งมีค่าเท่ากับ 45 องศาหรือใกล้เคียงมากที่สุดเพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎีที่กล่าวมาข้างต้น การหาคาบของการเคลื่อนที่ T ทำการทดลองโดยการจับเวลาและบันทึกวิถีของการเคลื่อนที่ของเครื่องบินบังคับ โดยเมื่อเครื่องบินบังคับหมุนครบ 10 รอบแล้วนำมาหาค่าคาบเฉลี่ยดังภาพที่ 3 คาบการเคลื่อนที่นั้นใช้ทศนิยม 3 ตำแหน่ง



ภาพที่ 3 เครื่องบินบังคับกำลังเคลื่อนที่ โดยวัดรัศมีการเคลื่อนที่ด้วยไม้เมตร และจับเวลาด้วยนาฬิกาจับเวลา

การวัดรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ (2r) จะต้องอาศัยความละเอียดอย่างมาก เนื่องด้วยเครื่องบินทดลองมีการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วขนาดระหว่าง 185 ถึง 322 เซนติเมตรต่อวินาที นอกจากใช้ไม้เมตรในการวัดระยะรัศมีอย่างคร่าว ๆ แล้วยังจำเป็นต้องบันทึกวิถีการเคลื่อนที่ของเครื่องบินบังคับแล้วนำมาหารัศมีของการทดลอง โดยนำวิดีโอที่ได้เข้าสู่โปรแกรมแทร็กเกอร์ (tracker) ซึ่งเป็นโปรแกรมจำลองปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่ใช้สาธิตในห้องเรียนหรือในการศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับฟิสิกส์ที่ช่วยทำให้การวิเคราะห์การทดลองฟิสิกส์มีความสะดวกมากยิ่งขึ้น [6]

วิดีโอการทดลองที่บันทึกไว้จะนำมาวิเคราะห์ที่ละเฟรมโดยใช้โปรแกรมแทร็กเกอร์เพื่อกำหนดตำแหน่งการเคลื่อนที่ของตำแหน่งซึ่ง CM ของเครื่องบินทดลองเคลื่อนที่ผ่าน โดยวงโคจรค่อนข้างคงที่ด้วยเครื่องบินที่บินอยู่สองตำแหน่งเดียวกันซ้ำ ๆ กัน การประเมินหารัศมีของ CM จำเป็นต้องมีการสังเกตอย่างรอบคอบจากวิดีโอที่บันทึกอย่างน้อย 2 ครั้ง และทำการทดลองด้วยผู้ทดลองอย่างน้อย 2 คน ดังนั้นเส้นผ่านศูนย์กลางของการทดลอง 2r คือระยะระหว่างตำแหน่งทั้งสองนี้ และเพื่อความแม่นยำของข้อมูลการโคจรทั้งหมดของเครื่องบินทดลองจึงต้องมีการบันทึกวิดีโอ โดยในทางทฤษฎีการจับภาพวิดีโอเพียงหนึ่งในสี่ของวงโคจรสามารถให้ค่า r และ T ของการทดลองที่เหมาะสมจากการหา $x = x(t)$ และ $y = y(t)$ ของข้อมูล

