

ความน่าจะเป็นที่ผลตอบสนองทางพลศาสตร์จะเกินเกณฑ์ออกแบบ
สำหรับระบบคู่ควบยานพาหนะโครงสร้าง

COMPUTATION OF PROBABILITY OF DYNAMIC RESPONSES EXCEEDING A DESIGN
THRESHOLD FOR VEHICLE-STRUCTURE COUPLED SYSTEM

จักรกฤษณ์ จิตรคำคุณ¹, ทรงศักดิ์ สุทธาสุประดิษฐ์², รัฐภูมิ ปาริชาติปรีชา² และ ปฤษทัศว์ ศีตะปิ่นย²

¹นิสิตปริญญาโท สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนครสวรรค์

²อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธา และ สถานวิจัยเพื่อความเป็นเลิศด้านวิศวกรรมถนนและระบบราง
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนครสวรรค์

บทคัดย่อ - พลศาสตร์ของโครงสร้างรองรับยานพาหนะความเร็วสูงถูกศึกษาโดยใช้แบบจำลองยานพาหนะหลายคันแบบจำลองความขรุขระแบบสุ่มและแบบจำลองโครงสร้างยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic Structure) โดยยานพาหนะเป็นแบบ 3 คันที่ใช้เพลาร่วม (Articulated Bogies) มี 10 ดีกรีความเป็นอิสระ (Degree of Freedom, DOF) โดยที่มีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ และมีจุดเชื่อมต่อ (Interface) กับโครงสร้างทางวิ่ง 4 จุด ความขรุขระพื้นผิว (Surface Roughness) ของทางวิ่งจำลองโดยใช้ตัวกรองไวท์นอยซ์ (Filtered White Noise) ปรับให้ใกล้เคียงกับข้อมูลจริง โครงสร้างทางวิ่งจำลองโดยใช้หลักการแยกโหมดการสั่น (Modal Decomposition) โดยมีความถี่ธรรมชาติ รูปร่างโหมด (Modeshape) และความหน่วงของโครงสร้างเป็นตัวแปรสำคัญ แบบจำลองจุดเชื่อมต่อ (Interface Model) เป็นแบบสปริงเชิงเส้นที่สัมผัสกับพื้นผิวโครงสร้างตลอดเวลา ตัวแปรทั้งหมดของยานพาหนะ ความขรุขระและโครงสร้างถูกทำให้เป็นตัวแปรไร้หน่วยและสมการระบบคู่ควบยานพาหนะ-โครงสร้าง (Coupled Vehicle-Structure System Equation) จะถูกเขียนอยู่ในรูปสเตทฟอร์ม (State Form) เมื่อคำนวณค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนของแฟคเตอร์กำลังขยาย (Dynamic Amplification Factor, DAF) ของผลตอบสนองโครงสร้าง รวมทั้งอนุพันธ์ลำดับที่ 1 ได้ ก็จะสามารถหาค่าความน่าจะเป็นที่ผลตอบสนองโครงสร้างจะเกินค่าที่กำหนดไว้ได้

คำสำคัญ - ความน่าจะเป็นของการวิบัติ, ความน่าจะเป็นของพลศาสตร์โครงสร้าง, ความน่าเชื่อถือของโครงสร้าง, ระบบคู่ควบยานพาหนะ-โครงสร้าง

Abstract : The dynamics of high-speed vehicles on structures is studied using a passive, multi-car vehicle model, a random surface roughness model and a linear elastic structure model. The vehicle model is a three-car, 10 DOF system with a constant velocity and four interfaces with the structure. The roughness model is filtered white noise. The structure model is defined in the modal domain by natural frequencies, mode shapes and modal damping values. The interface model is a simple linear spring, always in contact with the rough surface of the structure. All vehicle, roughness and structure variables are nondimensionalized and the equations of the coupled vehicle-structure system are written in state variable form. The equations for the evolutionary mean and covariance matrices of the state vector are solved. All responses are normalized by maximum static responses so that evolutionary mean and variances of dynamic amplification factors including their first derivatives are determined. Finally, probability of responses exceeding threshold can be obtained.

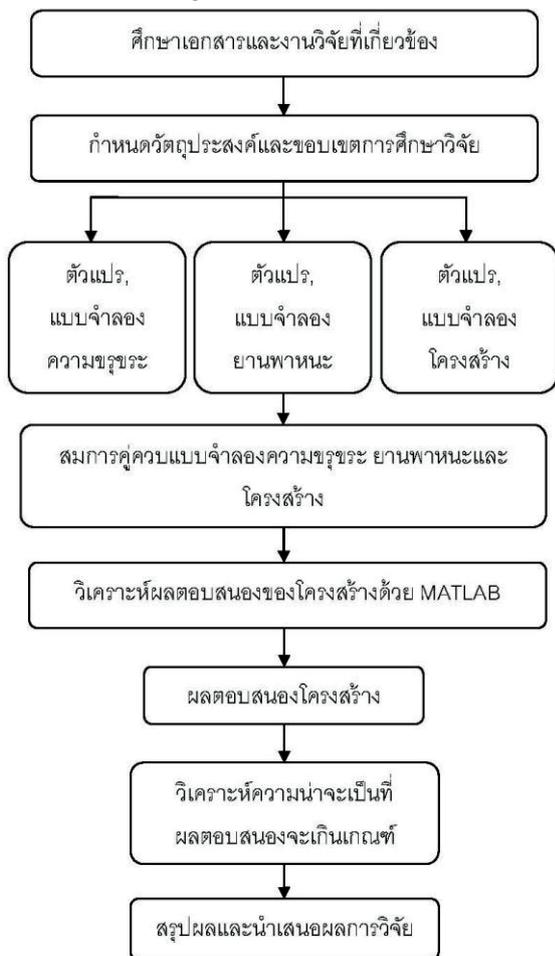
Keywords - Probability of failure, Probabilistic Structure Dynamics, Structure Reliability, Vehicle-Guideway Coupling System

