

วงจรแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผันแบบประหยัดความแม่นยำสูง

Low-Cost and High-Precision Inverse Sine Function Circuit

สมปอง วิเศษพานิชกิจ

ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม, คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ลาดกระบัง ลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520

Sompong Wisetphanichkij

Department of Telecommunication Engineering, School of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology
Ladkrabang, Lat Krabang, Bangkok, 10520, Thailand

*Corresponding Author E-mail: sompong.wi@kmitl.ac.th

Received: May 16, 2022; Revised: Aug 14, 2022; Accepted: Aug 23, 2022

บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอวิธีการประมาณค่าการแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผันแบบใหม่ โดยอาศัยการประมาณค่าของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิคแทนเจนต์ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิคแทนเจนต์ผกผันและการจัดการทางคณิตศาสตร์ โดยแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์เชิงเลขเพื่อกำหนดอัตราขยายสัญญาณที่เหมาะสม ทำให้ได้การแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผันที่ได้มีความแม่นยำสูงและค่าความผิดพลาดต่ำเมื่อเทียบกับวิธีการที่มีการนำเสนอก่อนหน้านี้ วงจรที่นำเสนอสร้างขึ้นจากวงจรขยายค่าความนำ (OTA) ที่มีคู่ทรานซิสเตอร์ส่วนหน้าทำหน้าที่เป็นวงจรผลต่างและการกำหนดสัญญาณอินพุตของและกระแสไบอัสที่เหมาะสม ร่วมกับวงจรรวมสัญญาณแบบกลับเฟส ซึ่งมีอัตราขยายสัญญาณตามที่กำหนด วงจรที่เสนอจึงมีขนาดเล็กโดยประกอบด้วยวงจรขยาย (Op-Amp) และวงจรขยายค่าความนำ (OTA) อย่างละ 2 ตัว กับตัวต้านทาน ผลการจำลองด้วยโปรแกรมจำลองการทำงานของวงจร แสดงประสิทธิภาพของวงจรที่เสนอโดยมีค่าผิดพลาดประมาณ 1.2 องศา และ ค่าความผิดพลาดแบบ RMS จากองค์ประกอบความถี่ที่ถ่วงน้ำหนักเท่ากับ 0.8%

คำสำคัญ: วงจรแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผัน, วงจรขยายค่าความนำ, วงจรไฮเพอร์โบลิคแทนเจนต์, การประมาณการเชิงเลข

Abstract

This paper proposes a new estimation method of the inverse sine function transformation. By taking the approximation of the hyperbolic tangent function, the inverse hyperbolic tangent function and mathematic manipulation determine the appropriate signal gains with the numerical computer program. The inverse sine function comes with small errors and high accuracy when compared to the previous methods. The proposed inverse sine function circuit is synthesized from an operational transconductance amplifier (OTA) with a bipolar transistor differential-pair front end circuit and the appropriate configuration of the input signal and bias current. With an inverting summing amplifier circuit, it amplifies the signal according to the specified gain. The proposed circuit is compact. It consists of two amplifier circuits (Op-Amp) and two conductivity amplifiers (OTA) with some resistors. The results of a circuit simulator show the error of approximately 1.2 degrees and a Root Mean Square Error (RMSE) of the weighted frequency component 0.8%.

Keywords: Inverse sine function circuit, Operation transconductance amplifier, Hyperbolic tangent circuit, Numerical approximation

1. บทนำ

วงจรฟังก์ชันไซน์ผกผัน (Inverse Sinusoidal Circuit) เป็นวงจรแปลงสัญญาณคลื่นไซน์เป็นคลื่นสามเหลี่ยมที่มีค่าสอดคล้องกับมุม (เฟส) ของสัญญาณไซน์ ซึ่งเป็นวงจรพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการประมวลผลสัญญาณทั้งในระบบควบคุมระบบเครื่องมือวัด และระบบสื่อสาร เช่น เป็นส่วนประกอบของวงจรรีโซลเวอร์ (Resolver circuit) [1] ที่ใช้สำหรับการวัดตำแหน่งองศาการหมุนของเพลลา โดยวงจรรีโซลเวอร์จะมีโครงสร้างคล้ายมอเตอร์คือ ประกอบด้วยโรเตอร์ทำหน้าที่เป็นขดลวดอ้างอิง (ปฐมภูมิ) และสเตเตอร์ ทำหน้าที่เป็นขดลวดทุติยภูมิซึ่งจะให้ แรงดันไฟฟ้ากระแสสลับหนึ่งขั้วมาเป็นสัญญาณไซน์ที่เปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งองศาของเพลลา โดยวงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันจะทำการแปลงสัญญาณไซน์ให้เป็นค่ามุมสำหรับเป็นสัญญาณในการควบคุมมอเตอร์ หรือเป็นส่วนหนึ่งของวงจรกำเนิดสัญญาณ (signal generator) [2] ในการสร้างสัญญาณคลื่นสามเหลี่ยมจากการแปลงกลับสัญญาณไซน์ที่ได้จากวงจรจอร์จอสซิลเลเตอร์สำหรับงานทดสอบและเครื่องมือวัด วงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันยังสามารถทำหน้าที่เป็นวงจรตรวจจับเฟสของสัญญาณ สำหรับการประยุกต์ใช้ในวงจรเฟสล็อกกลูป (PLL) [3] ซึ่งเป็นวงจรพื้นฐานสำหรับระบบวัดมุม และระบบสื่อสาร นอกจากนี้ วงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันยังสามารถนำไปใช้ในการลดผลฮาร์มอนิกจากการไบอัสวงจรมอดูเลเตอร์ทางแสง (Mach-Zehnder modulator (MZM)) เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการส่งสัญญาณ [4] และยังสามารถประยุกต์ใช้งานในด้านอื่นๆ [5]

ในการสังเคราะห์ฟังก์ชันไซน์ผกผันสามารถสร้างขึ้นด้วยหลายเทคนิค ทั้งในรูปแบบของวงจรแอนะล็อกและด้วยการคำนวณแบบดิจิทัล ซึ่งเทคนิคการคำนวณแบบดิจิทัลนั้น มักใช้ตัวประมวลผลดิจิทัลร่วมกับอัลกอริทึมการประมวลผลเชิงเลข ซึ่งทำให้เกิดค่าหน่วงเวลาอันเนื่องมาจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผล ทำให้ไม่เหมาะกับการใช้งานในระบบเรียลไทม์ [6-7] ในขณะที่เทคนิคการสังเคราะห์ด้วยวงจรแอนะล็อก [2-4], [8-13] ให้ผลตอบสนองแบบเวลาจริง จึงเหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับการประยุกต์ใช้งานกับงานประเภทเรียลไทม์