4. ผลการวิจัย

ผลการทดลองการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย (conical pendulum) แสดงดังตารางที่ 1 พบว่าที่ระยะความยาวของเส้นเชือก 5 ระยะ คือ 90, 100, 110, 120, และ 130 เซนติเมตร สามารถใช้ในการหาคาบการเคลื่อนที่ (T) และเส้นผ่านศูนย์กลาง (2r) ของการเคลื่อนที่ นำไปสู่การหาอัตราเร็วของวัตถุ โดยอัตราเร็วของวัตถุสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4) ในการทดลองนี้อัตราเร็วของวัตถุมีค่าระหว่าง 185 ถึง 322 เซนติเมตรต่อวินาที และสามารถหารัศมีของวงโคจรตามทฤษฎีได้จากสมการที่ (8) ในที่นี้ผู้วิจัยใช้ค่า $g = 9.802$ เมตร/วินาที² ซึ่งเป็นค่า g มาตรฐานที่ใช้ในการทดลองทางฟิสิกส์ นอกจากนั้นแล้วผู้วิจัยยังใช้ค่า $g = 9.783$ เมตร/วินาที² ซึ่งเป็นค่าที่อยู่ในตำแหน่งที่ทดลอง จังหวัดจันทบุรี ประเทศไทย โดยภาพรวมพบว่ามีความคลาดเคลื่อนของรัศมีการเคลื่อนที่ระหว่างค่าที่ได้จากการทดลองและค่าที่คำนวณตามทฤษฎีในอัตราที่น้อยกว่าร้อยละ 2 จากข้อมูลพื้นฐานที่ได้จากการทดลองในตารางที่ 1 สามารถนำไปสู่การหาแรงตึงในเส้นเชือก (string tension) ในขณะที่เครื่องบินบังคับเคลื่อนที่ ตามสมการที่ (10) และแรงตึงในเส้นเชือกตามแนวรัศมี (radial component

การหาค่าของแรงเข้าสู่ศูนย์กลางและความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
โดยใช้เทคนิคการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย: เครื่องบินบังคับ

of string tension, $F_T^{(r)}$) ตามสมการที่ (11) นอกจากนั้นยังหาค่าเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g ตามสมการที่ (12) ข้อมูลที่ได้จากการวิจัยโดยจำแนกตามความยาวของเส้นเชือกแสดงดังตารางที่ 2

ตารางที่ 1 แสดงค่าคาบ เส้นผ่าศูนย์กลาง และอัตราเร็วของวัตถุ จากการทดลอง โดยเปรียบเทียบค่ารัศมี การเคลื่อนที่ระหว่างค่าที่ได้จากการทดลองและค่าที่คำนวณทางทฤษฎี

ความยาว เส้นเชือก L (cm)	คาบ T (s)	เส้นผ่า ศูนย์กลาง 2r (cm)	อัตราเร็วของ วัตถุ V (cm s ⁻¹)	รัศมีจากการ ทดลอง (cm)	รัศมีจากการ คำนวณทาง ทฤษฎี (cm)	ความคลาด เคลื่อน (%)
90	1.648	120.38	229.36	60.19	60.00	+0.32
	1.624	121.82	235.54	60.91	61.79	-1.44
	1.619	126.06	244.49	63.03	62.22	+1.29
	1.582	128.30	254.65	64.15	65.15	-1.56
	1.573	133.18	265.85	66.59	65.82	+1.16
100	1.786	121.34	213.33	60.67	60.95	-0.46
	1.773	122.70	217.30	61.35	62.42	-1.74
	1.764	126.98	226.03	63.49	63.39	+0.16
	1.733	131.24	237.79	65.62	66.55	-1.42
	1.727	136.22	247.67	68.11	67.12	+1.45
110	1.940	114.64	185.55	57.32	57.89	-0.99
	1.925	122.02	199.04	61.01	60.16	+1.39
	1.901	125.32	207.00	62.66	63.49	-1.33
	1.892	131.24	217.81	65.62	64.68	+1.43
	1.889	130.56	217.02	65.28	65.07	+0.32
120	1.919	153.02	250.38	76.51	77.60	-1.42
	1.869	165.72	278.42	82.86	82.84	+0.02
	1.842	173.66	296.03	86.83	85.32	+1.74
	1.802	176.50	307.55	88.25	88.80	-0.62
	1.769	181.94	322.95	90.97	91.38	-0.45
130	2.036	159.78	246.42	79.89	79.28	+0.76
	2.031	161.52	249.72	80.76	79.93	+1.03
	2.018	166.50	259.07	83.25	81.58	+2.01
	1.987	171.62	271.21	85.81	85.27	+0.63
	1.975	173.90	276.48	86.95	86.61	+0.39