1. บทนำ

แบบจำลองยานพาหนะ จุดเชื่อมต่อของยานพาหนะกับโครงสร้าง ความขรุขระ และแบบจำลองโครงสร้างคือองค์ประกอบสำคัญของระบบที่ต้องกำหนดก่อน แบบจำลองความขรุขระแบบสุ่มซึ่งเป็นส่วนสำคัญจะอยู่ในสแตทเวกเตอร์ (State Vector) ของระบบคู่ควมยานพาหนะโครงสร้างจะเป็นกระบวนการมาร์คอฟ (Markov Process) สมการควบคุมการเคลื่อนที่ (Governing Dynamic Equation) จะมีทั้งส่วนที่แน่นอนกำหนดได้ (Deterministic) และส่วนที่เป็นตัวแปรสุ่ม (Random) ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของแพคเตอร์กำลังขยายของโมเมนต์ดัดและแรงเฉือน จะถูกคำนวณโดยชุดตัวแปรไร้หน่วย ค่าทางสถิติของแพคเตอร์กำลังขยาย (DAF) ต่างๆสามารถนำไปประมาณค่าความน่าจะเป็นที่ DAF ผลตอบสนองโครงสร้างจะเกินเกณฑ์ที่กำหนด ค่าต่างๆเหล่านี้จะบ่งบอกถึงความน่าเชื่อถือของโครงสร้างที่ออกแบบ

2. วิธีดำเนินงานวิจัย

การดำเนินงานวิจัย ได้จัดลำดับขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยอย่างเป็นระบบดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แผนผังการดำเนินงานวิจัย

3. แบบจำลองยานพาหนะและจุดเชื่อมต่อของยานพาหนะกับโครงสร้าง

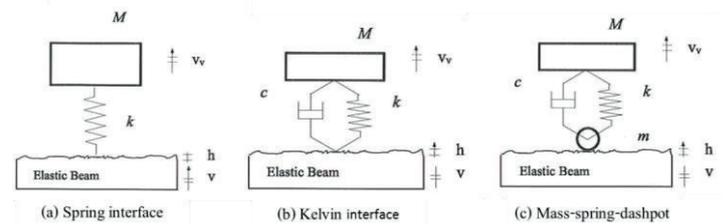
ผลตอบสนองทางพลศาสตร์ของโครงสร้างเนื่องจากยานพาหนะสามารถหาได้จากการกระจัดแนวตั้ง $v_d(x_d, t_d)$ โดยสัญลักษณ์ตัวห้อย d บ่งบอกว่าเป็นปริมาณที่มีหน่วย และสัญลักษณ์ d จะหายไปเมื่อสมการควบคุมถูกจัดในรูปแบบไร้หน่วย ตัวแปรไร้หน่วยจะถูกนิยามขึ้น การกระจัดแนวตั้ง (Vertical Displacement) ซึ่งนิยามด้วยหลักการแยกโหมด (Modal Decomposition) แสดงดังนี้

$$v_d(x_d, t_d) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t_d) \phi_i(x_d) \tag{1}$$

โดยที่ $\phi_i(x_d)$ คือ รูปร่างโหมด (Mode shape) ที่ i^{th} , $y_i(t_d)$ คือ พิกัดโหมด (Modal Coordinate) ที่ i^{th} การกระจัดแนวตั้งทั้งหมด ($v_d^i(x_d, t_d)$) ที่จุดเชื่อมต่อของยานพาหนะกับโครงสร้างที่มีความขรุขระ ($h_d(x_d)$) คือ

$$v_d^i(x_d, t_d) = v_d(x_d, t_d) + h_d(x_d) \tag{2}$$

รูปแบบของแรงปฏิสัมพันธ์ระหว่างยานพาหนะและพื้นผิวโครงสร้างที่จุดเชื่อมต่อ (Vehicle-Structure Interface) นั้นมีหลายรูปแบบ

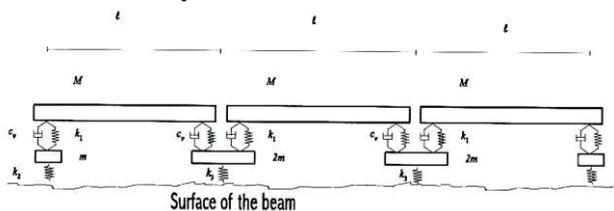


รูปที่ 2 แบบจำลองความสัมพันธ์เชิงเส้นของจุดเชื่อมต่อยานพาหนะกับโครงสร้าง

รูปที่ 2(a) แสดงจุดเชื่อมต่อแบบยึดหยุ่นเชิงเส้น รูปที่ 2(b) แสดงจุดเชื่อมต่อแบบ Kelvin เช่น มีสปริงเชิงเส้นและตัวหน่วงขนานกัน รูปที่ 2(c) แสดง จุดเชื่อมต่อที่พิจารณามวล สปริง และตัวหน่วงขนานกัน แรงปฏิสัมพันธ์ในแบบจำลองในรูปที่ 2(a) ขึ้นกับการกระจัดทั้งหมด ส่วนแรงปฏิสัมพันธ์ในรูปที่ 2(b) และ 2(c) ขึ้นกับการกระจัดทั้งหมด $v_d^i(x_d, t_d)$ และอนุพันธ์เวลา (Time Derivative) ของการกระจัดนั้นๆ รวมทั้งอนุพันธ์ระยะ (Spatial Derivative) ของความขรุขระ $h_d(x_d)$ ด้วย เนื่องจากการกระจัดทั้งหมดที่จุดเชื่อมต่ออยู่ในฟังก์ชันของพิกัดโหมดสมการโหมด (Modal Equation) ของโครงสร้างจึงมีลักษณะเป็นสมการคู่ควม [1] สำหรับแบบจำลองในรูปที่ 1(a) เมตริกซ์

ความแข็งแกร่งเป็นฟังก์ชันของเวลา การกระตุ้นระบบ (System Excitation) จะทำโดยใช้ความขรุขระ $h_d(x_d)$ เท่านั้น แต่สำหรับแบบจำลองในภาพ 2(b) เมตริกซ์ความแข็งแกร่งและความหน่วงของระบบเป็นฟังก์ชันของเวลา การกระตุ้นระบบนอกจากต้องมีความขรุขระ $h_d(x_d)$ แล้วยังต้องทราบค่าอนุพันธ์ระยะลำดับที่ 1 ของความขรุขระ $h'_d(x_d)$ นั้นด้วย และสุดท้าย สำหรับแบบจำลอง 2(c) ทั้งเมตริกซ์ของมวล ความแข็งแกร่งและความหน่วงล้วนเป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนั้นการกระตุ้นระบบจึงต้องทราบค่า $h_d(x_d)$, $h'_d(x_d)$ และ $h''_d(x_d)$ ด้วยเหตุนี้หากจะใช้แบบจำลองจุดเชื่อมต่อไปรูป 2(b) และ 2(c) ค่าอนุพันธ์ระยะของความขรุขระจะต้องหาค่าได้ (Exist) ในการวิจัยนี้ใช้แบบจำลองในภาพ 2(a) ดังนั้นเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบเท่านั้นที่เป็นฟังก์ชันของเวลา จึงไม่มีความจำเป็นต้องใช้ออนุพันธ์ระยะของความขรุขระ

