

การลดสัญญาณรบกวนด้วยตัวกรองดิจิทัลแบบเรียบชนิดเอ็กซ์โปเนนเชียล

Noise Reduction by Using an Exponential Smoothing Digital Filter

พศุภพงษ์ เรืองฤทธิ์ และ สุชาติ เข้มเม่น*

ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อำเภอเมืองพิษณุโลก 65000

E-mail: sucharty@nu.ac.th

บทคัดย่อ - บทความวิจัยนี้ได้พัฒนาตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โปเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไขและไม่มีเงื่อนไขกำจัดสัญญาณรบกวนสีขาวที่ได้ประสานรวมเข้ากับสัญญาณขาเข้าของระบบไฟฟ้าและสัญญาณแรงดันขาออกของไดชาร์จภายในรถยนต์ ตัวกรองที่นำเสนอทั้งสองชนิดนี้เป็นหนึ่งชนิดของตัวกรองแบบเชิงเส้นไม่วนซ้ำ เมื่อป้อนลำดับข้อมูลขาเข้าต่อตัวกรองทั้งสองนี้ จะผลิตลำดับข้อมูลที่เรียกออกมาให้โดยปราศจากสัญญาณรบกวน จากผลการทดลองในกรณีอัตราส่วนกำลังของสัญญาณต่อกำลังของสัญญาณรบกวนมีค่าเท่ากับ 2 เดซิเบลโดยใช้สัญญาณขาเข้าที่มีความถี่ 50 เฮิรตซ์ และสัญญาณแรงดันของไดชาร์จที่มีความถี่ตั้งแต่ 50 เฮิรตซ์ถึง 300 เฮิรตซ์ พบว่า ตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โปเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไขและมีเงื่อนไขให้ประสิทธิภาพของการลดสัญญาณรบกวนได้ดีกว่าตัวกรองที่นำมาเปรียบเทียบกับสองชนิดคือตัวกรองมัธยฐานและตัวกรองค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ นอกจากนี้ ตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โปเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไขให้ประสิทธิภาพสูงกว่าตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โปเนนเชียลชนิดมีเงื่อนไขต่อการลดสัญญาณรบกวนในสัญญาณขาเข้าและให้ประสิทธิภาพเท่ากับตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โปเนนเชียลชนิดมีเงื่อนไขต่อในสัญญาณแรงดันของไดชาร์จ

คำสำคัญ - ตัวกรองดิจิทัลแบบเรียบชนิดเอกซ์โปเนนเชียล การลดสัญญาณรบกวน

Abstract- In this paper, unconstrained and constrained exponential smoothing filters are developed to remove Gaussian noise either from sinusoidal signals of the electrical

power system or from output voltage signals of the automobile dycharge. The two proposed filters being a kind of *linear non-recursive filters* are used to generate the elements of the smoothed response data for a given input data sequence. From the experimental results in case of signal-to-noise ratio 2 dB, the unconstrained exponential smoothing filter to both the given noise-corrupted sinusoidal signal with its frequency of 50 Hz and the given noise-corrupted output voltage discharge signal with its frequency varying from 50 Hz to 300 Hz has offered good efficiency of the noise reduction when compared with the two following filters: the median smoothing filter and the moving average smoothing filter. In addition, the unconstrained exponential smoothing filter has better efficiency than the constrained exponential smoothing filter to the given noise-corrupted sinusoidal signal, and has same efficiency as that to the given noise-corrupted output voltage discharge signal.

Keywords: Exponential Smoothing Filter, Noise Reduction

1. บทนำ

บริษัท พีอี เทคโนโลยี จำกัดซึ่งตั้งอยู่อำเภอเมืองพิษณุโลก ผลิตชิ้นส่วนและอุปกรณ์ไฟฟ้าภายในรถยนต์ และได้มีความต้องการลดสัญญาณรบกวนซึ่งได้ประสานรวมเข้ากับสัญญาณแรงดันของระบบการตรวจสอบคุณภาพไดชาร์จเพื่อลดความผิดพลาด

ของรูปแบบสัญญาณแรงดันที่ป้อนให้กับเบตเตอร์ระหว่างการทดสอบคุณภาพไคซาร์จก่อนส่งมอบให้กับลูกค้า ทำให้พนักงานที่ดูรูปแบบสัญญาณแรงดันที่ใช้ทดสอบคุณภาพไคซาร์จนจอกอมพิวเตอร์บันทึกข้อมูลผิดพลาด อาจมีผลต่อความเชื่อมั่นของลูกค้าที่มีต่อผลิตภัณฑ์ของบริษัทฯ ได้ในอนาคต เมื่อคณะผู้วิจัยรับทราบปัญหา โจทย์ดังกล่าวข้างต้นจากผู้ประกอบการ จึงได้นำเสนอแนวทางแก้ไขด้วยการออกแบบและพัฒนาตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลในการลดสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในสัญญาณที่ใช้ทดสอบคุณภาพไคซาร์ที่แสดงผลไว้บนจอคอมพิวเตอร์พร้อมกับเปรียบเทียบผลที่ได้รับกับตัวกรองมัธยฐาน และตัวกรองค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ [1]

แนวทางการดำเนินงานวิจัย เริ่มต้นงานวิจัยด้วยการค้นคว้าหาตัวกรองแบบเรียบที่เกี่ยวข้องซึ่งใช้สำหรับการลดสัญญาณรบกวนในสัญญาณขาเข้าของระบบไฟฟ้าและแรงดันของไคซาร์จพร้อมทั้งออกแบบ พัฒนา ทดสอบและวิเคราะห์ประสิทธิภาพตัวกรองเหล่านี้