ตารางที่ 2 แสดงค่า F_T , $F_T^{(r)}$ และ g ที่ได้จากการทดลองในระยะความยาวของเส้นเชือกต่าง ๆ โดยเปรียบเทียบค่า g ระหว่างค่าที่ได้จากการทดลองและค่ามาตรฐาน

ความยาว เส้นเชือก (cm)	แรงดึงใน เส้นเชือก (F_T ; N)	แรงดึงใน เส้นเชือก ในแนวนอน ($F_T^{(r)}$; N)	ค่าความเร่งเนื่องจาก แรงโน้มถ่วงของโลก (g_{exp} ; m s ⁻²)	ค่าความ คลาดเคลื่อน (%)
90	0.746	0.493	9.727	-0.75
	0.767	0.526	9.908	+1.07
	0.772	0.533	9.664	-1.43
	0.808	0.584	9.948	+1.47
	0.818	0.597	9.651	-1.56
100	0.705	0.427	9.829	+0.27
	0.715	0.446	9.908	+1.07
	0.722	0.458	9.776	-0.27
	0.749	0.498	9.909	+1.08
	0.754	0.506	9.682	-1.24
110	0.657	0.346	9.838	+0.37
	0.667	0.365	9.742	-0.62
	0.684	0.395	9.867	+0.66
	0.691	0.406	9.734	-0.69
	0.693	0.409	9.786	-0.16
120	0.733	0.474	9.901	+0.99
	0.772	0.533	9.800	-0.02
	0.795	0.566	9.628	-1.81
	0.831	0.615	9.876	+0.75
	0.862	0.656	9.863	+0.62
130	0.705	0.430	9.758	-0.45
	0.709	0.436	9.741	-0.63
	0.718	0.450	9.670	-1.37
	0.740	0.486	9.755	-0.48
	0.749	0.499	9.772	-0.30

จากตารางที่ 2 พบว่าระยะความยาวเส้นเชือกต่าง ๆ 5 ค่า คือ 90, 100, 110, 120, และ 130 เซนติเมตร ค่าแรงดึงในเส้นเชือก F_T มีค่าอยู่ระหว่าง 0.657 ถึง 0.862 นิวตัน และค่าแรงดึงของเส้นเชือกในแนวนอน $F_T^{(r)}$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0.346 ถึง 0.656 นิวตัน และค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g มีค่าระหว่าง 9.628 ถึง 9.948 เมตรต่อวินาที² โดยค่าที่ได้จากการทดลองมีค่าใกล้เคียงกับค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมาตรฐานอย่างมาก โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าร้อยละ 2

การหาค่าของแรงเข้าสู่ศูนย์กลางและความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
โดยใช้เทคนิคการเคลื่อนที่แบบพาราโบลิก: เครื่องบินบังคับ

5. อภิปรายผลการวิจัย

จากการทดลองของการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวย ผลการทดลองเป็นไปตามหลักทฤษฎี โดยพบว่า อัตราเร็วของเครื่องบินบังคับจะมีค่าไม่คงที่ [7] จากตารางที่ 1 พบว่าที่ระยะความยาวของเส้นเชือก 5 ระยะ คือ 90, 100, 110, 120, และ 130 เซนติเมตร การหาคาบการเคลื่อนที่ T และเส้นผ่าศูนย์กลาง $2r$ ของการเคลื่อนที่เพื่อที่จะหาอัตราเร็วของวัตถุ โดยพบว่าอัตราเร็วของวัตถุมีค่าระหว่าง 185 ถึง 322 เซนติเมตรต่อวินาที และสามารถหาค่าของวงโคจรตามทฤษฎีได้จากสมการที่ (8) ซึ่งในที่นี้ผู้วิจัยใช้ค่า $g = 9.802$ เมตร.วินาที⁻² ซึ่งเป็นค่า g มาตรฐานที่ใช้ในการทดลองทางฟิสิกส์ ในกรณีเดียวกันนี้ผู้วิจัยได้ใช้ค่า $g = 9.783$ เมตร.วินาที⁻² ซึ่งเป็นค่าที่อยู่ในตำแหน่งที่ทดลองจังหวัดจันทบุรี ประเทศไทย พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนของค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกอยู่ในอัตราที่น้อยกว่าร้อยละ 2 เช่นกัน)