แนวทางพื้นฐานวิธีการหนึ่งสำหรับสังเคราะห์วงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันคือการใช้วงจรกำเนิดฟังก์ชันไซน์ทำการ

เชื่อมต่อกับวงจรขยายที่มีการป้อนกลับ โดยวงจรป้อนกลับจะถูกออกแบบด้วยวงจรประมวลผลหลายอย่าง เช่น วงจรคูณ วงจรหาร วงจรค่าสัมบูรณ์ และสวิตช์แบบแอนะล็อกในการสังเคราะห์ฟังก์ชันไซน์ผกผัน [8-11] ความถูกต้องจะขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของตัวสร้างฟังก์ชันไซน์ และวงจรย่อยต่างๆ ในวงจรป้อนกลับ นอกจากนี้วงจรประเภทนี้จะมีขยายใหญ่และซับซ้อน ซึ่งเป็นอุปสรรคต่อการออกแบบและใช้งาน เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวจึงมีการนำเสนอการออกแบบวงจรแปลงสัญญาณไซน์เป็นสัญญาณสามเหลี่ยมหรือวงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันโดยอาศัยการประมาณค่าทางคณิตศาสตร์ด้วยฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน [12-14] ที่มีข้อดีคือวงจรมีขนาดเล็กและประหยัด

ในบทความนี้ เป็นการนำเสนอการออกแบบวงจรวงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันที่มีการปรับปรุงให้มีความแม่นยำมากขึ้น โดยการปรับปรุงฟังก์ชันการประมาณค่าเพื่อให้ได้สัญญาณที่มีค่าความผิดพลาดน้อยลง โดยส่วนที่ 2 จะแสดงรายละเอียดเกี่ยวกับเทคนิคที่เสนอการด้วยการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีของวงจรฟังก์ชันไซน์ผกผัน และการคำนวณด้วยโปรแกรม MATLAB ส่วน 3 และ 4 แสดงวงจรที่นำเสนอและผลการจำลองการทำงานด้วยโปรแกรมจำลองการทำงานของวงจรอิเล็กทรอนิกส์ PSpice® ตามลำดับ โดยส่วนสุดท้ายจะเป็นส่วนสรุปซึ่งจะกล่าวถึงข้อสังเกตและแนวทางการพัฒนาในอนาคต

2. การประมาณฟังก์ชันไซน์ผกผัน

ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถหาอินเวอร์สได้โดยสลับที่ระหว่างโดเมนและเรนจ์ที่มีช่วงจำกัดระหว่าง $[-\pi/2, \pi/2]$ สำหรับวงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันเป็นวงจรที่ให้เอาต์พุตดังแสดงในรูปที่ 1(a) เมื่อทำการป้อนสัญญาณ x ในช่วง $[-1, 1]$ และเมื่อทำการป้อนสัญญาณอินพุตด้วยสัญญาณไซน์ วงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันจะให้เอาต์พุตเป็นค่ามุมของสัญญาณไซน์แสดงในรูปที่ 1(b) ซึ่งจะมีลักษณะเป็นสัญญาณคลื่นสามเหลี่ยม (Triangle wave) ที่มีความถี่เดียวกันกับสัญญาณไซน์

สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยวิธีการประมาณด้วยอนุกรมกำลัง (Power series) [12-15] มีข้อดีหลายประการ คือค่าที่ได้จากการประมาณมีความต่อเนื่อง วงจรที่สังเคราะห์ขึ้น

มีขนาดเล็ก ใช้อุปกรณ์น้อย ทำให้สามารถการออกแบบและควบคุมการทำงานของวงจรได้ง่าย โดยเฉพาะอย่างยิ่งการประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ผกผันด้วยอนุกรมกำลังบนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน [12–14] ด้วยการกำหนดอัตราขยายที่เหมาะสม ทำให้ได้อนุกรมกำลังที่ได้จากการประมาณ มีความใกล้เคียงกับอนุกรมกำลังที่ได้จากการแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผัน อย่างไรก็ตาม การประมาณด้วยเทคนิคดังกล่าวจะใกล้เคียงกับฟังก์ชันไซน์ผกผันเฉพาะเมื่อ $|x|$ มีค่าน้อย และจะมีค่าผิดพลาดเพิ่มขึ้นเมื่อ $|x|$ มีค่ามากขึ้น

ในบทความนี้นำเสนอการประมาณฟังก์ชันไซน์ผกผัน โดยปรับปรุงจากเทคนิคการประมาณด้วยฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน เพื่อให้ผลการประมาณค่ามีความผิดพลาดต่ำลง ด้วยการเพิ่มส่วนฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ที่ให้ผลตอบสนองต่ำลงเมื่อ $|x|$ มีค่ามากขึ้น ทำให้ได้ค่าประมาณฟังก์ชันไซน์ผกผันที่ใกล้เคียงมากขึ้น ดังแสดงในสมการที่ (1) เมื่อมีการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ a, b และ c ที่เหมาะสม

$$V_{\text{asin_proposed}}(v_{\text{sin}}) = c * \tanh(a * v_{\text{sin}} + b * \operatorname{atanh}(v_{\text{sin}})) \quad (1)$$

ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ ทำได้โดยการแทนค่าฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน ด้วยอนุกรมกำลัง (สมการที่ (2)) ลงในสมการที่ (1) ดังแสดงในสมการที่ (3)

$$\operatorname{atanh}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots; |x| < 1 \quad (2)$$

$$V_{\text{asin_proposed}}(v_{\text{sin}}) = c * \tanh\left(a * v_{\text{sin}} + b\left(v_{\text{sin}} + \frac{(v_{\text{sin}})^3}{3} + \frac{(v_{\text{sin}})^5}{5} + \dots\right)\right); |v_{\text{sin}}| < 1 \quad (3)$$