2. การวิเคราะห์ตัวกรองแบบเรียบ

ในปัจจุบันนี้ การประยุกต์ของตัวกรองแบบเรียบมีมากมาย แต่ในบทความวิจัยนี้จะกล่าวถึงการใช้ตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลที่ได้พัฒนาขึ้นโดยเปรียบเทียบกับการใช้ตัวกรองแบบเรียบมัธยฐาน [1] และตัวกรองแบบเรียบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ได้ [1] ในการลดสัญญาณรบกวนซึ่งได้ประสานรวมเข้ากับสัญญาณแรงดันถูกสุ่มด้วยจำนวน N ตัวอย่างข้อมูลภายในช่วงเวลา T_s วินาทีต่อข้อมูล ทำให้เกิดลำดับข้อมูลขาเข้า $\{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$ ซึ่งมีข้อมูลขาเข้า $x[n]$ ประกอบด้วยผลรวมของข้อมูลกับข้อมูลรบกวน ดังนี้

$$x[n] = s[n] + w[n] \quad (1)$$

โดยที่ $s[n]$ คือลำดับข้อมูลถูกสุ่มมาจากสัญญาณแรงดันที่ไม่มีสัญญาณรบกวนเจือปนและมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ_s^2 ส่วน $w[n]$ คือลำดับข้อมูลรบกวนถูกสุ่มมาจากสัญญาณรบกวนสีขาว [3] ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และมีค่าความแปรปรวน σ_w^2 ในงานวิจัยนี้มีการวัดปริมาณกำลังของสัญญาณรบกวนที่ได้ประสานรวมเข้ากับสัญญาณแรงดันในรูปแบบอัตราส่วน

ระหว่างกำลังสัญญาณแรงดันต่อกำลังสัญญาณรบกวน (Signal-to-Noise Ratio) [4] ซึ่งนิยามว่า

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} \right) \quad (2)$$

จะเห็นได้ว่าถ้า SNR ในหน่วยเดซิเบลมีค่าลดลงแล้วกำลังสัญญาณรบกวนที่ได้ประสานรวมเข้ากับสัญญาณแรงดันจะมีปริมาณเพิ่มขึ้น ในทางตรงกันข้ามหาก SNR มีค่าเข้าสู่อันต์มีความหมายว่าสัญญาณแรงดันไม่ได้ประสานรวมเข้ากับสัญญาณรบกวน

2.1 ตัวกรองแบบเรียบชนิดมัธยฐาน

โดยทั่วไป เพื่อความสะดวกและรวดเร็วสำหรับการลดสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ที่ได้ประสานรวมเข้ากับสัญญาณแรงดัน มีการประมาณค่าข้อมูลสัญญาณแรงดัน $s[n]$ จากการป้อนลำดับข้อมูลขาเข้า $x[n]$ ในสมการ (1) ผ่านตัวกรองแบบเรียบชนิดมัธยฐาน ทำให้เกิดผลตอบลัพธ์ลำดับข้อมูลขาออก [1] จะได้ว่า

$$\hat{s}[n] = \text{median}\{x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-q]\} \quad (3)$$

โดยที่ $\text{median}(\bullet)$ คือสัญญาณมัธยฐานที่ให้ค่าของข้อมูลที่อยู่ตรงกึ่งกลางกลุ่ม q ข้อมูล $\{x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-q]\}$ เมื่อข้อมูลเรียงไว้ตามลำดับ และ $\hat{s}[n]$ คือข้อมูลประมาณค่าสัญญาณแรงดันสำหรับค่าดัชนี n ตั้งแต่ q ถึง $N-1$

2.2 ตัวกรองแบบเรียบชนิดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่

ถ้านำลำดับข้อมูลขาเข้า $x[n]$ ในสมการ (1) ป้อนเข้าตัวกรองแบบเรียบชนิดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ [1] จะได้รับการประมาณค่าลำดับข้อมูลสัญญาณแรงดันซึ่งมีค่าของข้อมูลเท่ากับ

$$\hat{s}[n] = (x[n-1] + x[n-2] + \dots + x[n-q]) / q \quad (4)$$

จะเห็นว่า $\hat{s}[n]$ เป็นข้อมูลประมาณค่าสัญญาณแรงดันซึ่งได้รับมาจากการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ q ข้อมูล $\{x[n-1], \dots, x[n-q]\}$ สำหรับค่าดัชนี n ตั้งแต่ q ถึง $N-1$

ตามการศึกษาคุณสมบัติของตัวกรองแบบเรียบชนิดมัลติฐานและตัวกรองแบบเรียบชนิดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ [1] และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการลดสัญญาณรบกวน [5, 10 - 14] จะพบว่าตัวกรองแบบเรียบชนิดมัลติฐานสามารถลดสัญญาณรบกวนอิมพัลส์ได้ดีในลักษณะข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงแบบฉับพลัน ณ เวลาหนึ่งๆ เท่านั้น แต่ไม่สามารถลดสัญญาณรบกวนที่เจือปนเข้ากับข้อมูลที่มีลักษณะค่อยๆเปลี่ยนแปลงหรือเปลี่ยนแปลงแบบรวดเร็ว ในขณะที่ตัวกรองแบบเรียบชนิดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สามารถลดสัญญาณรบกวนที่ได้ประสานรวมเข้ากับข้อมูลที่มีลักษณะค่อยๆเปลี่ยนแปลงได้ดีแต่มีกักจัดข้อมูลที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบรวดเร็ว นอกจากนี้ตัวกรองแบบค่าเฉลี่ยยังให้ความล่าช้าของข้อมูลออกมาด้วย จากปัญหาการลดสัญญาณรบกวนของตัวกรองทั้งสองที่ได้กล่าวมาจึงได้นำเสนอและพัฒนาตัวกรองแบบเรียบชนิดเอกซ์โพเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไขและพัฒนาตัวกรองแบบเรียบชนิดเอกซ์โพเนนเชียลชนิดมีเงื่อนไข ซึ่งคำว่า “ไม่มีเงื่อนไขและมีเงื่อนไข” ที่ใช้ในที่นี่จะกล่าวถึงในหัวข้อย่อยต่อไปเพื่อลดสัญญาณรบกวนที่ได้ประสานรวมเข้ากับข้อมูลของสัญญาณแรงดัน

2.3 ตัวกรองแบบเรียบชนิดเอกซ์โพเนนเชียล

พิจารณาตัวกรองแบบเรียบชนิดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ในความสัมพัทธ์ (3) จะเห็นได้ว่าตัวกรองชนิดนี้มีจำนวนสัมประสิทธิ์ของตัวกรองเท่ากับ q พร้อมทั้งมีค่าสัมประสิทธิ์เท่ากับ $1/q$ ทุกตัว และมีผลรวมของค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดเท่ากับ 1 จากแนวคิดที่ได้กล่าวมานี้ เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ $1/q$ ด้วยค่าพารามิเตอร์ของสัมประสิทธิ์ใดๆ ทำให้การประมาณค่าข้อมูลสัญญาณแรงดันที่ได้รับเป็นผลรวมเชิงเส้นของลำดับข้อมูลขาเข้า จะได้ว่า

$$\hat{s}[n] = b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_q x[n-q] \quad (5)$$

เมื่อมีการประมาณค่าข้อมูลสัญญาณแรงดันเท่ากับข้อมูลขาเข้า นั่นคือแทนค่าของข้อมูล $\hat{s}[n]$ ด้วยค่าของข้อมูลขาเข้า $x[n]$ จะได้ว่า

$$x[n] - b_1 x[n-1] - b_2 x[n-2] - \dots - b_q x[n-q] = 0 \quad (6)$$

จากเอกสารอ้างอิง [7] จะพบว่า สมการ (6) เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบเนื้อเดียวและให้ผลตอบกลับของความสัมพัทธ์นี้เป็นลำดับข้อมูลเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งเรียกตัวกรองชนิดนี้ว่า “ตัวกรองแบบเรียบชนิดเอกซ์โพเนนเชียล” ในบทความวิจัยนี้ จะนำเสนอ 2 วิธีสำหรับการเลือกค่าของสัมประสิทธิ์ตัวกรองแบบเรียบชนิดเอกซ์โพเนนเชียลตามความสัมพันธ์ (5)

ในวิธีที่หนึ่งสำหรับการเลือกค่าของสัมประสิทธิ์ตัวกรองในความสัมพัทธ์ (5) เริ่มด้วยการหาค่าสัมประสิทธิ์ b_k อยู่ในเซตของเลขจำนวนจริง R และผลรวมของค่าสัมประสิทธิ์ b_k ทั้งหมดเท่ากับ 1 เพื่อผลรวมกำลังสองความผิดพลาดระหว่างลำดับข้อมูลขาเข้า $\{x[n]\}$ กับลำดับข้อมูล $\{\hat{s}[n]\}$ ที่ได้รับการประมาณค่าข้อมูลสัญญาณแรงดันสำหรับทุกค่าดัชนี n ตั้งแต่ q ถึง $N-1$ ซึ่งเขียนในรูปแบบฟังก์ชันวัตถุประสงค์ g คือ

$$g(b_1, b_2, \dots, b_q) = \sum_{n=q}^{N-1} \left(x[n] - \sum_{k=1}^q b_k x[n-k] \right)^2 \quad (7)$$

มีค่าต่ำที่สุด นำไปสู่ปัญหาโจทย์การหาค่าที่เหมาะสมแบบมีเงื่อนไข

$$\min_{(b_k \in R) \wedge \left(1 - \sum_{k=1}^q b_k = 0\right)} g(b_1, b_2, \dots, b_q) = g(b_1^o, b_2^o, \dots, b_q^o) \quad (8)$$

จะเห็นได้ว่า จะใช้ความสัมพันธ์ (8) หาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง $b_1^o, b_2^o, \dots, b_q^o$ ได้รับเลือกจากวิธีที่หนึ่ง ในการหาคำตอบของปัญหาโจทย์ในสมการ (8) เริ่มด้วยนำค่าข้อมูล $x[n]$ และ $\hat{s}[n]$ สำหรับทุกค่าดัชนี n ตั้งแต่ q ถึง $N-1$ แทนลงในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ g ในสมการ (7) พร้อมทั้งเขียนปัญหาโจทย์ใน (8) ใหม่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ว่า

$$\min_{\substack{\underline{b} \in R^{q \times 1} \\ \lambda \in R}} f(\underline{b}, \lambda) = f(\underline{b}^o, \lambda^o) \quad (9)$$

เมื่อ $f(\underline{b}, \lambda)$ เป็นฟังก์ชันเสริมซึ่งนิยามว่า

$$f(\underline{b}, \lambda) = (\underline{x} - A\underline{b})^T (\underline{x} - A\underline{b}) + 2\lambda(1 - [\mathbf{1}]_{1 \times q} \underline{b}) \quad (10)$$

โดยที่ \underline{x} , \underline{b} และ \underline{b}^o เป็นเวกเตอร์ข้อมูล เวกเตอร์พารามิเตอร์ของสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง และเวกเตอร์ซึ่งมีสมาชิกเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่ได้รับเลือกจากวิธีที่หนึ่งตามลำดับซึ่งมีนิยามว่า

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x[q] \\ x[q+1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}_{(N-q) \times 1}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix}_{q \times 1} \quad \text{และ} \quad \underline{b}^o = \begin{bmatrix} b_1^o \\ b_2^o \\ \vdots \\ b_q^o \end{bmatrix}_{q \times 1} \quad (11)$$

ตามลำดับ และ A เป็นเมทริกซ์ข้อมูล ซึ่งนิยามว่า

$$A = \begin{bmatrix} x[q-1] & x[q-2] & \cdots & x[0] \\ x[q] & x[q-1] & \cdots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-3] & \cdots & x[N-q-1] \end{bmatrix}_{(N-q) \times q} \quad (12)$$

ส่วน $[\mathbf{1}]_{1 \times q}$ คือเวกเตอร์แนวราบขนาด $1 \times q$ ที่มีค่าสมาชิกเท่ากับหนึ่ง ในขณะที่ λ และ λ^o คือตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multipliers) ของฟังก์ชันช่วยในสมการ (10) และตัวคูณลากรองจ์ที่เหมาะสมมาจากคำตอบของปัญหาโจทย์ (9)

เนื่องจาก $f(\underline{b}, \lambda)$ ในความสัมพันธ์ (10) เป็นฟังก์ชันคอนเวก (Convex function) และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง [6] ดังนั้นค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(\underline{b}, \lambda)$ จะเท่ากับค่าต่ำสุดเฉพาะแห่งของฟังก์ชัน $f(\underline{b}, \lambda)$ ด้วย ในการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(\underline{b}, \lambda)$ เพื่อความสะดวกจึงต้องหาค่าของเวกเตอร์วิกฤต \underline{b}^o และตัวคูณลากรองจ์ λ^o ที่ทำให้ค่าของเวกเตอร์เกรเดียน $\nabla_{\underline{b}} f(\underline{b}, \lambda) = \mathbf{0}$ และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{\partial f(\underline{b}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$ จะได้ว่า

$$(A^T A) \underline{b}^o = A^T \underline{x} + \lambda^o [\mathbf{1}]_{q \times 1} \quad (13)$$

และ

$$[\mathbf{1}]_{1 \times q} \underline{b}^o = 1 \quad (14)$$

จะเห็นได้ว่า $(A^T A)$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $q \times q$ ที่มีคุณสมบัติสมมาตร ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส $(A^T A)$ ซึ่งมีไข่ออกฐานแล้วจะสามารถหาอินเวอร์สการคูณเมทริกซ์ได้เสมอ แต่หากเมทริกซ์จัตุรัส $(A^T A)$ มีคุณสมบัติเอกฐาน สามารถหาอินเวอร์สการคูณเมทริกซ์ได้มาจากการประมาณค่าเมทริกซ์ A ในรูปแบบของเอสวีดี (Singular value decomposition) [7] เมื่อนำอินเวอร์สการคูณเมทริกซ์ของ $(A^T A)$ คูณเข้าทางด้านหน้าของสมการ (13) ต่อมานำเมทริกซ์ $[\mathbf{1}]_{1 \times q}$ พร้อมทั้งใช้เงื่อนไขใน (14) จะได้ตัวคูณลากรองจ์ที่เหมาะสมตามความสัมพันธ์ (15) และเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ที่เหมาะสมตามความสัมพันธ์ (16)

$$\lambda^o = \frac{1 - [\mathbf{1}]_{1 \times q} (A^T A)^{-1} A^T \underline{x}}{[\mathbf{1}]_{1 \times q} (A^T A)^{-1} [\mathbf{1}]_{q \times 1}} \quad (15)$$

และ

$$\underline{b}^o = (A^T A)^{-1} (A^T \underline{x} + \lambda^o [\mathbf{1}]_{q \times 1}) \quad (16)$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าสเกลาร์ตัวคูณลากรองจ์ที่เหมาะสมใน (15) ลงในความสัมพันธ์ (16) ทำให้ได้เวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวกรองแบบเรียบชนิดเอกซ์โพเนนเชียลที่เหมาะสมสำหรับวิธีที่หนึ่งซึ่งเรียกว่า “ตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลชนิดมีเงื่อนไข (Constrained exponential smoothing filter)”

ส่วนวิธีที่สองสำหรับการเลือกค่าของสัมประสิทธิ์ตัวกรองในความสัมพันธ์ (5) เริ่มด้วยการหาค่าสัมประสิทธิ์ b_1, b_2, \dots, b_q เพื่อที่ทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ g ในสมการ (7) มีค่าต่ำสุดโดยไม่มีเงื่อนไขผลรวมของค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดเท่ากับหนึ่ง นำไปสู่ปัญหาโจทย์การหาค่าที่เหมาะสมแบบไม่มีเงื่อนไข ดังนี้

$$\min_{\underline{b} \in R^{q \times 1}} h(\underline{b}) = h(\underline{b}^o) \quad (17)$$

เมื่อ $h(\underline{b})$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกและฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งมีนิยามว่า

$$h(\underline{b}) = (\underline{x} - A\underline{b})^T (\underline{x} - A\underline{b}) \quad (18)$$

โดยที่ \underline{x} และ \underline{b} คือเวกเตอร์ข้อมูล และเวกเตอร์พารามิเตอร์ของสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่มีนิยามตาม (11) ตามลำดับ ในขณะที่ A คือเมทริกซ์ข้อมูลที่มีนิยามตาม (12) เช่นกัน ในการหาค่าค่าสุดของฟังก์ชัน $h(\underline{b})$ เพื่อความสะดวกจึงต้องหาค่าของเวกเตอร์วิกฤต \underline{b}^o ที่ทำให้ค่าของเวกเตอร์เกรเดียน $\nabla_{\underline{b}}h(\underline{b})=0$ ก่อน จะได้เวกเตอร์วิกฤต \underline{b}^o เป็นคำตอบของสมการปกติ (Normal equations) [8]

$$(A^T A)\underline{b}^o = A^T \underline{x} \quad (19)$$

ในการทำงานเดียวกัน ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส $(A^T A)$ ซึ่งมีมิติ $q \times q$ และมีเอกฐานแล้วนำอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ $(A^T A)$ เข้าด้านหน้าทั้งสองข้างของสมการ (19) จะได้คำตอบที่เหมาะสมของเวกเตอร์วิกฤต \underline{b}^o ดังนี้

$$\underline{b}^o = (A^T A)^{-1} (A^T \underline{x}) \quad (20)$$

แต่ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส $(A^T A)$ ซึ่งมีเอกฐานแล้วแทนเมทริกซ์ $(A^T A)^{-1} A^T$ ด้วย $\text{pinv}(A)$ ซึ่งเป็นอินเวอร์สเทียมการคูณของเมทริกซ์ A ทำให้ได้คำตอบที่เหมาะสมของเวกเตอร์วิกฤต \underline{b}^o ดังนี้

$$\underline{b}^o = \text{pinv}(A)\underline{x} \quad (21)$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ (20) และ (21) เป็นคำตอบของเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวกรองแบบเรียบชนิดเอกซ์โพเนนเชียลที่เหมาะสมสำหรับวิธีที่สองซึ่งเรียกตัวกรองนี้ว่า “ตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไข (Unconstrained exponential smoothing filter)”

3. ตัวชี้วัดประสิทธิภาพของตัวกรองแบบเรียบ

ในบทความวิจัยนี้ได้มีการทดสอบประสิทธิภาพของตัวกรองแบบเรียบที่ได้พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับตัวกรองแบบเรียบชนิดมัธยฐานและตัวกรองแบบเรียบชนิดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ในรูปแบบอัตราส่วนผลรวมกำลังสองค่าความผิดพลาดระหว่าง

ข้อมูลสัญญาณแรงดัน $s[n]$ กับข้อมูล $\hat{s}[n]$ ที่ได้รับมาจากการประมาณค่าข้อมูลสัญญาณแรงดันของตัวกรองแบบเรียบทุกชนิดกับผลรวมกำลังสองค่าข้อมูล $s[n]$ สำหรับทุกค่า n ตั้งแต่ 0 ถึง $N-1$ ซึ่งตัวชี้วัดในการหาประสิทธิภาพของตัวกรองแบบเรียบนี้เรียกว่า “โร (rho)” คือ

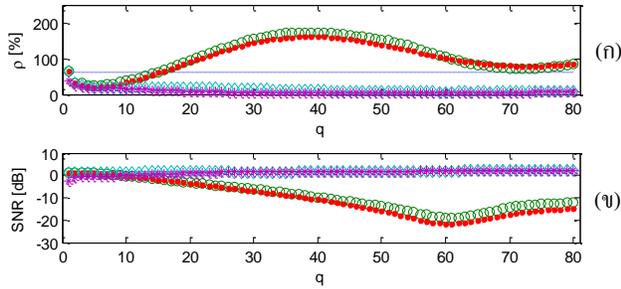
$$\rho = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (s[n] - \hat{s}[n])^2}{\sum_{n=0}^{N-1} (s[n])^2} \times 100 \quad (22)$$

ถ้าตัวชี้วัด ρ ในหน่วย % มีค่าลดลงแล้วค่าความผิดพลาดในการประมาณค่าข้อมูลสัญญาณแรงดันลดลง หากตัวชี้วัด ρ มีค่าลดลงจนเข้าสู่ศูนย์ จะไม่มีความผิดพลาดในการประมาณค่าข้อมูลสัญญาณแรงดัน แต่ในทางตรงกันข้ามถ้าตัวชี้วัด ρ มีค่าเพิ่มขึ้นแล้วค่าความผิดพลาดในการประมาณค่าข้อมูลสัญญาณแรงดันจะเพิ่มขึ้น

4. ผลการทดลอง

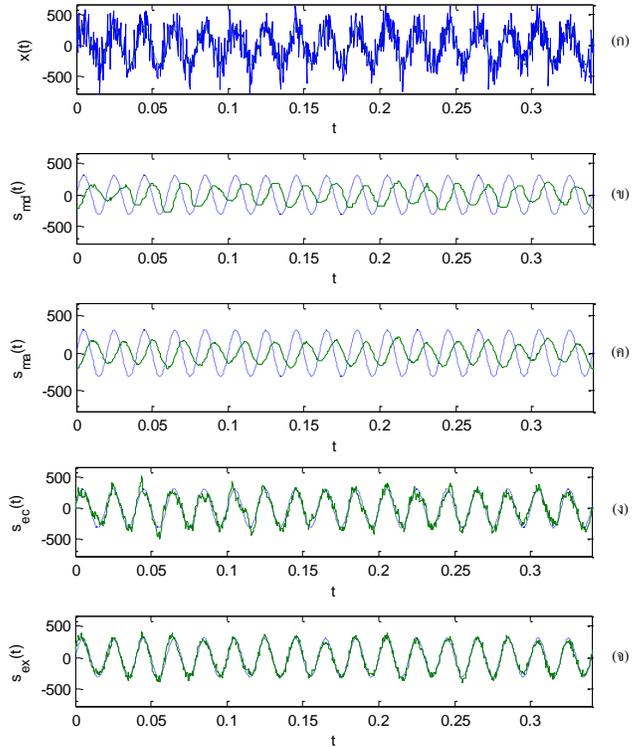
ในการทดสอบการเปรียบเทียบตัวกรองแบบเรียบซึ่งใช้ลดสัญญาณรบกวนสีขาวที่ได้ประสานรวมเข้ากับสัญญาณแรงดันของทั้งระบบไฟฟ้าและระบบไดซาร์จด้วยค่าของ $SNR = 2$ dB นั้น ดำเนินการสุ่มสัญญาณแรงดันด้วยอัตราการสุ่มตัวอย่าง 3,000 ข้อมูลต่อวินาที จะได้ลำดับข้อมูลขาเข้าจำนวน 1,024 ข้อมูลเพื่อใช้สำหรับป้อนเข้าตัวกรองแบบเรียบชนิดเอกซ์โพเนนเชียลที่ได้พัฒนาขึ้นทั้ง 2 วิธีพร้อมกับตัวกรองแบบเรียบมัธยฐานและตัวกรองแบบเรียบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ด้วยค่าความยาวของตัวกรอง q ตั้งแต่ 1 ถึง 80

ในระบบไฟฟ้า จะทดสอบตัวกรองแบบเรียบทั้ง 4 ชนิดโดยใช้ลำดับข้อมูลขาเข้าที่ได้รับมาจากการสุ่มสัญญาณขาเข้าซึ่งมีค่าขนาดสูงสุดเท่ากับ $220\sqrt{2}$ โวลต์และมีความถี่ที่ใช้ทดสอบ 50 เฮิร์ตซ์ เมื่อป้อนชุดของลำดับข้อมูลขาเข้าที่ทดสอบนี้ผ่านเข้ากับตัวกรองแบบเรียบที่ใช้ทดสอบทั้ง 4 ชนิด จะได้ผลการลดสัญญาณรบกวนแต่ละตัวกรองที่มีขนาดความยาว q ตั้งแต่ 1 ถึง 80 ในรูปแบบตัวชี้วัด ρ ดังรูป 1 (ก) และค่าของ SNR ดังรูป 1 (ข)



รูป 1 เปรียบเทียบประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนของตัวกรองแบบเรียบทั้งสองชนิด คือ มัธยฐาน (○) ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (●) เอกซ์โพเนนเชียลแบบมีเงื่อนไข (◇) และเอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไข (◊) ต่อสัญญาณแรงดันขาเข้าที่มีความถี่ 50 เฮิรตซ์ ในรูปแบบ (ก) ค่าของตัวชี้วัด ρ หน่วย % และ (ข) ค่าของตัวชี้วัด SNR หน่วยเดซิเบลกับค่าความยาว q ของตัวกรอง

จากผลการทดลองการลดสัญญาณรบกวนในสัญญาณขาเข้าที่มีความถี่ 50 เฮิรตซ์ด้วยค่าของ $\rho=63.1\%$ และ $SNR=2$ dB ดังรูป 1 กับรูป 2 จะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มความยาวของตัวกรอง q ตั้งแต่ 1 ถึง 80 แล้วตัวชี้วัด ρ ของตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลทั้งสองชนิดมีค่าลดลงและต่ำกว่า 63.1% (เส้นประในรูป 1) ส่วนค่าของ SNR คู่เข้าสู่ 2 dB ในขณะที่ตัวชี้วัด ρ ของตัวกรองแบบเรียบมัธยฐานและค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ได้มีค่าเพิ่มขึ้นและสูงกว่า 63.1% ส่วนค่าของ SNR จะลดลงและมีค่าต่ำกว่า 2 dB เมื่อพิจารณาค่าต่ำสุดของตัวชี้วัด ρ พบว่ามีค่าเท่ากับ $\rho=4.99\%$ ของตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไขซึ่งสอดคล้องกับค่าของ $q=36$ หากพิจารณาลำดับข้อมูล (เส้นทึบในรูป 2) ที่ได้รับแต่ละตัวกรองสำหรับกรณี $q=36$ เปรียบเทียบกับลำดับข้อมูลขาเข้า (เส้นประในรูป 2) ที่ปราศจากสัญญาณรบกวน พบว่าลำดับข้อมูลขาออกจากตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไขให้ลำดับข้อมูลที่ใกล้เคียงที่สุดและให้ค่าตัวชี้วัด $\rho=4.99\%$ ต่ำที่สุดตามตาราง 1 จึงสรุปว่าตัวกรองชนิดเอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไขให้ประสิทธิภาพดีที่สุด

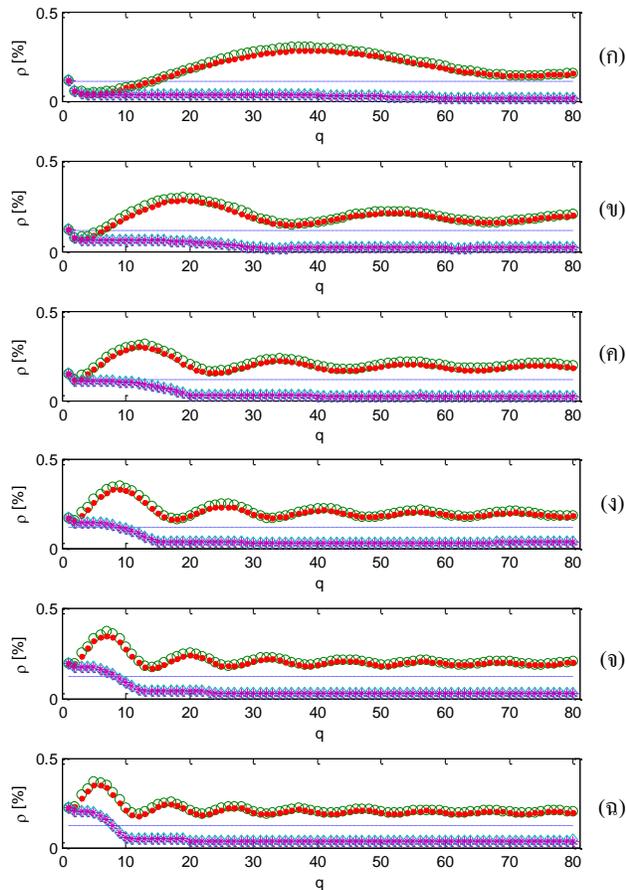


รูป 2 ผลลัพธ์ลำดับข้อมูลที่ได้รับจากตัวกรองในกรณี $q=36$ ต่อ ลำดับข้อมูลขาเข้าของสัญญาณขาเข้าที่มีความถี่ 50 เฮิรตซ์และ $SNR=2$ dB ดังภาพ (ก) และลำดับข้อมูลที่ได้รับจากตัวกรองแบบเรียบชนิด (ข) มัธยฐาน; (ค) ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่; (ง) เอกซ์โพเนนเชียลแบบมีเงื่อนไข และ (จ) เอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไข

ตาราง 1 ค่าของ ρ และ SNR ที่ได้รับจากตัวกรองในกรณี $q=36$ ต่อ ลำดับข้อมูลของสัญญาณขาเข้าที่ 50 เฮิรตซ์ของระบบไฟฟ้า

| ชนิดตัวกรอง ในกรณี $q=36$ | ρ [%] | SNR [เดซิเบล] |
|---------------------------------|---------------|--------------------|
| ลำดับข้อมูลขาเข้าไม่ผ่านตัวกรอง | 63.10 | 2.00 |
| มัธยฐาน | 172.02 | -8.20 |
| ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ | 159.30 | -9.13 |
| เอกซ์โพเนนเชียลแบบมีเงื่อนไข | 11.84 | 1.43 |
| เอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไข | 4.99 | 1.78 |

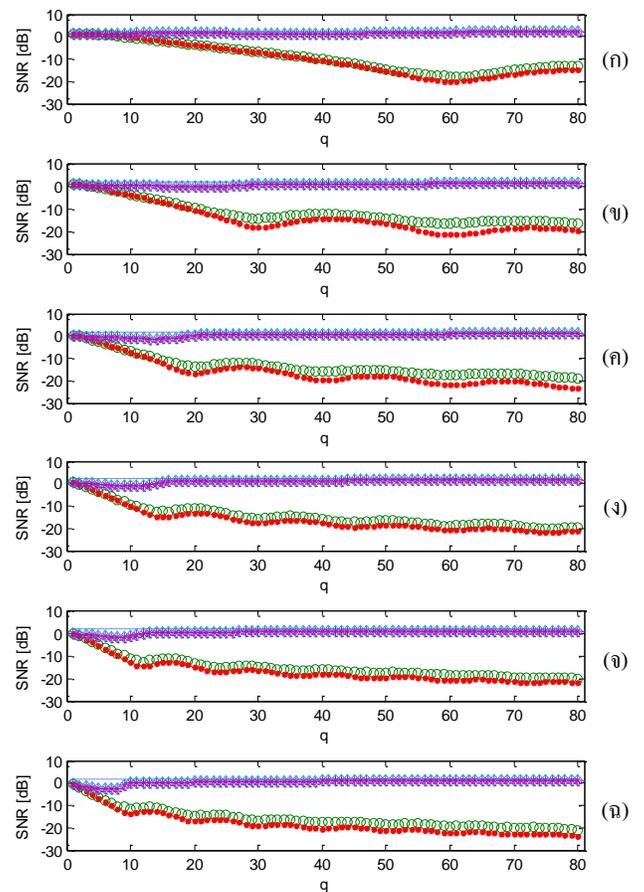
ในระบบไคซาร์จภายในรถยนต์ [9] จะทดสอบตัวกรองแบบเรียบทั้ง 4 ชนิดโดยการใช้ลำดับข้อมูลขาเข้าที่ได้รับมาจากการสุ่มสัญญาณแรงดันขาออกของไคซาร์จที่ผ่านวงจรเรียงกระแสสามเฟสซึ่งมีค่าขนาดสูงสุดเท่ากับ 12 โวลต์ และมีกระเพื่อม 6 ค่าความถี่ คือ 50, 100, 150, 200, 250 และ 300 เฮิรตซ์ เมื่อป้อนชุดของลำดับข้อมูลแรงดันทดสอบเหล่านี้เข้ากับตัวกรองแบบเรียบที่ใช้ทดสอบทั้ง 4 ชนิด ได้ผลการลดสัญญาณรบกวนแต่ละตัวกรองซึ่งมีค่าของตัวชี้วัด ρ และค่าของ SNR กับขนาดความยาวของตัวกรอง q ตั้งแต่ 1 ถึง 80 ดังรูป 3 และรูป 4 ตามลำดับ



รูป 3 เปรียบเทียบค่าของตัวชี้วัด ρ ในหน่วย % กับค่า q ของตัวกรองแบบเรียบทั้ง 4 ชนิด ชนิด คือ มัชฐาน (○) ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (●) เอกซ์โพเนนเชียลแบบมีเงื่อนไข (◇) และเอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไข (.) สำหรับกรณีทดสอบกับสัญญาณแรงดันของไคซาร์จที่มีความถี่เท่ากับ (ก) 50 เฮิรตซ์; (ข)

100 เฮิรตซ์; (ค) 150 เฮิรตซ์; (ง) 200 เฮิรตซ์; (จ) 250 เฮิรตซ์ และ (ฉ) 300 เฮิรตซ์

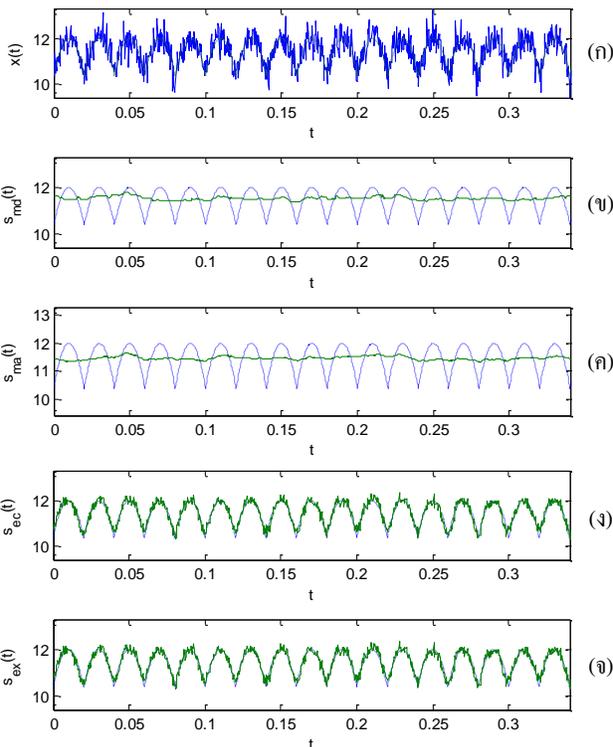
จากผลการทดลองการลดสัญญาณรบกวนในสัญญาณแรงดันของไคซาร์จที่มีความถี่ตั้งแต่ 50 เฮิรตซ์ถึง 300 เฮิรตซ์ด้วยค่าของ $\rho=0.11\%$ และ $SNR=2$ dB ดังรูป 3 กับรูป 4 จะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มความยาวของตัวกรอง q ตั้งแต่ 1 ถึง 80 แล้วตัวชี้วัด ρ ของตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลทั้งสองชนิดมีค่าลดลงและต่ำสุดที่ 0.02% ซึ่งต่ำกว่า 0.11% (เส้นประในรูป 3) ส่วนค่าของ SNR ลู่เข้าสู่ 2 dB ในขณะที่ตัวชี้วัด ρ ของตัวกรองแบบเรียบมัชฐานและค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ได้มีค่าเพิ่มขึ้นและสูงกว่า 0.11% ส่วนค่าของ SNR จะลดลงและมีค่าต่ำกว่า 2 dB



รูป 4 กราฟของ SNR ในหน่วยเดซิเบลกับค่า q ของตัวกรองแบบเรียบที่ใช้ทดสอบทั้ง 4 ชนิดคือ ชนิด คือ มัชฐาน (○) ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (●) เอกซ์โพเนนเชียลแบบมีเงื่อนไข (◇) และเอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไข (.) สำหรับกรณีทดสอบกับสัญญาณแรงดันของไคซาร์จที่มีความถี่เท่ากับ (ก) 50 เฮิรตซ์; (ข)

100 เฮอร์ตซ์; (ค) 150 เฮอร์ตซ์; (ง) 200 เฮอร์ตซ์; (จ) 250 เฮอร์ตซ์ และ (ฉ) 300 เฮอร์ตซ์

เมื่อพิจารณาค่าต่ำสุดของตัวชี้วัด ρ พบว่า ตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลทั้งสองชนิดซึ่งสอดคล้องกับเลือกค่าความยาวตัวกรอง $q=63$ ให้ลำดับข้อมูลขาออก (เส้นทึบในรูป 5) ที่มีค่าต่ำสุดตัวชี้วัดประสิทธิภาพเท่ากับ $\rho=0.02\%$ หากพิจารณาลำดับข้อมูลขาออกที่ได้รับแต่ละตัวกรองสำหรับกรณี $q=63$ พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับลำดับข้อมูลแรงดันโคซาร์จ (เส้นประในรูป 5) ที่ปราศจากสัญญาณรบกวนทุกความถี่ตั้งแต่กรณี 50, 100, 150, 200, 250 และ 300 เฮอร์ตซ์ พบว่า ลำดับข้อมูลขาออกจากตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลทั้งสองชนิดให้ผลลัพธ์ลำดับข้อมูลที่ใกล้เคียงที่สุดและให้ค่าตัวชี้วัด $\rho=0.02\%$ ค่าที่ต่ำสุดซึ่งสอดคล้องตามตาราง 2 จึงสรุปว่าตัวกรองเอกซ์โพเนนเชียลทั้งสองชนิดสามารถลดสัญญาณรบกวนในสัญญาณแรงดันโคซาร์จได้ดี



รูป 5 ผลลัพธ์ลำดับข้อมูลที่ได้รับจากตัวกรองในกรณี $q=63$ ต่อ ลำดับข้อมูลขาเข้าของสัญญาณชาชนที่มีความถี่ 50 เฮอร์ตซ์และ $SNR=2$ dB ดังภาพ (ก) และลำดับข้อมูลที่ได้รับจากตัวกรองแบบเรียบชนิด (ข) มัชฐาน; (ค) ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่; (ง) เอกซ์

โพเนนเชียลแบบมีเงื่อนไข และ (จ) เอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไข

ตาราง 2 ค่าของ ρ และ SNR ที่ได้จากตัวกรองต่อลำดับข้อมูลของสัญญาณแรงดันของโคซาร์จที่มีความถี่ 50 ถึง 300 เฮอร์ตซ์

| ชนิดตัวกรอง ในกรณี $q=63$ | ρ [%] | SNR [เดซิเบล] |
|---------------------------------|---------------|--------------------|
| ลำดับข้อมูลขาเข้าไม่ผ่านตัวกรอง | 0.11 | 2.00 |
| มัชฐาน | 0.17 | -17.76 |
| ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ | 0.17 | -19.56 |
| เอกซ์โพเนนเชียลแบบมีเงื่อนไข | 0.02 | 2.05 |
| เอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไข | 0.02 | 2.05 |

จากตาราง 1 และ 2 จะเห็นได้ว่าตัวกรองชนิดเอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไขให้ค่าความผิดพลาด ρ ในการประมาณค่าของลำดับข้อมูลน้อยที่สุดเนื่องจากการเลือกค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองนี้เป็นไปโดยอิสระไม่มีเงื่อนไขเหมือนกับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองชนิดเอกซ์โพเนนเชียลแบบมีเงื่อนไข ผลรวมของค่าสัมประสิทธิ์เท่ากับหนึ่ง นอกจากนี้ผลลัพธ์ลำดับข้อมูลที่ได้รับจากตัวกรองชนิดเอกซ์โพเนนเชียลแบบไม่มีเงื่อนไขยังไม่มีค่าความล่าช้าของข้อมูลเหมือนกับผลลัพธ์ลำดับข้อมูลที่ได้รับจากตัวกรองชนิดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่เนื่องจากตัวกรองชนิดเอกซ์โพเนนเชียลนี้มีค่าสัมประสิทธิ์ปรับเปลี่ยนตามลักษณะลำดับข้อมูลขาเข้าในขณะที่ตัวกรองชนิดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ที่มีการออกแบบให้ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองคงที่

5. สรุปผล

จากผลการทดลองในกรณีอัตราส่วนกำลังของสัญญาณต่อกำลังของสัญญาณรบกวนมีค่าเท่ากับ 2 เดซิเบล โดยใช้สัญญาณชาชนที่มีความถี่ 50 เฮอร์ตซ์และสัญญาณแรงดันของโคซาร์จที่มีความถี่ตั้งแต่ 50 เฮอร์ตซ์ถึง 300 เฮอร์ตซ์ พบว่า ตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไขและมีเงื่อนไขให้ประสิทธิภาพของการลดสัญญาณรบกวนได้ดีกว่าตัวกรองที่นำมาเปรียบเทียบทั้ง 2 ชนิดคือตัวกรองมัชฐานและตัวกรองค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ นอกจากนี้ ตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลชนิดไม่มีเงื่อนไขให้ประสิทธิภาพสูงกว่าตัวกรองแบบเรียบเอกซ์โพเนนเชียลชนิดมีเงื่อนไขต่อการลดสัญญาณรบกวนในสัญญาณชาชนและให้ประสิทธิภาพเท่ากับตัวกรองแบบเรียบ

เอกซ์โพเนนเชียลชนิดมีเงื่อนไขต่อในสัญญาณแรงดันของไดโอด
ซาร์จ

6. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากสำนักงานกองทุน
สนับสนุนการวิจัยทุนวิจัยมหัศจรรย์ สกว. สาขาวิทยาศาสตร์
และเทคโนโลยีภายใต้โครงการสร้างกำลังคนเพื่อพัฒนา
อุตสาหกรรมระดับปริญญาโท (สกว. – สสว.) ประจำปี 2550

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] J. A. Cadzow, "Foundations of Digital Signal Processing and Data Analysis", Prentice-Hall, MacMillan, 1987.
- [2] S. V. Vaseghi, "Advance Digital Processing and Noise Reduction", 3rd ed., West Sussex: Wiley, 2006.
- [3] Charles w. Therrien, "Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [4] S. K. Mitra, "Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach", 3rd ed., Mcgraw Hill, New York, 2006.
- [5] S. Yammen, "Optimum Exponential Trend Smoothing Filter", presented at 30th Conf. Electrical Engineering, Kanchanaburi, Thailand, 2007.
- [6] S. Boyd and L. Vandenberghe, "Convex Optimization", Cambridge University Press, UK, 2004.
- [7] J. A. Cadzow, "Minimum l_1 , l_2 and l_∞ Norm Approximate Solutions to an Overdetermined System of Linear Equations", Digital Signal Processing, Elsevier Science, 12: 524 – 560, 2002.
- [8] J. A. Cadzow, "Lecture Note for Data Analysis", Department of Electrical and Computer Engineering, Vanderbilt University, Nashville, TN, 2004.
- [9] S. J. Chapman, "Electrical Machinery Fundamentals", 4th ed., New York: McGraw Hill, 2005.
- [10] Shakes and H. Takara, "Average Q - Factor method Using Amplitude Histogram Evaluation for Transparent monitoring of Optical Signal-to-Noise Ratio Degradation in optical Transmission System", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 20, pp. 1367-1373, August 2002.
- [11] M. T. Akhar and M. Abe, "Adaptive Filtering With Averageing - Based Algorithm for Feed forward Active Noise Control Systems", IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, pp. 557-560, No.6, June 2004.
- [12] N. Sasaoka, Y. Itoh, K. Fujii and Y. Fukui, "Smart Noise Reduction System Based On ALE and Noise Reconstruction System", IEEE, pp. 445-448, 2004
- [13] J. Morimoto, H. kasamatsu, A. Higuchi, T. Yoshida and T. Tabuchi, "Setting Method of Smoothing Constant in Exponential Smoothing", Presented at SICE Annu, Sapporo, Japan 2004.
- [14] N. Sasaoka, K. Sumi, Y. Itoh and K. Fujii, "A New Noise Reduction System Based on ALE and Noise Reconstruction Filter", IEEE, pp. 272-275, 2005