นอกจากพิจารณา เมตริกซ์ต่างๆของระบบซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาและสมการของระบบเป็นแบบคู่ควบ (Coupling System) แล้ว แบบจำลองยานพาหนะแบบเพลาร่วม (Articular System) แล้ว แบบจำลองยานพาหนะแบบเพลาร่วม (Articular System) [2] หลายเพลากลูกนำมาใช้ในการศึกษาด้วย โดยแบบจำลองยานพาหนะจำนวน 4 เพล่า ที่มี 10 ดีกรีความเป็นอิสระ จึงถูกนำมาใช้ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แบบจำลองยานพาหนะ 10 ดีกรีความเป็นอิสระ

จากรูปที่ 3 แสดงลักษณะยานพาหนะที่มีดีกรีความเป็นอิสระเป็นการกระตุ้นแนวตั้งและการหมุน โดยดีกรีความเป็นอิสระนี้จะอยู่ที่ศูนย์กลางมวลของยานพาหนะและมีระบบช่วงล่างจำนวน 4 ชุดที่มีการกระตุ้นแนวตั้งเป็นดีกรีความเป็นอิสระเท่านั้น ขนาดความยาวของยานพาหนะนั้นนิยามโดยระยะ l ซึ่งเป็นระยะช่วงเพล่า (Wheelbase) ของยานพาหนะ สำหรับการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างที่มีความเร็วคงที่ V การกระตุ้นระบบของแต่ละพิกัดโมดอลของโครงสร้างจะประกอบด้วย $h_d(vt_d)$, $h_d(vt_d - l)$, $h_d(vt_d - 2l)$ และ $h_d(vt_d - 3l)$ นั่นคือ ค่าความขรุขระที่ตำแหน่ง (vt_d) , $(vt_d - l)$, $(vt_d - 2l)$ และ $(vt_d - 3l)$ ซึ่ง l คือ ระยะช่วงเพล่า (Wheelbase)

4. แบบจำลองกระบวนการสุ่มสำหรับความขรุขระ

ค่าความขรุขระ $h_d(vt_d)$ จำลองโดยใช้สมการอนุพันธ์ลำดับที่ 1 แสดงดังต่อไปนี้

$$\Delta_c \frac{dh_d(x_d)}{dx_d} + h_d(x_d) = w_d(x_d) \quad (3)$$

ซึ่งค่า $w_d(x_d)$ คือ กระบวนการสุ่มเกาส์เซียนไวท์นอยซ์ (Gaussian White Noise) โดยมี ค่าความเข้ม (Intensity, s_0), ค่ากำลังสเปกตรัล (Spectral Strength, $q_0 = 2\pi s_0$), Δ_c คือระยะสหสัมพันธ์ (Correlation Distance) โดยฟังก์ชันระยะสหสัมพันธ์ (Spatial Correlation Function) ของ $h_d(x_d)$ แสดงโดย $\rho_{h_d h_d}(\Delta)$ และจัดรูปได้ดังต่อไปนี้

$$\rho_{h_d h_d}(\Delta) = \frac{\text{COV}[h_d(x_d)h_d(x_d + \Delta)]}{\text{VAR}[h_d(x_d)]} = \exp\left[-\frac{|\Delta|}{\Delta_c}\right] \quad (4)$$

COV คือ ค่าความแปรปรวนระหว่างความขรุขระ $h_d(x_d)$ กับ $h_d(x_d + \Delta)$

VAR คือ ค่าความแปรปรวนของความขรุขระ $h_d(x_d)$

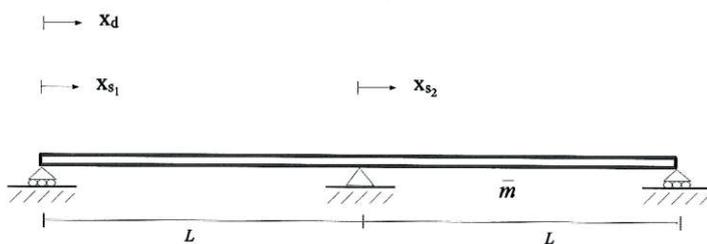
โดย ค่าระยะสหสัมพันธ์, Δ_c , ที่มีการร่นระยะ (Spatial Lag), Δ ที่เงื่อนไข $\rho_{h_d h_d}(\Delta) = e^{-1}$ สำหรับการคำนวณข้อมูลเวลาของผลตอบสนองของโครงสร้างรองรับยานพาหนะที่มีความเร็วคงที่ V แบบจำลองความขรุขระในโดเมนระยะ (Spatial Domain) [3] ที่กำหนดขึ้นโดยสมการที่ (3) อาจถูกแปลงให้อยู่ในโดเมนเวลา (Time Domain) จากความสัมพันธ์ $x_d = vt_d$

สำหรับยานพาหนะ 4 เพล่า ที่มีระยะระหว่างเพล่า l ความขรุขระที่กระตุ้นระบบจะถูกจำลองขึ้นที่เวลาต่างๆ คือ t_d , $t_d - l/v$, $t_d - 2l/v$ และ $t_d - 3l/v$ นิยามสมบัติของกระบวนการมาร์คอฟ (Markov Process) คือ เหตุการณ์ในอนาคตจะขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ปัจจุบันเท่านั้น ดังนั้น เวกเตอร์มาร์คอฟแบบสุ่มถูกนำมาใช้ การร่นระยะ (Spatial Lag) หรือการร่นเวลา (Time Lag) จะต้องถูกจำลองให้เหมาะสม ในงานวิจัยของ Harrison และ Hammond [4] ได้นำแนวความคิดไวท์นอยซ์ที่มีการร่น (Lag) มาใช้ อีกงานวิจัยหนึ่งโดย Nigam และ Narayanan [5] ได้ใช้แนวคิดจากอนุกรมเทเลอร์มาใช้ ในงานวิจัยนี้ทำโดย จับคู่ความขรุขระ $h_d(t_d)$ และ $h_d(t_d - l/v)$ ที่พิจารณาความขรุขระ $h_d(t_d)$ ที่ t_d คงที่ และ $h_d(t_d - l/v)$ ที่ $t_d - l/v$ คงที่ เป็นสองตัวแปรสุ่ม โดยมีค่า Δ_c และระยะช่วงเพล่า l จากนั้น แปลง $h_d(t_d - l/v)$ ให้เป็น $h_{d2}(t_d)$ ที่มีค่าความแปรปรวนเท่ากับ $h_d(t_d)$ และมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation Coefficient) ระหว่าง $h_d(t_d)$ และ $h_{d2}(t_d)$ เท่ากับ

ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง $h_1(t_d)$ และ $h_2(t_d - \ell / V)$ การจำลองการรบกวนนี้เป็นไปได้เพราะสหสัมพันธ์ระหว่างสองผลตอบสนองของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นลำดับที่ 1 สามารถควบคุมได้โดยการสมมติสหสัมพันธ์ของไวท์นอยซ์ $w_{d1}(t_d)$ และ $w_{d2}(t_d)$ ที่เป็นอินพุทของสมการตัวกรองที่ใช้จำลองความขรุขระ $h_1(t_d)$ และ $h_2(t_d)$ ดังนั้นการจำลองการรบกวนจึงทำจากที่กำหนดเป้าหมายของสหสัมพันธ์ให้เท่ากับ $\rho_{h_1(t_d)h_2(t_d-\ell/V)}$ จากนั้นเปลี่ยนค่าในสมการตัวกรองอนุพันธ์ลำดับที่ 1 ให้ $h_1 = h_1(t_d)$ และ $h_2 = h_2(t_d - \ell / V)$ สมการตัวกรองทั้งสองจะถูกกระตุ้นด้วยสองไวท์นอยซ์ที่มี $\rho_{w_{d1}, w_{d2}} = \rho_{h_1(t_d)h_2(t_d-\ell/V)}$ ดังนั้นสหสัมพันธ์ของความขรุขระทั้งสองที่จำลองจากสมการตัวกรองจะมีค่า $\rho_{h_1(t_d)h_2(t_d-\ell/V)} = \rho_{h_1(t_d)h_2(t_d-\ell/V)}$ การรบกวน (Lag) ที่เกิดขึ้นจะถูกตัดออกและเวกเตอร์การสั่นแบบสุ่มของมาร์คอฟ (Markov) จะถูกนำมาใช้ได้อย่างสมบูรณ์

5. แบบจำลองโครงสร้าง

แบบจำลองโครงสร้างที่ใช้ในงานวิจัยจะใช้หลักการแยกโหมด (Modal Decomposition) ในการจำลอง มีลักษณะเป็นโครงสร้างเชิงเส้น มีดีกรีความเป็นอิสระในแนวดิ่งซึ่งมี พิกัดโมดอล (Modal Coordinate) ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ความหน่วง (Damping) รูปร่างโหมด (Modeshape) [6] เป็นคุณสมบัติหลัก แบบจำลองโครงสร้างที่พิจารณานี้ เป็นโครงสร้างคานทางวิ่ง 2 ช่วงที่มีระยะช่วงยาวเท่ากัน โดยมีการกำหนดพิกัดที่ตั้งแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 แบบจำลองโครงสร้างทางวิ่ง 2 ช่วง

6. ระบบคู่ควมยานพาหนะกับโครงสร้าง และสมการการเคลื่อนที่ในสแตตสเปซ

เมื่อแบบจำลองของจุดเชื่อมต่อ ยานพาหนะ ความขรุขระ และโครงสร้างถูกจำลองขึ้นแล้ว สมการการเคลื่อนที่ของระบบคู่ควมจะถูกสร้างขึ้น โดยถูกเขียนให้อยู่ในรูปสแตตสเปซ ซึ่งเป็นรูปแบบที่เป็นสากล ง่ายกับการใช้อัลกอริธึมการคำนวณเชิงตัวเลขต่างๆ เพื่อให้มีความชัดเจนในการศึกษาตัวแปรในระบบจึงจัดกลุ่มตัวแปรให้อยู่ในรูปแบบตัวแปรไร้หน่วยดังนี้

ตำแหน่ง (Position) $x = x_d / L$

เวลา (Time) $t = t_d / (L / V)$

ความขรุขระ (Roughness) $w_1 = w_{d1} / L, h_1 = h_{d1} / L$

กำลังสเปกตรัลของไวท์นอยซ์ (Spectral Strength of Whitenoise) q_0 / L^3

ระยะสหสัมพันธ์ (Correlation Distance) Δ_c / L

ยานพาหนะ

ระยะเพลตต่อความยาวช่วงคาน (Wheelbase to Span Length Ratio) ℓ / L

มวลตัวโดยสาร (Mass of Car Body) $\mu_i = M / \bar{m}L$

มวลระบบช่วงล่าง (Mass of Suspension) $\eta_i = m / \bar{m}L$

ความถี่

$$f_c = \frac{c / \bar{m}L}{\omega_1} \quad f_g = \sqrt{\frac{g/L}{\omega_1^2}}$$

$$f_{k_1} = \sqrt{\frac{k_1 / \bar{m}L}{\omega_1^2}} \quad f_{k_2} = \sqrt{\frac{k_2 / \bar{m}L}{\omega_1^2}}$$

อัตราการข้าม (Passage Rate) $f_v = v / L / \omega_1$

อัตราการมาถึง (Arrival Rate) $f_a = v / \ell / \omega_1$

ความถี่โครงสร้าง (Natural frequency) $f_i = \omega_i / \omega_1$

ความหน่วงของโครงสร้าง (Damping) $\xi_i = \xi$

รูปร่างโหมดของโครงสร้าง (Modeshape) $A_i \phi(x) / L$

พิกัดโมดอลของโครงสร้าง (Modal Coordinate)

$$d_i(t) = \frac{A_i}{L} y_i(t)$$

ค่าความถี่ถูกทำเป็นตัวแปรไร้หน่วย โดยหารด้วย ω_1 อัตราการข้าม $f_v = v / L / \omega_1$ และอัตราการมาถึง $f_a = v / \ell / \omega_1$ ต่างเป็นพารามิเตอร์สำคัญที่มีผลกระทบต่อค่าเฉลี่ยผลตอบสนองของ