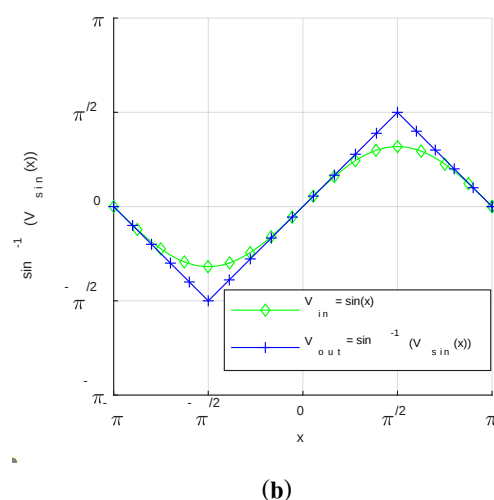
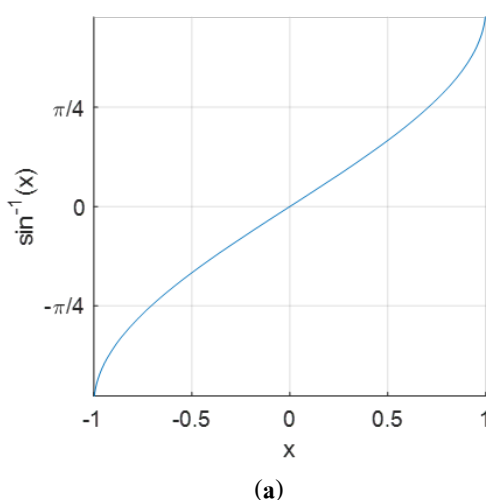
เนื่องจากฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์สามารถแปลงเป็นอนุกรมกำลังดังแสดงในสมการที่ (4)

$$\tanh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} \dots; |x| < \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

เมื่อ B_{2n} คือ Bernoulli number

และทำการแทนสัญญาณอินพุตไซน์ด้วยอนุกรมกำลัง $v_{\text{sin}}(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, เมื่อ $x \in R$ และมีหน่วยเป็นเรเดียน ดังนั้น จะได้การประมาณฟังก์ชันไซน์ผกผันดังแสดงในสมการที่ (5)

$$V_{\text{asin_proposed}}(v_{\text{sin}}(x)) = c(a + b)x + c\left(\frac{1}{3}(a + b)^3 + \frac{1}{6}(a - b)\right)x^3 + c\left(\frac{2}{15}(a + b)^5 - \frac{1}{18}(a - b)^3 + \frac{2}{9}(a^3 - b^3) + \frac{a}{120} + \frac{b}{24}\right)x^5 + \dots; |x| < \frac{\pi}{2} \quad (5)$$



รูปที่ 1 การแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผัน (a) เมื่อป้อนสัญญาณอินพุต $x \in [-1, 1]$ (b) เมื่อป้อนสัญญาณ $\sin(x)$

เมื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชันไซน์ผกผัน(ในอุดมคติ)ที่ทำให้การป้อนด้วยสัญญาณอินพุตไซน์จะให้เอาต์พุตเป็นค่ามุม x ดังแสดงในสมการที่ (6)

$$V_{asin_ideal}(v_{sin}(x)) = asin(v_{sin}(x)) = x; \quad |x| < \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

ดังนั้นเพื่อให้ค่าประมาณมีค่าใกล้เคียงกับฟังก์ชันไซน์ผกผัน เมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ (พจน์ x) จะได้ความสัมพันธ์ของค่าสัมประสิทธิ์ a, b และ c ดังสมการที่ (7)

$$c(a + b) = 1 \text{ หรือ } b = \frac{1}{c} - a \quad (7)$$

โดยค่าความผิดพลาดจากการประมาณ สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (8)

$$err(v_{sin}) = V_{asin_proposed}(v_{sin}) - V_{asin_ideal}(v_{sin}) \quad (8)$$

เมื่อแทนสมการที่ (1) และ (6) ในสมการที่ (8) จะได้ค่าความผิดพลาดดังแสดงในสมการที่ (9)

$$err(v_{sin}) = c * \tanh(a * v_{sin} + b * \operatorname{atanh}(v_{sin})) - x \quad (9)$$

หากกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ให้ค่าผิดพลาดที่ตำแหน่ง $x = -\pi/2$ และ $\pi/2$ มีค่าเป็น 0 หรือ $\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} err(x) = 0$ หรือ

$\lim_{v_{sin} \rightarrow \pm 1} err(v_{sin}) = 0$ จากสมการที่ (9) โดยใช้หลักเกณฑ์โลปีตาล (L'Hôpital's rule) จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ c ดังสมการที่ (10)

$$c = 1.5708 \quad (10)$$

เพื่อให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ผกผัน (สมการที่ (1)) ที่มีความใกล้เคียงกับฟังก์ชันไซน์ผกผัน (สมการที่ (6)) มากที่สุด หากกำหนดให้ $\epsilon(x)$ แทนค่าผิดพลาดกำลังสองสะสมที่ได้จากการอินทิเกรตตลอดช่วง $x = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

$$\epsilon = \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} (err(v_{sin}(x)))^2 dx \quad (11)$$

โดยค่าความผิดพลาด $err(v_{sin})$ สามารถหาได้จากแทนค่าสัมประสิทธิ์ b และ c ที่ได้สมการที่ (7) และ (10) ลงในสมการที่ (9) จากนั้นจึงแทนลงในสมการที่ (11) ซึ่งจะได้ค่าผิดพลาดกำลังสองสะสมในสมการที่ (12) (แสดงเฉพาะพจน์ที่มีกำลังต่ำกว่าหรือเท่ากับ 6)

$$\epsilon(a) \approx 4.341 * a^6 + 4.440 * a^5 + 2.783 * a^4 + 1.633 * a^3 + 0.776 * a^2 + 0.344 * a - 0.0355 \quad (12)$$

รูปที่ 2(a) แสดงค่าอินทิกรัลของค่าผิดพลาดกำลังสองตลอดช่วง $x = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ พบว่า ค่าผิดพลาดกำลังสองสะสมจะมีค่าต่ำเมื่อ a มีค่าระหว่าง -1 ถึง 0.5 ซึ่งเป็นช่วงที่กว้าง ทำให้ง่ายเมื่อนำไปออกแบบวงจร อย่างไรก็ตาม ในการหาค่า a ที่ทำให้ค่าผิดพลาดกำลังสองที่ค่าต่ำสุด ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของค่าผิดพลาดกำลังสองเทียบกับค่า a ที่ให้ค่าเท่ากับ 0 ดังแสดงในรูปที่ 2(b) จากผลการคำนวณด้วย MATLAB จะได้

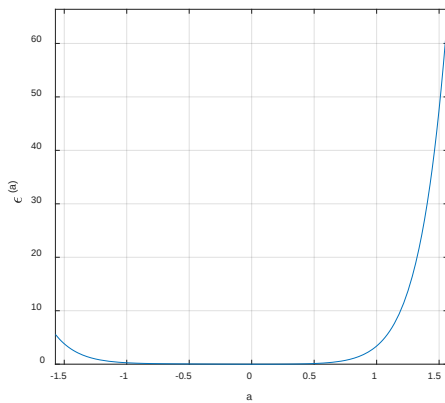
$$a = 0.0824 \quad (13)$$

เมื่อได้สัมประสิทธิ์ c และ a ตามสมการที่ (10) และ (13) แล้ว ทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ b (สมการที่ (14)) โดยแทนลงในสมการที่ (7) ดังนั้น

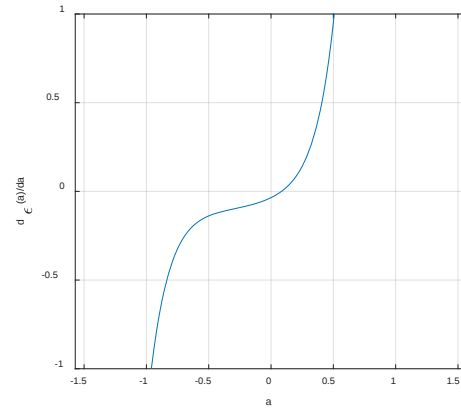
$$b = 0.5542 \quad (14)$$

เมื่อได้สัมประสิทธิ์ a, b และ c จากสมการที่ (13), (14) และ (10) เมื่อแทนลงในสมการที่ (1) จะได้สมการการประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ผกผันดังสมการที่ (15)

$$V_{asin_proposed}(v_{sin}) = 1.5708 * \tanh(0.0824 * v_{sin} + 0.5542 * \operatorname{atanh}(v_{sin})) ; |v_{sin}| < 1 \quad (15)$$



(a)



(b)

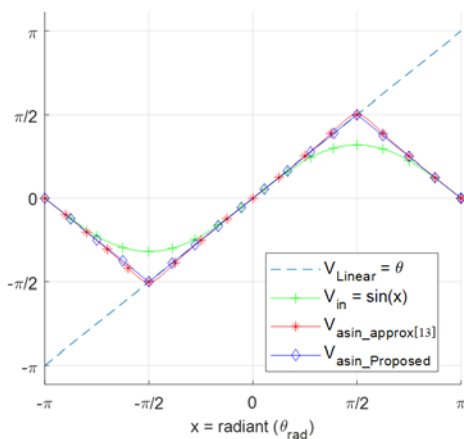
รูปที่ 2 (a) ค่าอินทิกรัลของค่าผิดพลาดกำลังสอง (สมการที่ (11)) (b) ค่าอนุพันธ์ของค่าผิดพลาดกำลังสองเทียบกับค่า a

รูปที่ 3(a) แสดงการประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอ (สมการที่ (15)) เมื่อทำการป้อนสัญญาณอินพุต (v_{Sin}) เป็นสัญญาณไซน์ ($\sin(x)$) โดยเปรียบเทียบกับค่าประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอโดย [13] รูปที่ 3(b) แสดงค่าผิดพลาดของการประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ผกผัน โดยแกน y จะแสดงในรูปแบบองศา ซึ่งจะพบว่า การประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ที่นำเสนอจะได้ค่ามุมผิดพลาดต่ำตลอดช่วงการ $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ และมีค่ามุมผิดพลาดจากการแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผันในช่วง ± 0.2 องศา

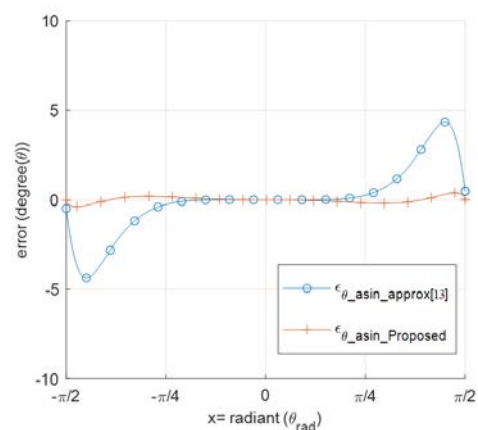
ดังนั้น ค่าเฉลี่ยกำลังสองของค่าผิดพลาด RMS(%) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (16)

$$RMS(\%) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (err(v_{Sin}(x)))^2 dx} * 100\% \quad (16)$$

เมื่อทำการคำนวณด้วย MATLAB จะพบว่า การประมาณฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอ (สมการที่ (1)) เมื่อกำหนดค่าอัตราขยาย (a , b และ c) ที่เหมาะสม จะได้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของค่าผิดพลาดของฟังก์ชันประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ที่นำเสนอ (RMS) ที่ต่ำเพียง 0.154%



(a)



(b)

รูปที่ 3 (a) การประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ผกผัน (b) ค่าผิดพลาดของการประมาณค่าฟังก์ชันไซน์ผกผัน

3. วงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอ

ในการสังเคราะห์วงจรฟังก์ชันไซน์ผกผัน จากสมการการประมาณฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอ (สมการที่ (1)) จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน ซึ่งสามารถสร้างขึ้นได้หลายวิธี [13–14] ในบทความนี้จะใช้วงจรขยายค่าความนำ (Operational transconductance amplifier, OTA) หรือโอทีเอ (รูปที่ 4(a)) ซึ่งเป็นอุปกรณ์แอคทีฟที่สามารถแปรค่าอัตราขยายความนำ (Transconductance gain) ได้อย่างเป็นเชิงเส้น สามารถปรับค่าพารามิเตอร์ได้ด้วยวิธีการทางอิเล็กทรอนิกส์ อีกทั้งมีโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อนและมีราคาที่ถูก โดยวงจรภายในส่วนหน้าจะประกอบไปด้วยวงจรคู่ผลต่าง (Differential Amplifier) ที่สร้างขึ้นจากคู่อุปกรณ์ทรานซิสเตอร์ที่มีความสมมาตรกัน ทำหน้าที่เปลี่ยนผลต่างศักย์อินพุตเป็นกระแสก่อนที่จะถูกขยายเป็นกระแสเอาต์พุต โดยมีความสมการถ่ายโอนสัญญาณขนาดใหญ่แสดงในสมการที่ (17) [13]

$$I_{out} = mI_B \tanh\left(\frac{V_{in}}{2V_T}\right) \quad (17)$$

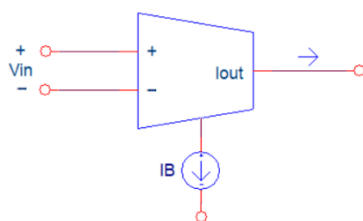
เมื่อ I_B คือกระแสไบอัสของวงจรขยายค่าความนำ

V_T คือแรงดันเชิงอุณหภูมิ (Thermal voltage) ที่มีค่า

$$\text{เท่ากับ } \frac{kT}{q}$$

k คือค่าคงที่ของบ็อลทซ์มัน มีค่าเท่ากับ $1.3806503 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$

T คืออุณหภูมิในหน่วยเคลวิน



(a)

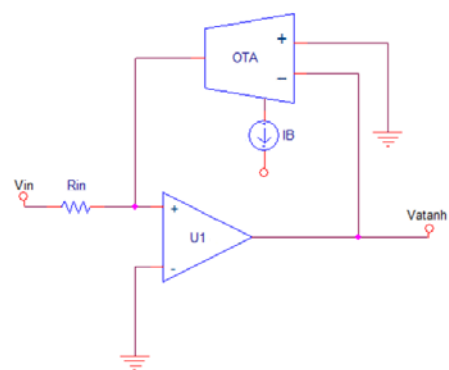
q คือประจุของอิเล็กตรอน มีค่าเท่ากับ $1.602176487 \times 10^{-19} \text{ C}$

m คือค่าคงที่ขึ้นกับวงจร OTA ที่นำมาสังเคราะห์

สำหรับฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน สามารถสร้างขึ้นจากวงจรขยายสัญญาณที่ใช้วงจรขยายค่าความนำเป็นสัญญาณป้อนกลับ [13] ดังแสดงในรูปที่ 4(b) โดยความต้านทาน R_{in} จะทำหน้าที่แปลงสัญญาณศักย์ไฟฟ้าอินพุต (V_{in}) เพื่อกำหนดเป็นกระแสเอาต์พุตให้กับวงจรขยายค่าความนำ (OTA) โดยวงจรขยายสัญญาณ (Op-Amp) จะสร้างสัญญาณอินพุตให้กับวงจรขยายค่าความนำที่สอดคล้องกับค่ากระแสที่ถูกกำหนดจากสัญญาณ V_{in} เนื่องจากวงจรขยายค่าความนำ (OTA) มีฟังก์ชันการถ่ายโอนแบบฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (สมการที่ (17)) ดังนั้นสัญญาณอินพุตของวงจรขยายค่าความนำ (OTA) ที่ได้อาจขยายสัญญาณ (Op-Amp) จึงเป็นฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน ดังแสดงในสมการที่ (18) [13]

$$V_{atanh} = 2V_T \operatorname{atanh}\left(\frac{V_{in}}{mI_B R_{in}}\right); \left|\frac{V_{in}}{mI_B R_{in}}\right| < 1 \quad (18)$$

เมื่อนำวงจรทั้งสองมาสังเคราะห์เป็นวงจรแปลงฟังก์ชันไซน์ตามสมการที่ (1) สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 5 โดยเมื่อทำการป้อนสัญญาณอินพุตด้วยสัญญาณไซน์ ก็จะได้สัญญาณเอาต์พุตเป็นมุม (เฟส) ของสัญญาณอินพุตที่ป้อน โดยสัญญาณอินพุตจะถูกป้อนเข้าสู่วงจรขยาย a และวงจรแปลงไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน (atanh) ก่อนถูกขยาย



(b)

รูปที่ 4 (a) วงจรขยายค่าความนำ (b) วงจรแปลงไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผัน

ด้วยวงจรขยาย b สัญญาณที่ได้จะถูกนำมารวมกันด้วยวงจรรวมสัญญาณแบบกลับเฟส จากนั้นจึงป้อนเข้าสู่วงจรแปลงสัญญาณไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์และวงจรขยาย c ตาม ลำดับ

สำหรับการกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในวงจรสามารถอธิบายได้ดังนี้ สัญญาณอินพุตไซน์ (V_{sin}) ป้อนเข้าสู่วงจรแปลงสัญญาณไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผันที่สร้างขึ้นจากวงจรขยาย Op-Amp (U1A) และ วงจรขยายความนำ (OTA1) ดังสมการที่ (19)

$$V_{atanh} = 2V_T \tanh\left(\frac{V_{sin}}{mI_{B1}R_{in}}\right) \quad (19)$$

สัญญาณที่ได้จากถูกนำไปรวมกับสัญญาณอินพุตด้วยวงจรรวมสัญญาณแบบกลับเฟสที่สร้างขึ้นจากวงจรขยาย Op-Amp (U2A) โดยกำหนดให้มีค่าอัตราขยายของแต่ละสัญญาณได้ด้วยค่าความต้านทาน R_F , R_A และ R_B ดังสมการที่ (20)

$$V_1 = -\left(\frac{R_F}{R_A}V_{sin} + \frac{R_F}{R_B}V_{atanh}\right) \quad (20)$$

สัญญาณ V_1 ที่ได้จะเป็นสัญญาณกลับเฟส และจากเอกลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ $\tanh(x) = -\tanh(-x)$ สัญญาณ V_1 จะถูกป้อนเข้าสู่วงจรแปลงสัญญาณไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ ที่สร้างขึ้นจากวงจรขยายค่าความนำ (OTA2) ที่ขาอินพุตลบทำให้ได้สัญญาณกระแสเอาต์พุตแบบกลับเฟส ดังสมการที่ (21)

$$I_{out} = -mI_{B2} \tanh\left(\frac{V_1}{2V_T}\right) \quad (21)$$

เมื่อแทนสมการที่ (20) ลงในสมการที่ (21) ดังนั้นจะได้สัญญาณการแปลงไซน์ผกผัน ดังสมการที่ (22)

$$V_{asin_proposed} = R_{Load}I_{out} = mR_{Load}I_{B2} * \tanh\left(\frac{1}{2V_T}\left(\frac{R_F}{R_A}V_{sin} + \frac{R_F}{R_B}V_{atanh}\right)\right) = mR_{Load}I_{B2} * \tanh\left(\frac{R_F}{2V_T R_A}V_{sin} + \frac{R_F}{R_B} \tanh\left(\frac{V_{sin}}{mI_{B1}R_{in}}\right)\right) \quad (22)$$

หากกำหนดให้ สัญญาณอินพุตไซน์ (V_{sin}) ที่มีแอมพลิจูดเท่ากับ m_1 หรือ ($V_{sin} = m * \sin(x)$) ลงในสมการที่

(22) และเปรียบเทียบกับสมการที่ (1) จะได้สัญญาณการแปลงไซน์ผกผัน ดังสมการที่ (23)

$$V_{asin_proposed} = mR_{Load}I_{B2} * \tanh\left(\frac{R_F}{2V_T R_A}m \sin(x) + \frac{R_F}{R_B} \tanh\left(\frac{m \sin(x)}{mI_{B1}R_{in}}\right)\right) \quad (23)$$

หรือมีค่าเท่ากับสมการที่ (24)

$$V_{asin_proposed} = mR_{Load}I_{B2} * \tanh\left(\frac{mR_F I_{B1} R_{in}}{2V_T R_A} \left(\frac{\sin(x)}{I_{B1} R_{in}}\right) + \frac{R_F}{R_B} \tanh\left(\frac{\sin(x)}{I_{B1} R_{in}}\right)\right) \quad (24)$$

4. ผลการจำลองการทำงานวงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอ

การจำลองการทำงานวงจรโดยใช้โปรแกรม PSpice โดยใช้วงจรขยายค่าความนำ (OTA)[13] ที่สร้างขึ้นจากไบโพลาร์ทรานซิสเตอร์ CA3280 และ วงจรขยาย (Op-Amp) LM324 ที่ระดับไฟเลี้ยง $\pm 10V$ โดยกำหนดให้ I_{B1} เท่ากับ $20mA$ และ R_m เท่ากับ 50 Ohm ($I_{B1}R_{in} = 1$) และ I_{B2} เท่ากับ 15 mA จะได้ค่า $m_1 = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้นจากสมการที่ (24) จะได้สัญญาณฟังก์ชันไซน์ผกผันดังสมการที่ (25)

$$V_{asin_proposed} = \frac{\pi}{2} R_{Load} I_{B2} * \tanh\left(\frac{\pi R_F}{4V_T R_A}(\sin(x)) + \frac{R_F}{R_B} \tanh(\sin(x))\right) \quad (25)$$

จากสมการที่ (22) เมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ (1) จะได้

ค่าอัตราขยาย ($a = \frac{\pi R_F}{4V_T R_A}$) = 0.0824, หากกำหนดให้ R_F เท่ากับ 100 Ohm ดังนั้น R_A เท่ากับ 36.660 k. Ohm
ค่าอัตราขยาย ($b = \frac{R_F}{R_B}$) = 0.5542; จาก R_F เท่ากับ 100 Ohm ดังนั้น R_B เท่ากับ 180 Ohm และ

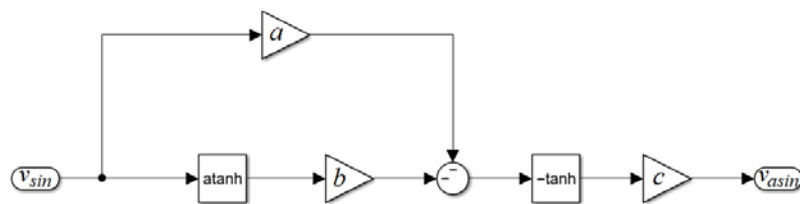
ค่าอัตราขยาย ($c = \frac{\pi}{2} R_{Load} I_{B2}$) = 1.5708; หากกำหนดให้ I_{B2} เท่ากับ 15 mA ดังนั้น R_{Load} เท่ากับ 66.6 Ohm

รูปที่ 6(a) แสดงผลการจำลองการทำงานวงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอ (**รูปที่ 5(b)**) โดยการป้อนสัญญาณอินพุตไซน์ เพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ 18 ($|V_{in}| < mI_{B1}R_{in}$, เมื่อ $m = \frac{\pi}{2}$, $I_{B1} = 20mA$, $R_{in} = 50 \text{ Ohm}$) ดังนั้น จึงกำหนดให้ที่มีแอมพลิจูดมีค่าเท่ากับ 1.52

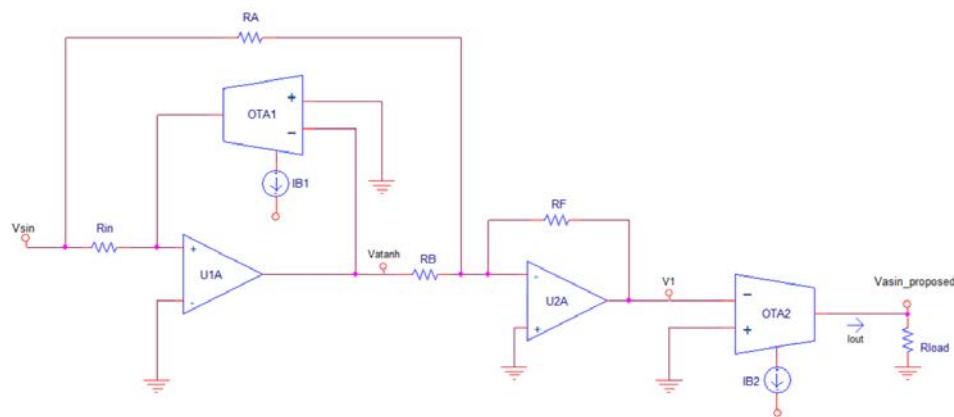
V (หรือ $V_{in} = 1.52 * \sin(x)$) โดยแกน x แสดงค่ามุม (เฟส) ของสัญญาณอินพุตในหน่วยองศา ในขณะที่แกน y เป็นค่าที่ได้จากวงจรแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผันซึ่งจะมีค่าสอดคล้องกับค่ามุม (เฟส) ของสัญญาณอินพุตที่ป้อนแต่ในหน่วยเรเดียน (radian) โดยมีค่าอยู่ระหว่าง $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

สำหรับ รูปที่ 6(b) แสดงค่าความผิดพลาดของการแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผันเทียบกับค่าอุดมคติ (เฟสของสัญญาณอินพุต) โดยแกน y แสดงค่าในหน่วยองศา ซึ่งจะพบว่าค่าความ

ผิดพลาดจะมีการน้อยลงและจะเพิ่มขึ้นเมื่อมุมเพิ่มขึ้น และจะลดลงเข้าใกล้ศูนย์เมื่อเฟสของสัญญาณอินพุตเข้าใกล้ค่า $\pm \frac{\pi}{2}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขที่ออกแบบไว้ในส่วนที่ 2 ค่าความผิดพลาดจากการจำลองการทำงานจะมีค่าสูงกว่าค่าที่ได้จากการคำนวณเนื่องจากการประมาณค่าเมื่อกำหนดค่าความต้านทานคุณสมบัติที่ไม่เป็นอุดมคติของวงจรขยาย (Op-Amp) และวงจรขยายค่าความนำ (OTA) โดยมีค่าความผิดพลาดสูงสุดประมาณ 1.2 องศา

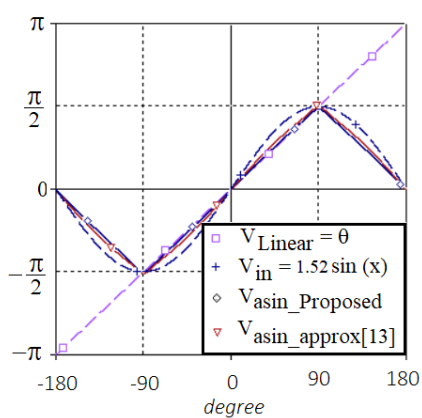


(a)

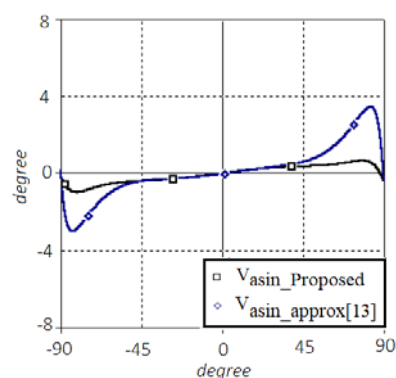


(b)

รูปที่ 5 วงจรแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผัน (a) บล็อกไดอะแกรม (b) วงจรที่นำเสนอ



(a)

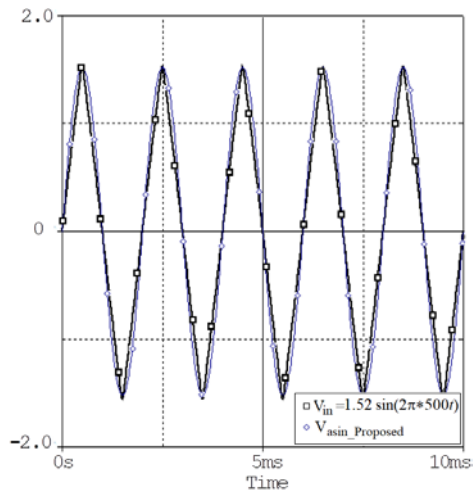


(b)

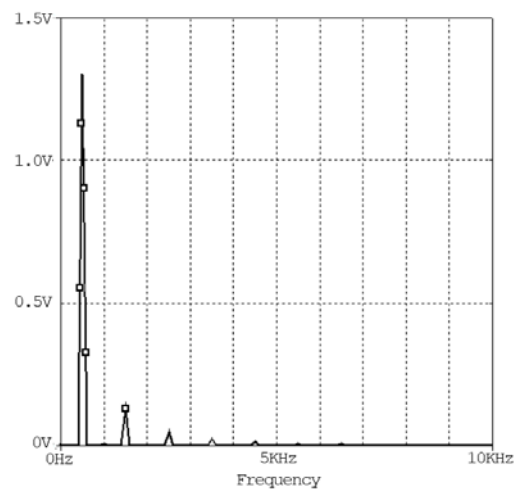
รูปที่ 6 (a) ผลการจำลองการทำงานวงจรฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอ (b) ค่าความผิดพลาด

สำหรับการทดสอบทางเวลา (Transient Analysis) จะทำการป้อนสัญญาณไซน์ขนาด 1 โวลต์ที่ความถี่ 500 Hz ($V_{sin} = 1.52 * \sin(2\pi * 500t)$) โดยผลการตอบสนองเป็นสัญญาณสามเหลี่ยมที่มีขนาดเปลี่ยนไปตามมุม(เฟส) ของสัญญาณอินพุตดังแสดงในรูปที่ 7(a) เมื่อทำการวิเคราะห์ฟูเรียร์ จะได้องค์ประกอบความถี่ ดังแสดงในรูปที่ 7(b) และเมื่อคำนวณค่าความผิดพลาดแบบ RMS จากองค์ประกอบความถี่ที่ถ่วงน้ำหนัก [13] จะมีค่าเท่ากับ 0.8% เมื่อเทียบกับสัญญาณสามเหลี่ยมในอุดมคติที่ได้จากการแปลงกลับฟังก์ชันไซน์ด้วยฟังก์ชันไซน์ผกผัน

รูปที่ 8 แสดงผลการจำลองภายใต้สัญญาณต่าง ๆ แม้ว่า



(a)



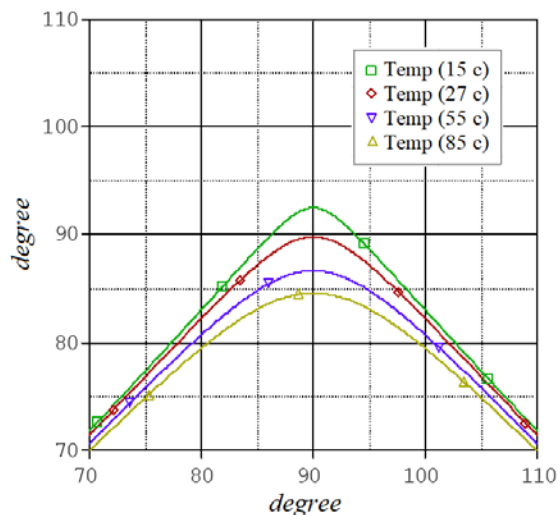
(b)

รูปที่ 7 (a) ผลตอบสนองทางเวลา (b) ผลการวิเคราะห์องค์ประกอบความถี่จากการแปลงฟูเรียร์

5. สรุป

บทความนี้เสนอการประมาณการแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผัน โดยอาศัยคุณสมบัติฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผันและกำหนดค่าขนาดสัญญาณที่เหมาะสม โดยวงจรแปลงฟังก์ชันไซน์ผกผันที่นำเสนอจะสร้างขึ้นจากวงจรขยายค่าความนำ (OTA) ที่มีวงจรส่วนหน้าเป็นวงจรคู่ผลต่างแบบไบโพลาร์ทรานซิสเตอร์ ด้วยการกำหนดค่าของสัญญาณจุดเข้าและกระแสไบอัสที่เหมาะสม ร่วมกับวงจรรวมสัญญาณแบบกลับเฟสซึ่งจะทำหน้าที่ขยายสัญญาณตามอัตราขยายที่กำหนดไว้ โดยวงจรที่นำเสนอจะมีขนาดเล็กประกอบด้วย

ผลกระทบของอุณหภูมิในส่วนของวงจรแปลงไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ผกผันจะถูกชดเชยแล้วเมื่อป้อนผ่านวงจรแปลงไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (สมการที่ (22)) แต่อุณหภูมิจะยังมีผลต่อสัญญาณเอาต์พุต จากค่าอัตราขยาย a ที่เปลี่ยนไป ดังสมการที่ (22) โดยขนาดของสัญญาณเอาต์พุตจะมีค่าลดลงเมื่ออุณหภูมิการทำงานสูงขึ้น อย่างไรก็ตาม ค่าอัตราขยาย a ที่เปลี่ยนไปในช่วงจำกัด (รูปที่ 2(a)) จะส่งผลกระทบต่อเพียงเล็กน้อยต่อค่าผิดพลาด แต่จะส่งผลกระทบต่อขนาดของสัญญาณเอาต์พุต ดังนั้น หากทำการปรับค่าอัตราขยาย b ให้สอดคล้องกับอัตราขยาย a ที่เปลี่ยนไปตามสมการที่ (7) ก็จะช่วยลดผลกระทบของอุณหภูมิต่อการทำงานของวงจร



รูปที่ 8 ผลการจำลองภายใต้อุณหภูมิต่าง ๆ

เอกสารอ้างอิง

- [1] M. Benammar, L. Ben-Brahim and M. A. Alhamadi, "A novel resolver-to-360 linearized converter," *IEEE Sensors Journal*, vol.4, no. 1, pp. 96–101, 2004, doi: 10.1109/JSEN.2003.820317.
- [2] S. L. Kwok, "Sine wave to triangle wave convertor," U.S. Patent No. US4415860A, 1981.
- [3] M. Karray, J. K. Seon, J. -J. Charlot and N. Nasmoudi, "VHDL-AMS modeling of a new PLL with an inverse sine phase detector (ISPD PLL)," in *Proc. 2002 IEEE International Workshop on Behavioral Modeling and Simulation*, Santa Rosa, CA, USA, Oct. 08, 2002, pp. 80–83, doi: 10.1109/BMAS.2002.1291062.
- [4] Y. Chiu, B. Jalali, S. Garner and W. Steier, "Broad-band electronic linearizer for externally modulated analog fiber-optic links," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 11, no. 1, pp. 48–50, 1999, doi: 10.1109/68.736386.
- [5] M. J. Narasimha, K. Sheno and A. M. Peterson, "The arcsine transform and its applications in signal processing," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Hartford, CT, USA, May 09–11, 1977, pp. 502–505, doi: 10.1109/ICASSP.1977.1170346.
- [6] S. Nandi, S. Prasad, C. M. Ananda and S. S. Rekha, "Fixed point implementation of trigonometric function using Taylor's series and error characterization," *International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*, Jaipur, India, Sep 21–24, 2016, pp. 442–446, doi: 10.1109/ICACCI.2016.7732085.
- [7] S. Dyer, N. Ahmed and D. Hummels, "Computation of the discrete cosine transform via the arcsine transform," *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, 1980, pp. 231–234, doi: 10.1109/ICASSP.1980.1170904.
- [8] B. Gilbert, "A monolithic microsystem for analog synthesis of trigonometric functions and their inverses," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 17, no. 6, pp. 1179–1191, 1982, doi: 10.1109/JSSC.1982.1051878.
- [9] M. Benammar, "Precise, wide-range approximations to arc sine function suitable for analog implementation in sensors and instrumentation applications," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 52, no. 2, pp. 262–270, 2005, doi: 10.1109/TCSI.2004.840287.
- [10] M. Abdellaoui, B. Gassara and N. Masmoudi, "A new model of an inverse sine phase detector to design ISPD PLL demodulator without using any filters," *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, vol. 61, no. 1, pp. 10–21, 2007, doi: 10.1016/j.aeue.2006.01.007.
- [11] J. -K. Seon, "A fully integrated CMOS inverse sine circuit for computational systems," *International Journal of Electronics*, vol. 97, no. 8, pp. 867–882, 2010, doi: 10.1080/00207211003646886.
- [12] A. Kaewpoonsuk, W. Petchmaneeumka, A. Rerkratn, S. Tammaruckwattana and V. Riewruja, "A novel resolver-to-DC converter based on OTA-based

- inverse-sine function circuit,” in *SICE Annual Conference*, Chofu, Japan, Aug 20–22, 2008, pp. 609–614, doi: 10.1109/SICE.2008.4654729.
- [13] P. Apisitticharoonlert, W. Petchmaneelumka, and V. Riewruja, “Inverse sine function circuit with temperature compensation,” *Proc. International MultiConference of Engineer and Computer Scientists (IMECS)*, Hong Kong, Mar 16–18, 2016, pp. 616–619.
- [14] J. Tongcharoen, W. Petch maneelumka, T. Cheypoca, and V. Riewruja, “Resolver-to-Triangular Wave Converter,” in *SICE2014*, Nagoya, Japan, Sep. 9–12, 2014, pp. 1181–1184.
- [15] P. Prommee, K. Angkeaw and K. Karawanich, “Low-Cost Linearity Range Enhancement for Linear Variable Differential Transformer,” *IEEE Sensors Journal*, vol. 22, no. 4, pp. 3316–3325, 2022, doi: 10.1109/JSEN.2022.3142195.