โดยภาพรวมพบว่ามีค่าความคลาดเคลื่อนของรัศมีของการเคลื่อนที่ระหว่างค่าที่ได้จากการทดลองและค่าที่คำนวณตามทฤษฎีในอัตราที่น้อยกว่าร้อยละ 2 ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยที่ผ่านมา [5] แต่ในรายละเอียดพบว่างานวิจัยดังกล่าวได้เลือกใช้ความยาวของเส้นเชือกในระยะ 119.2, 173.7, 227.7, 281.8, และ 341.1 เซนติเมตร โดยผลการทดลองพบว่าอัตราเร็วของวัตถุมีค่าระหว่าง 200 ถึง 480 เซนติเมตรต่อวินาที และมีค่าความคลาดเคลื่อนของรัศมีของการเคลื่อนที่ระหว่างค่าที่ได้จากการทดลองและค่าที่คำนวณตามทฤษฎีในอัตราที่น้อยกว่าร้อยละ 2 เช่นเดียวกับผลการวิจัยในครั้งนี้ จากรายละเอียดของผลการวิจัยครั้งนี้พบว่า เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงความยาวของเส้นเชือกเพิ่มขึ้นจาก 90 ถึง 130 เซนติเมตร ทำให้รัศมีของการเคลื่อนที่มีค่าเพิ่มขึ้น และการเปลี่ยนแปลงของรัศมีการเคลื่อนที่จะแปรผันตรงกับคาบของการเคลื่อนที่

กรณีผลลัพธ์ของการวิจัย F_T , $F_T^{(r)}$ และ g นั้น จากความรู้ของผู้วิจัยยังไม่พบว่ามีการรายงานวิจัยที่ศึกษาการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยที่รายงานผลวิจัยของ F_T , $F_T^{(r)}$ และ g อย่างเป็นระบบมาก่อน โดยพบว่า F_T และ $F_T^{(r)}$ แปรผันตรงกับระยะความยาวของเส้นเชือก (L) และแปรผกผันกับคาบของการเคลื่อนที่ยกกำลังสอง (T^2) โดย F_T มีค่าอยู่ระหว่าง 0.657 ถึง 0.862 นิวตัน และค่าแรงดึงของเส้นเชือกในแนวรัศมี $F_T^{(r)}$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0.346 ถึง 0.656 นิวตัน ซึ่ง F_T มีค่ามากกว่า $F_T^{(r)}$ เสมอ ผลการวิจัยเป็นไปตามหลักทฤษฎี เมื่อนำค่าคาบและรัศมีที่ได้จากการทดลองมาหาค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก พบว่า g ที่ได้จากทดลองมีค่าใกล้เคียงกับค่ามาตรฐานอย่างมาก มีค่าความคลาดเคลื่อน น้อยกว่าร้อยละ 2 ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นของผลวิจัยครั้งนี้อาจเกิดจากการวัดรัศมีของการเคลื่อนที่ของผู้วิจัย และการปล่อยให้เครื่องบินเคลื่อนที่โดยให้มุมระหว่างเส้นเชือกที่แขวนเครื่องบินบังคับกับแนวดิ่งทำมุม 45 องศาตามเงื่อนไขเบื้องต้นนั้นมีความคลาดเคลื่อน เพราะการวัดดังกล่าวต้องอาศัยความละเอียดและรอบคอบอย่างมาก หากมีความผิดพลาดเกิดขึ้นจะส่งผลให้ค่าที่ได้จากการวิจัย เมื่อเทียบกับค่ามาตรฐานมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น

ดังนั้นการศึกษาการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยโดยใช้เครื่องบินบังคับทดลองจึงเป็นการทดลองที่สามารถพิสูจน์ทฤษฎีการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ ได้อย่างมีประสิทธิภาพและเป็นวิธีทดลองที่ประหยัดราคาอุปกรณ์การทดลองไม่แพง สามารถดึงดูดผู้เรียนในการศึกษาและออกแบบทดลอง ทำให้สามารถเข้าใจในทฤษฎีการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอได้อย่างลึกซึ้งในห้วงปฏิบัติการพื้นฐานทั่วไป

6. สรุปผลการวิจัย

การหาค่าของแรงเข้าสู่ศูนย์กลางและความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกโดยใช้เทคนิคการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมกรวยโดยใช้เครื่องบินบังคับในการทดลองตามที่ได้อธิบายมาข้างต้น เป็นการนำเสนอวิธีการทดลองที่ประหยัดและมีความน่าสนใจในการศึกษาการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ ในห้วงปฏิบัติการพื้นฐาน เพื่อให้ผู้ศึกษาได้เข้าใจทฤษฎีได้อย่างลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น และผลการทดลองครั้งนี้พบว่ามีค่าความคลาดเคลื่อนของการทดลองน้อยมาก

7. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากกองทุนวิจัย มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] Butcher, F. (1987). Circular motion studies with a toy airplane. *Phys.Teach.*, 25, 572- 573.
- [2] Franklin, B. (1988). More on toy airplanes. *Phys.Teach.*, 26, 264.
- [3] Larson, L., & Grant, R. (1991). The airplane experiment. *Phys.Teach.*, 29, 564-565.
- [4] Moses, T., & Adolphi, N. L. (1998). A new twist for the conical pendulum. *Phys.Teach.*, 36, 372-373.
- [5] Mazza, A. P., Metcalf, W. E., Cinson, A. D., & Lynch, J. J. (2007). The conical pendulum: the tethered aeroplane. *Physics education*, 42(1), 62-67.
- [6] Brown, D., & Cox, A. J. (2009). Innovative uses of video analysis. *Phys.Teach.*, 47, 145-150.
- [7] Jewett, J. W., & Serway, R. A. (2008). *Physics for Scientists and Engineers with modern physics (7th edition)*. Boston: Brooks/Cole.

ข้อมูลเสริม

การพิสูจน์ที่มาของสมการ

$$F_T \cos \theta - mg = 0 \quad (1)$$

$$F_T \sin \theta = ma_c = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

ยกกำลังสมการ (1) และ (2) เข้าด้วยกัน จะได้

$$\begin{aligned} F_T^2 &= (mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{r} \right)^2 \\ &= m^2 \left(g^2 + \left(\frac{v^2}{r} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

แทนค่า $v^2 = rg \tan \theta$ โดย $\tan \theta = r/h$ ลงในสมการ (3) และจัดรูปแบบสมการใหม่จะทำให้ได้

$$F_T = mg \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2} \quad (4)$$

เมื่อเงื่อนไข $\theta = 45^\circ$ แล้ว $r = h, \sqrt{2}r = L$ และ $g = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ แทนลงในสมการ (4) ผลลัพธ์ที่ได้คือ แรงตึงในเส้นเชือก

$$F_T = \frac{4\pi^2 mL}{T^2} \quad (5)$$

จากสมการที่ (2) ในที่นี้กำหนด $F_T \sin \theta$ คือ แรงตึงในเส้นเชือกตามแนวของรัศมีของการเคลื่อนที่ คือ $F_T^{(r)}$ ดังนั้นจากสมการที่ (2) จะได้

$$F_T^{(r)} = \frac{mv^2}{r} \quad (6)$$

แทนค่า $v = \frac{2\pi r}{T}$ และ $r = \sqrt{L^2 - \left[\frac{gT^2}{4\pi^2} \right]^2}$ ลงในสมการ (6) และจัดรูปแบบสมการ ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$F_T^{(r)} = m \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 L}{T^2} \right)^2 - g^2} \quad (7)$$