ระบบมาก ในสเตทเวกเตอร์จะประกอบด้วย ตัวแปรจากสมการ ตัวกรองความขรุขระ 4 ตัวแปร ตัวแปรจากแบบจำลอง ยานพาหนะ $2 \times 10 = 20$ ตัวแปร และ ตัวแปรในระบบโครงสร้าง n โหมด จำนวน $2n$ ตัวแปร ดังนั้น จำนวนตัวแปรทั้งหมดในสเตทเวกเตอร์ คือ $2n+24$ ระบบสมการคู่ควบเชิงเส้นที่ถูกกระตุ้นด้วย ไรท์นอยซ์ที่มีสหสัมพันธ์ขนาด 4×4 สามารถเขียนได้ในรูปสเตทพอร์มดังนี้

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + BW(t) + C(t), X(0) \quad (5)$$

X คือ สเตทเวกเตอร์ w คือ เวกเตอร์ไรท์นอยซ์ที่มีสหสัมพันธ์ A, B และ C เป็นเมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความขรุขระ ยานพาหนะ และโครงสร้างทางวิ่ง สมการที่ (5) เป็นสมการอนุพันธ์สโตแคสติก (Stochastic Differential Equation) เมื่อหาค่าเฉลี่ยของสมการที่ 5 จะได้สมการสำหรับค่าเฉลี่ยของสเตทเวกเตอร์ดังนี้

$$E[\dot{X}(t)] = A(t)E[X(t)] + C(t), E[X(0)] \quad (6)$$

ในสมการที่ (6) พจน์ของ $BW(t)$ จะหายไปเพราะ $w(t)$ มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ การคำนวณหาค่าเฉลี่ยจากสมการที่ (6) จึงเหมือนกับ การแก้สมการการเคลื่อนที่ที่มีการกระตุ้นระบบด้วยเวกเตอร์ $C(t)$ กรณีค่าความขรุขระเท่ากับศูนย์ เมตริกซ์ $A(t)$ เป็นเมตริกซ์ของตัวแปรทราบค่า (Deterministic) แต่อยู่ในฟังก์ชันของเวลา ส่วนเมตริกซ์ความแปรปรวนของระบบ Σ_{xx} จะคำนวณได้สมการอนุพันธ์สโตแคสติก ลีอาปูนอฟลำดับที่ 1 (First Order Stochastic Lyapunov Differential Equation) [5] ดังต่อไปนี้

$$\dot{\Sigma}_{xx} = A \Sigma_{xx} + \Sigma_{xx} A^T + BQB^T, \Sigma_{xx}(0) \quad (7)$$

7. การศึกษาตัวแปรในระบบและผลการศึกษา

สมการอนุพันธ์ค่าเฉลี่ยและเมตริกซ์ความแปรปรวนของ สเตทเวกเตอร์สามารถคำนวณเชิงตัวเลขได้โดยใช้อัลกอริธึมทางคณิตศาสตร์ทั่วไป ผลที่ได้จะเป็นค่าทางสถิติของผลตอบสนองพลศาสตร์ของยานพาหนะและโครงสร้าง โดยทั้งหมดจะแสดงรูปตัวแปรไร้หน่วย ในงานวิจัยนี้จะมุ่งเน้นผลการศึกษาเฉพาะในส่วนโครงสร้างเท่านั้น โดยจะอยู่ในรูปแฟกเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์ (Dynamic Amplification Factor, DAF) จากค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่าความแปรปรวนของอนุพันธ์เวลาของแฟกเตอร์กำลังขยายผลตอบสนองโครงสร้างที่ได้จากสมการที่ (6) และ (7) ความน่าจะเป็นที่ค่าผลตอบสนองโครงสร้างที่พิจารณาจะเกินเกณฑ์ที่ออกแบบ สามารถคำนวณได้ด้วยสมการของ Rice [7]

แบบจำลองยานพาหนะที่มี 10 ดีกรีความเป็นอิสระที่แสดงในรูปที่ 2 ใช้แบบจำลองจุดเชื่อมต่อเป็นสปริง และมีค่าตัวแปรต่างๆในระบบดังนี้

$$\text{ระยะเพลตต่อความยาวช่วงคาน } \ell / L = 0.5, 0.6, 0.7$$

$$\text{มวลคู่โดยสารยานพาหนะ } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.2$$

$$\text{มวลระบบช่วงล่าง } \eta_1 = \eta_4 = 0.02$$

$$\eta_2 = \eta_3 = 0.04$$

$$\text{ค่าความถี่ไร้หน่วย } f_{k_1} = 0.05, f_{k_2} = 0.2, f_c = 0.02$$

ค่าตัวแปรความขรุขระ $q_0 / L^3 = 0.01885x10^6$ และค่าระยะสหสัมพันธ์ $\Delta_c / L = 1.67, 3.33, 5.33, 6.67$ เมตริกซ์กำลังสเปกตัลขนาด 4×4 ของเวกเตอร์ไรท์นอยซ์แสดงในสมการที่ (8)

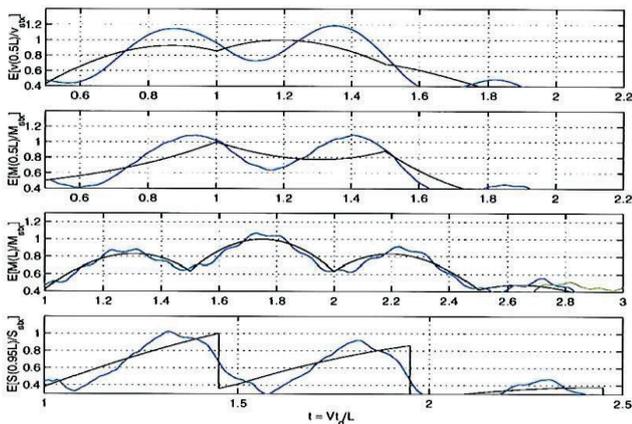
$$Q = \frac{q_0}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{w_1 w_2} & \rho_{w_1 w_3} & \rho_{w_1 w_4} \\ & 1 & \rho_{w_2 w_3} & \rho_{w_2 w_4} \\ & & 1 & \rho_{w_3 w_4} \\ \text{Sym.} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ซึ่งค่า $\rho_{w_i w_j}$ จะขึ้นอยู่กับค่า ℓ / L ผลตอบสนองโครงสร้างที่พิจารณาคือ การกระจัดที่กึ่งกลางคาน โมเมนต์ดัดที่กึ่งกลางคาน โมเมนต์ดัดที่จุดรองรับด้านใน และแรงเฉือนที่ระยะ $x_d / L = 0.95$ ค่าผลตอบสนองของโครงสร้างจะถูกหารด้วยค่าผลตอบสนองสถิตศาสตร์ โดยอยู่ในรูปของแฟกเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์ (DAF)

การศึกษาผลตอบสนองพลศาสตร์ของโครงสร้าง มีตัวแปรสำคัญที่เกี่ยวข้องคือ ค่าอัตราการข้าม นิยามโดย $f_v = v / L / \omega_1$ หรือ $2\pi f_v = (v / L) / f_1$ และ อัตราการมาถึง นิยามคล้ายกันคือ $f_a = v / \ell / \omega_1$ หรือ $2\pi f_a = v / \ell / f_1$

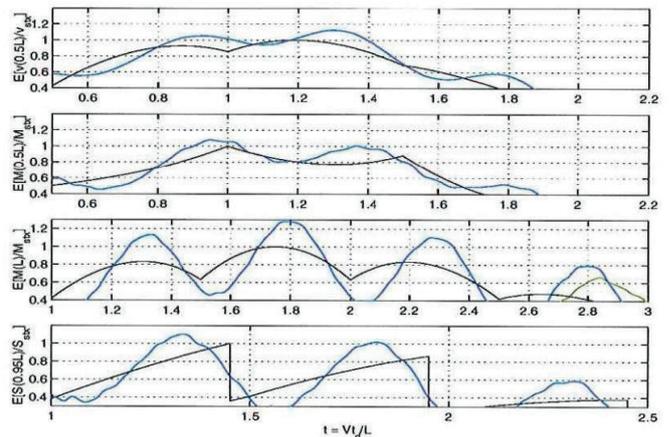
สำหรับยานพาหนะที่มีความเร็วสูง การสั่นพ้องจะเกิดขึ้นเมื่อค่า $2\pi f_v$ เข้าใกล้ 1 เท่านั้น (ค่าสูงสุดของ $2\pi f_v(0.12) = 0.754$) อย่างไรก็ตามถ้าค่า $\ell / L < 1$ และ $\ell / L = 0.5$ ค่า $2\pi f_v$ สามารถมีค่าเกิน 1 อย่างแน่นอน และอาจมีค่าสูงถึงเท่ากับ 1.56 ซึ่งเป็นความถี่ธรรมชาติในโหมดที่สองของคานสองช่วง ด้วยเหตุนี้จึงเป็นไปได้ที่ยานพาหนะที่มีความเร็วสูงมากอัตราการมาถึง $2\pi f_a$ จะเท่ากับค่าความถี่ธรรมชาติที่ 1 หรือ 2 ของโครงสร้างทางวิ่ง และจะทำให้ค่าเฉลี่ยของผลตอบสนองของโครงสร้างทางวิ่งมีค่าสูงไม่ว่าจะคิดความขรุขระด้วยหรือไม่ก็ตาม

รูปที่ 5 แสดงค่าเฉลี่ยของทั้ง 4 ผลตอบสนองของคานทางวิ่ง สำหรับค่า $f_v = 0.08$ และ $l/L = 0.5$ ค่าเฉลี่ยสูงสุดของแพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์เท่ากับ 1.20 เป็นค่าการกระจัดที่กึ่งกลางคานทางวิ่ง ซึ่งเกิดจากการกระตุ้นโครงสร้างทางวิ่งที่มีความถี่ธรรมชาติที่ $1 (2\pi f_d = 1.01)$ แม้ว่าค่าเฉลี่ยสูงสุดของแพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์คือ 1.20 เท่านั้น แต่เมื่อรวมผลจากความขรุขระซึ่งทำให้เกิดความแปรปรวนเพิ่มแล้ว ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์จะต้องถูกเพิ่มไปยังค่าเฉลี่ยเพื่อกำหนดแพคเตอร์กำลังขยายในการออกแบบ



รูปที่ 5 ค่าเฉลี่ยผลตอบสนองของคานต่อ v_v/L เมื่อค่า $f_v = 0.08$ และค่า $l/L = 0.5$

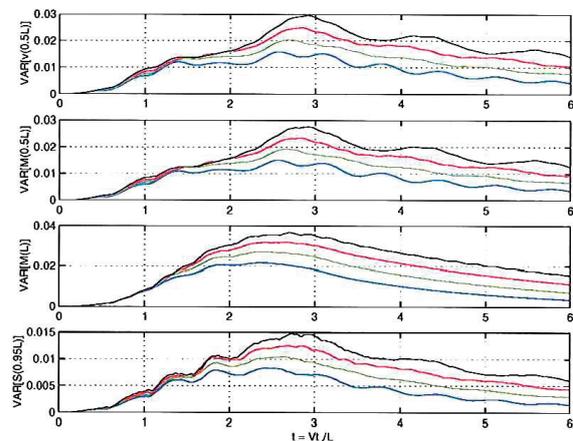
รูปที่ 6 แสดงค่าผลตอบสนองโครงสร้างเหมือนรูปที่ 4 แต่ใช้ค่า $f_v = 0.12$ และ $l/L = 0.5$ ซึ่งบ่งบอกว่าค่า $2\pi f_d = 1.51$ นั้นผลที่ตามมาคือ อัตราการมาถึงเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติที่ 2 ของคานทางวิ่ง ในกรณีนี้ค่าเฉลี่ยสูงสุดของ DAF, 1.30 จะเกิดขึ้นกับโมเมนต์ดัดที่จุดรองรับด้านในของคานทางวิ่ง ซึ่งเป็นผลโดยตรงจากรูปร่างโหมดที่ 2 ของคาน (เป็นโหมดที่รูปร่างโหมดเป็นแบบสมมาตร) รูปที่ 6 แสดงความแปรปรวนของผลตอบสนองคานทางวิ่ง เมื่อค่า f_v มีค่าตั้งแต่ 0.06, 0.08, 0.10 และ 0.12 ตามลำดับ ค่าสูงสุดของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์จะอยู่ในช่วง 0.08 ถึง 0.20 เนื่องจากทั้งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของแพคเตอร์กำลังขยายของผลตอบสนองคานทางวิ่ง มีค่าไม่คงที่ ไม่สม่ำเสมอในช่วงเวลา (Nonstationary) การกำหนดแพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์ในการออกแบบจึงเป็นเรื่องที่ยาก แต่ก็สามารถประมาณการได้โดยใช้การวิเคราะห์ข้อมูลเวลาการสั่นแบบสุ่ม (Random Vibration Time History Analysis)



รูปที่ 6 ค่าเฉลี่ยผลตอบสนองของคานต่อ v_v/L สำหรับ และ $f_v = 0.12$ $l/L = 0.5$

8. การกำหนดแพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์จากการวิเคราะห์ข้อมูลเวลาการสั่นแบบสุ่ม

สำหรับการออกแบบโครงสร้างที่รองรับยานพาหนะที่มีความเร็วสูงนั้น ตามมาตรฐานสากล เช่น UIC บอกว่าหากกำหนดคุณสมบัติของยานพาหนะที่ใช้ในระบบรถไฟความเร็วสูงชัดเจนแล้ว อนุญาตให้วิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างทางวิ่งจากยานพาหนะจริงได้ ไม่มีความจำเป็นต้องใช้น้ำหนักบรรทุกออกแบบมาตรฐาน HSLM (High Speed Load Model) ดังนั้นการกำหนดค่าแพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์สำหรับผลตอบสนองโครงสร้างใดๆในการออกแบบด้วยการวิเคราะห์ข้อมูลเวลาการสั่นแบบสุ่มจึงเป็นทางเลือกทางหนึ่งที่ได้และมีเหตุผลในมุมมองด้านความน่าจะเป็นและสถิติ เมื่อค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของผลตอบสนองถูกคำนวณได้ ความน่าจะเป็นที่ค่าผลตอบสนองโครงสร้างที่พิจารณาจะเกินเกณฑ์ที่ออกแบบสามารถคำนวณได้ด้วยสมการของ Rice [7] ซึ่งเป็นสมการที่รู้จักกันมากสำหรับการประมาณค่าความน่าจะเป็นในลักษณะนี้



รูปที่ 7 ความแปรปรวนผลตอบสนองของคานต่อ v_v/L สำหรับ $l/L = 0.5$ และ $f_v = 0.06, 0.08, 0.10, 0.12$

ความน่าจะเป็นที่ค่าผลตอบสนองจะสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดตามทฤษฎีของ Rice (1954) ได้สมมติให้การเกินค่าเกณฑ์ที่กำหนด (เท่ากับ a) เป็นกระบวนการปัวซอง (Poisson Process) ซึ่งถูกนิยามด้วยอัตราการเกิดเหตุการณ์เฉลี่ย (Mean Occurrence Rate, v_a) Rice ได้พิสูจน์สมการสำหรับการประมาณค่า v_a ในกระบวนการเกาเซียนส์ แต่เนื่องจากผลตอบสนองโครงสร้างที่เกิดจากรถไฟความเร็วสูงมีลักษณะไม่คงที่ไม่สม่ำเสมอตามเวลา (Nonstationary) ดังนั้นการใช้สมการของ Rice จึงเป็นการประมาณเท่านั้น อัตราการเกินเกณฑ์ที่กำหนด (a) เฉลี่ยของค่าผลตอบสนอง $x(t)$ สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$v_a(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{\sigma_x(t)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\frac{(a - E[x(t)])^2}{\sigma_x(t)} \right] \right] \quad (9)$$

ซึ่ง $E[x(t)]$ และ $\sigma_x^2(t)$ เป็นค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของผลตอบสนองและ $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$ คือค่าความแปรปรวนของอนุพันธ์เวลาของผลตอบสนอง ค่าต่างๆเหล่านี้คำนวณได้ทันทีจากการวิเคราะห์ข้อมูลเวลา (Time History Analysis) ที่นำเสนอก่อนหน้านี้ ค่า $v_a(t)$ นิยามโดยสมการที่ (9) ส่วนค่าความน่าจะเป็นที่ผลตอบสนองจะเกินเกณฑ์ที่กำหนดภายในช่วงเวลา, T , สามารถประมาณได้โดย

$$P[x(t), > a] \approx \int_0^T v_a(t) dt \quad (10)$$

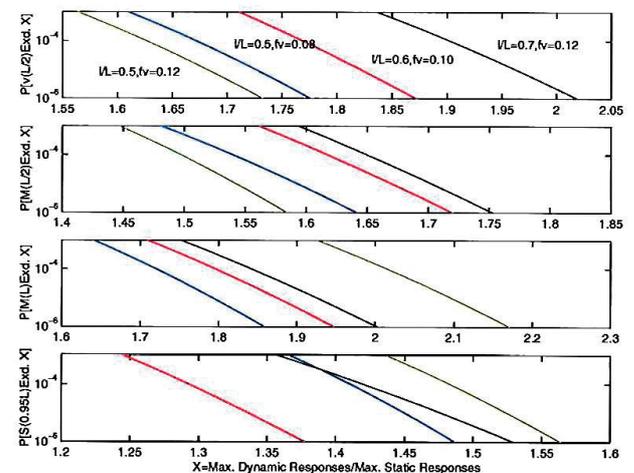
สมการที่ (9) และ (10) สามารถประมาณค่าความน่าจะเป็นที่ค่าตอบสนองโครงสร้างจะเกินเกณฑ์ที่กำหนด ผลตอบสนองของคานสองช่วงที่มีการเคลื่อนที่ผ่านโดยแบบจำลองยานพาหนะที่มี 10 ดีกรีความเป็นอิสระ รูปที่ 7 แสดงค่าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาของค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน อัตราการข้ามผ่านเฉลี่ยและความน่าจะเป็นที่จะเกินค่า DAF ที่เท่ากับ 1.6 สำหรับแรงดัดที่จุดรองรับด้านใน

รูปที่ 8 แสดงการคำนวณจาก 1 ชุดตัวแปร โดยชุดตัวแปรนี้อาจไม่ได้ทำให้เกิดค่า DAF สูงสุดสำหรับทุกผลตอบสนอง สำหรับระบบคู่ควบที่ใช้ในงานนี้ พิจารณาโมเมนต์ดัดที่จุดรองรับด้านในของคานทางวิ่งสองช่วง พบว่าค่าแฟกเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์ที่เกิดขึ้นสูง เกิดขึ้นสอดคล้องกับความน่าจะเป็นที่ผลตอบสนองนี้จะเกินเกณฑ์กำหนด ในช่วงจาก 10^{-3} ถึง 10^{-6} (1:1,000 ถึง 1:1,000,000) รูปที่ 8 อาจนำมาใช้ในการกำหนดค่าแฟกเตอร์

กำลังขยายของผลตอบสนองโครงสร้างที่ใช้ในการออกแบบ เช่น สมมติกรณี $\ell / L = 0.5, f_v = 0.08$ และต้องการออกแบบที่ความน่าจะเป็นที่ผลตอบสนองจะเกินเกณฑ์ที่กำหนดเท่ากับ 1:1,000 จากรูปที่ 8 ในการออกแบบทางวิ่ง ผู้ออกแบบสามารถเลือกใช้แฟกเตอร์กำลังขยายเท่ากับ 1.48 สำหรับ $M(0.5L)$, 1.64 สำหรับ $M(L)$ และ 1.37 สำหรับ $S(0.95L)$ นอกจากนี้จากการศึกษาพบว่า หากมีความขรุขระน้อย สามารถลดค่า DAF ที่สอดคล้องกับความน่าจะเป็นที่ผลตอบสนองจะเกินเกณฑ์ที่กำหนดได้อย่างชัดเจน นั่นคือ ความขรุขระเข้าใกล้ศูนย์ ค่าแฟกเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์จะมีค่าเป็นค่าที่แน่นอน (Deterministic) และกราฟความน่าจะเป็นที่ผลตอบสนองจะเกินเกณฑ์ที่กำหนดในรูปที่ 7 จะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันขั้นบันได (Heaviside Step Function)

9. สรุปผลวิจัย

จากค่าผลตอบสนองโครงสร้างของระบบคู่ควบโครงสร้างกับยานพาหนะที่คำนวณด้วยวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลเวลาการสั่นแบบสุ่ม (Random Vibration Time History Analysis) จะบอกได้ว่าระดับความขรุขระที่ยอมให้เกิดขึ้นในระบบ เช่น ความขรุขระจากผิวรางและผิวล้อ หรือการหลุดตัวที่ฐานรองรับของโครงสร้างทางวิ่งนั้นมีได้มากน้อยแค่ไหน ซึ่งจะเป็นประโยชน์มากกับการบำรุงรักษาระบบ อีกทั้งยังทราบค่าทางสถิติ เช่น ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของผลตอบสนองโครงสร้างรองรับยานพาหนะความเร็วสูง ที่สอดคล้องกับความน่าจะเป็นที่ผลตอบสนองจะเกินเกณฑ์กำหนดในทั้งส่วนของยานพาหนะและโครงสร้าง



รูปที่ 8 ความน่าจะเป็นของผลตอบสนองโครงสร้างที่จะเกินเกณฑ์แฟกเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์ที่กำหนด

ตัวแปรสำคัญของระบบ เช่น อัตราส่วนระยะเพลาคต่อช่วงคาน (Wheelbase to span ratio, l/L) และอัตราส่วนการข้าม (Passage Rate) $2\pi f_v = (V/L)/f_1$ และการรวมกันของค่า l/L และ $2\pi f_v = (V/L)/f_1$ ซึ่งกลายเป็นอัตราการมาถึง (Arrival Rate) $2\pi f_a = (V/l)/f_1$ อาจทำให้เกิดการสั่นพ้อง (Resonance) กับความถี่โครงสร้างในโหมดที่ 1 และ 2 หรือโหมดอื่นๆได้ ซึ่งเมื่อเกิดการสั่นพ้องขึ้นแล้วค่าเฉลี่ยที่สูงมีโอกาสจะเกิดขึ้นกับผลตอบสนองใดๆของโครงสร้างที่สอดคล้องกับความถี่โหมดนั้นๆ

การรวมกันของตัวแปรในระบบที่ต่างกันอาจทำให้เกิด แพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์ที่สูงกับผลตอบสนองโครงสร้างที่ต่างกันออกไป สำหรับกรณีคานทางวิ่งสองช่วง โมเมนต์ดัดที่จุดรองรับด้านในอาจเป็นผลตอบสนองที่ต้องพิจารณาเป็นพิเศษ เนื่องจากมีค่าแพคเตอร์กำลังขยายพลศาสตร์สูง เมื่อเทียบกับผลตอบสนองโครงสร้างอื่นๆ

10. เอกสารอ้างอิง

- [1] Biggs, J.M. 1964. Introduction to Structural Dynamics.
- [2] Seetapan, P., Maiwattana, A., & Chucheeepsakul, S. (2005). Dynamic responses of a two-span beam subjected to 2DOF sprung vehicles. การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติครั้งที่ 10, STR 52-57
- [3] Dodds, C.J. and Robson, J.D., The description of road surface roughness. J. of Sound and Vibration, 31(1973): pp175-183.
- [4] Harrison, R.F. & Hammond, J.K. 1986. Analysis of the nonstationary response of vehicles with multiple wheels., J. of Dynamic Systems, Measurement and Control 108:69-73.
- [5] Nigam, N.C. and Narayanan, S 1994. Applications of Random Vibrations. Springer-Verlag.
- [6] Fryba, L., 1972. Vibration of solid and structures under moving loads. Groningen : Noordhoff International Publishing.
- [7] Rice, S.O. 1954. Mathematical analysis of random noise. In Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, N. Wax, Ed. Dover.

10. ชีวประวัติ



นายจักรกฤษณ์ จิตรคำคุณ
นิสิตปริญญาโท สาขาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร
ประวัติการศึกษา :
ปริญญาตรี สาขาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร



ดร.ทองศักดิ์ สุทธสุประดิษฐ์
อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร



ดร.รัฐภูมิ ปาวิชาตปรีชา
อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร



ดร.ปฤษฎาศว์ ศีตะปันย์
อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร