

พฤติกรรมการดัดของคานเชิงประกอบแบบ FG ที่พิจารณาผลกระทบของรูพรุนวางบน ฐานรากยืดหยุ่น

Bending Behavior of Functionally Graded Beam with Including Effect of Porosity on Elastic Foundation

มนต์ชัย ปัญญาทอง¹, ศราวุธ เรือนศรี¹ และ รัฐพล เกติยศ^{1,*}

¹ สาขาวิศวกรรมโยธาและสิ่งแวดล้อม, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา ทรายขาว พาน
เชียงใหม่ 57120

Monchai Panyatong¹, Saravoot Ruensee¹ and Rattapon Ketiyot^{1,*}

¹ Department of Civil and Environmental Engineering, Faculty of Engineering, Rajamangala University of
Technology Lanna, Sai Khao, Phan, Chiang Rai, 57120, Thailand

*Corresponding Author E-mail: rattapon.ste7@rmutl.ac.th

Received: Apr 19, 2022; Revised: Jul 10, 2022; Accepted: Aug 01, 2022

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอแบบจำลองในศึกษาพฤติกรรมการดัดของคานเชิงประกอบแบบ FG วางบนฐานรากยืดหยุ่นและพิจารณาถึงผลกระทบจากรูพรุนของวัสดุ ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นตามความหนา กำหนดให้เป็นไปตามกฎกำลังและรวมผลกระทบจากรูพรุน จากนั้นใช้ทฤษฎีคานของออยเลอร์-เบอร์นูลลีเพื่ออธิบายพฤติกรรมการดัดของคาน สำหรับสมการควบคุมของปัญหาได้พัฒนาขึ้นจากการประยุกต์ใช้หลักการของงานเสมือน ในขณะที่คำตอบของปัญหามุ่งสร้างจากวิธีเชิงวิเคราะห์และได้เปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับคำตอบจากวิธีกัลเลอรินไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อประเมินความถูกต้องของคำตอบ จากการศึกษาพบว่า 1) การเพิ่มขึ้นของสัมประสิทธิ์ความพรุนทำให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นมีค่าที่ลดลง 2) การเพิ่มขึ้นของสัมประสิทธิ์ความพรุนและดัชนีเลขยกกำลังจะทำให้ตำแหน่งของแกนสะเทินเลื่อนสูงขึ้น อีกทั้งยังทำให้ความแข็งแกร่งการดัดมีค่าที่ลดลงส่งผลให้คานเกิดการโก่งตัวที่เพิ่มขึ้น 3) ลักษณะการกระจายของความเค้นตามแนวแกน x บนหน้าตัดจะขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์ความพรุนและดัชนีเลขยกกำลัง 4) ฐานรากยืดหยุ่นมีอิทธิพลต่อคานที่มีความพรุนสูงมากกว่าคานที่มีความพรุนต่ำ

คำสำคัญ: วัสดุเชิงประกอบแบบ FGMs, คานเชิงประกอบแบบ FG, วัสดุรูพรุน, พฤติกรรมการดัด, ฐานรากยืดหยุ่น

Abstract

The objective of this paper is to propose the analytical model to study the bending behavior of functionally graded (FG) beam with including effect of porosity on elastic foundation. The distribution of modulus of elasticity of beam through the thickness is defined by using the power law distribution and also considering the influence of porosity. The Euler-Bernoulli beam theory is employed to describe the bending behavior of beam. The governing equation of the problem is established by applying the principle of virtual work. The solution of problem is obtained by using the analytical method. The validation of the solution is evaluated by comparing the obtained results with those from the Galerkin Finite Element

Method solutions. The results reveal that: 1) an increase in the porous coefficient leads to a decrease of the modulus of elasticity; 2) an increase in the porous coefficient and the power index results the neutral axis move up and it reduces the bending stiffness which lead to an increase in the deflection; 3) the characteristic distributions of the stresses in x direction depend on the values of the porous coefficient and the power index; 4) the influences of the elastic foundation have more effect on the beam with higher porosity than those with lower porosity.

Keywords: Functionally Graded Materials, Functionally Graded Beam, Porous Materials, Bending Behavior, Elastic Foundation

1. บทนำ

วัสดุเชิงประกอบแบบ FGMs (Functionally Graded Materials, FGMs) เป็นวัสดุชนิดหนึ่งของวัสดุเชิงประกอบ (Composite Materials) ที่มีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติอย่างต่อเนื่องตามทิศทางที่กำหนด (เช่น ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น หรือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการขยายตัวจากความร้อน เป็นต้น) ซึ่งตรงข้ามกับวัสดุเชิงประกอบแบบแซนด์วิชหรือลามิเนต (Sandwich/Laminated Composite Materials) เพราะวัสดุประเภทนี้มีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติอย่างกะทันหันบริเวณผิวสัมผัสของวัสดุในแต่ละชนิดและเมื่อมีน้ำหนักบรรทุกมากระทำหรือมีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิจะทำให้เกิดความเข้มของความเค้น (Stress Concentrations) และความไม่ต่อเนื่องของความเค้นขึ้นซึ่งจะทำให้เกิดปัญหาการแยกชั้นและการลื่นไถลบริเวณผิวสัมผัส (Delamination and Slipping) [1],[2]

นอกจากนี้ วัสดุเชิงประกอบแบบ FGMs ยังมีคุณสมบัติโดดเด่นอีกหลายด้าน เช่น มีความแข็งแรงสูง น้ำหนักเบาและมีความต้านทานความร้อนสูง เป็นต้น ด้วยคุณสมบัติดังกล่าวจึงทำให้วัสดุเชิงประกอบแบบ FGMs ถูกนำไปประยุกต์ใช้งานอย่างแพร่หลายในหลากหลายด้าน ไม่ว่าจะเป็นวิศวกรรมการบิน วิศวกรรมยานยนต์ วิศวกรรมไฟฟ้า ชีวการแพทย์และอื่นๆ [3] อย่างไรก็ตาม ในกระบวนการผลิตพบว่าจะเกิดรูพรุนขึ้น โดยลักษณะการกระจายของรูพรุนนั้นจะขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุที่ใช้และวิธีการผลิต ยกตัวอย่างเช่น Zhu et al. [4] ได้สร้างวัสดุเชิงประกอบแบบ FGMs จากเซอร์โคเนียมไดออกไซด์ (ZrO_2) และนิโครม (NiCr) ด้วยวิธี Powder Metallurgy และพบว่ารูพรุนเกิดขึ้นในกระบวนการเผา (Sintering) เนื่องจากอุณหภูมิการแข็งตัว (Solidification Temperatures) ของแต่ละองค์ประกอบในวัสดุมีค่าแตกต่างกัน โดยพบว่ารู

พรุนมีลักษณะการกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ นอกจากนี้งานวิจัยของ Wattanasakulpong et al. [5] ได้ใช้วิธี A multistep sequential infiltration technique ในการสร้างคานเชิงประกอบแบบ FG จากอะลูมิเนียมออกไซด์ (Al_2O_3) และอีพ็อกซี (Epoxy) จากการเตรียมตัวอย่างคานพบว่าคานเกิดรูพรุนบริเวณตรงกลางมากกว่าบริเวณอื่นๆ เนื่องจากในกระบวนการแทรกเข้าไปของอีพ็อกซีเป็นไปอย่างไม่สมบูรณ์ ดังนั้น จึงต้องพิจารณาถึงผลกระทบของรูพรุนเพื่อให้การใช้งานมีความปลอดภัยและเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

สำหรับคานที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบแบบ FGMs ซึ่งเรียกว่า “คานเชิงประกอบแบบ FG (Functionally Graded Beam)” เป็นโครงสร้างที่สำคัญทางวิศวกรรมและสามารถพบได้ในหลากหลายอุปกรณ์ เช่น ตัวกระตุ้น/เซ็นเซอร์ (Actuators/Sensors) [6] ใบพัดกังหัน (Turbine Blades) [7] และแขนหุ่นยนต์ (Robot Arms) [8] เป็นต้น อีกทั้งยังพบว่า คานเชิงประกอบแบบ FG ได้มีการประยุกต์ใช้งานด้วยการวางหรือฝังไว้ในฐานรากยึดหุ่นเพื่อปรับปรุงคุณสมบัติเชิงกล ไม่ว่าจะเป็นการเพิ่มเสถียรภาพให้แก่คาน [9] การเพิ่มขนาดของน้ำหนักบรรทุกวิกฤต [10] หรือการเพิ่มความแข็งแรงให้ระบบโครงสร้าง [11] เป็นต้น จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าการศึกษาพฤติกรรมของคานเชิงประกอบแบบ FG ได้รับความสนใจเป็นอย่างมากจากนักวิชาการ ยกตัวอย่างเช่น Fouda et al. [12] ทำการศึกษาพฤติกรรมการคด การสั่นสะเทือนและการโก่งเดาะของคานเชิงประกอบแบบ FG ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากการศึกษาพบว่าเมื่อดัชนีเลขยกกำลัง (Power Index) และความพรุนมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้คานเกิดการโก่งตัวที่เพิ่มขึ้น ส่วนน้ำหนักบรรทุกวิกฤตและความถี่ธรรมชาติจะมีค่าที่ลดลง Gao et al. [13] นำเสนอวิธี Hybrid Chebyshev Surrogate Model with Discrete Singular Method เพื่อทำการวิเคราะห์พฤติกรรมทางพลศาสตร์ของคานเชิงประกอบแบบ

FG ที่มีคุณสมบัติวัสดุที่ไม่แน่นอน จากการศึกษาพบว่าความไม่แน่นอนของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเป็นพารามิเตอร์ที่มีผลกระทบต่อพฤติกรรมทางพลศาสตร์ของคานามากที่สุด Fouaidi et al. [14] ได้ศึกษาการดัดแบบไม่เชิงเส้นของคานาเชิงประกอบแบบ FG โดยใช้ทฤษฎีแรงเฉือนอันดับหนึ่ง (First-Order Shear Deformation Theory) สำหรับจำลองพฤติกรรมของคานาและได้ศึกษาอิทธิพลของพารามิเตอร์ต่างๆ ของแบบจำลองต่อพฤติกรรมการดัดแบบไม่เชิงเส้นของคานา Phuong et al. [15] วิเคราะห์การดัดของคานาเชิงประกอบแบบ FG วางบนฐานรากยืดหยุ่น โดยใช้ทฤษฎีคานาของ Timoshenko ในการอธิบายพฤติกรรมของคานาและใช้วิธีนาเวียร์ (Navier Solution) ในการหาคำตอบของปัญหา Penna and Feo [16] ศึกษาพฤติกรรมทางพลศาสตร์แบบไม่เชิงเส้นของคานาเชิงประกอบแบบ FG ขนาดนาโนวางบนฐานรากแบบ Winkler และใช้วิธีกาลูเออร์คินในการหาคำตอบจากการวิเคราะห์พบว่าค่าการเพิ่มขึ้นของค่าความแข็งแรงของฐานรากและค่าการโก่งตัวเริ่มต้นทำให้อัตราส่วนความถี่แบบไม่เชิงเส้นมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย Nguyen et al. [17] ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมการโก่งเดาะ การดัดและการสั่นสะเทือนของคานาเชิงประกอบแบบ FG ด้วยการใช้อธิบายทฤษฎีแรงเฉือนแบบสองตัวแปรอย่างง่าย (A Simple Two-Variable Shear Deformation Theory) และได้อธิบายถึงผลกระทบของรูพรุน ลักษณะการกระจายคุณสมบัติของวัสดุและความเครียดเนื่องต่อค่าของความถี่ธรรมชาติ น้ำหนักบรรทุกวิกฤต การโก่งตัวของคานาและความถี่ที่เกิดขึ้น นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยอื่นๆ ที่ทำการศึกษาพฤติกรรมของคานาเชิงประกอบแบบ FG อีกจำนวนมากซึ่งสามารถศึกษาได้จากงานของ Boggarapu et al. [18]

แม้ว่าม้งานวิจัยจำนวนมากที่ทำการศึกษาพฤติกรรมของคานาเชิงประกอบแบบ FG แต่พบว่ายังไม่มีการนำเสนอแบบจำลองที่กำหนดให้ลักษณะการกระจายของรูพรุนเป็นแบบไม่สม่ำเสมอ (Uneven Distribution) และแบบ SCED (Symmetrical Center Enhanced Distribution, SCED) ร่วมกับการใช้ทฤษฎีคานาของออยเลอร์-เบอร์นูลลี (Euler-Bernoulli Beam Theory) ในอธิบายพฤติกรรมของคานาวางบนฐานรากยืดหยุ่น ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อ

นำเสนอแบบจำลองของคานาเชิงประกอบแบบ FG วางบนฐานรากยืดหยุ่นและพิจารณาถึงผลกระทบจากรูพรุนของวัสดุที่มีลักษณะการกระจายแบบไม่สม่ำเสมอและแบบ SCED อย่างไรก็ดีตาม ในการประยุกต์ใช้แบบจำลองการกระจายของรูพรุนตามที่เสนอนี้จำเป็นต้องที่จะต้องปรับพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องในแบบจำลองให้มีความสอดคล้องกับผลการตรวจวัดจากตัวอย่างจริง เนื่องจากการกระจายตัวของรูพรุนมีค่าที่ไม่แน่นอนซึ่งจะขึ้นอยู่กับวัสดุที่ใช้และวิธีการผลิต จากนั้นงานวิจัยนี้ได้ทำการพัฒนาคำตอบเชิงวิเคราะห์และเปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับวิธีกาลูเออร์คิน ไฟไนต์เอลิเมนต์ (Galerkin Finite Element Method) เพื่อยืนยันความถูกต้องของคำตอบ ซึ่งวิธีกาลูเออร์คินไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นเป็นวิธีหนึ่งของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals) โดยจะกำหนดให้ฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting Function) มีฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) และเป็นวิธีที่สะดวกสำหรับปัญหาที่เขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ นอกจากนี้ งานวิจัยนี้ยังได้อธิบายอิทธิพลของพารามิเตอร์ต่างๆ ของแบบจำลองต่อพฤติกรรมดัดของคานา

2. ทฤษฎีและสมการควบคุมของปัญหา

2.1.แบบจำลองของวัสดุ

งานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของคานามีการเปลี่ยนแปลงตามความหนาและเป็นไปตามกฎกำลัง (Power Law Distribution) อีกทั้งยังพิจารณาถึงอิทธิพลของรูพรุนจากการวิจัยของ Wattanasakulpong et al. [5] ได้แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองการกระจายตามกฎกำลังมีความสอดคล้องกับผลการตรวจวัดตัวอย่างคานาเชิงประกอบแบบ FG ที่ทำจากอะลูมิเนียมออกไซด์ (Al_2O_3) และอีพ็อกซี (Epoxy) ด้วยการปรับค่าดัชนีเลขยกกำลังให้เหมาะสม โดยแบบจำลองการกระจายตามกฎกำลังที่พิจารณาผลของรูพรุนสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1) [19]

$$E(z) = E_b + (E_t - E_b) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p - \phi(z) \quad (1)$$

เมื่อ E_t คือโมดูลัสยืดหยุ่นที่ผิวบนของคานา

E_b คือ โมดูลัสยืดหยุ่นที่ผิวล่างของคาน

h คือ ความหนาของคาน

p คือ ดัชนีเลขยกกำลัง

$\Phi(z)$ คือ ฟังก์ชันการกระจายของรูปพูน

ลักษณะการกระจายของรูปพูนที่จะทำการศึกษาในงานวิจัยนี้มี 2 แบบ ได้แก่ 1) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ และ 2) แบบ SCED ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ (2) และ (3) ตามลำดับ

1) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ [16]

$$\Phi(z) = \frac{e_0}{2} (E_t + E_b) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (2)$$

2) การกระจายแบบ SCED [19]

$$\Phi(z) = \frac{e_0}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(E_b + (E_t - E_b) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p\right) \quad (3)$$

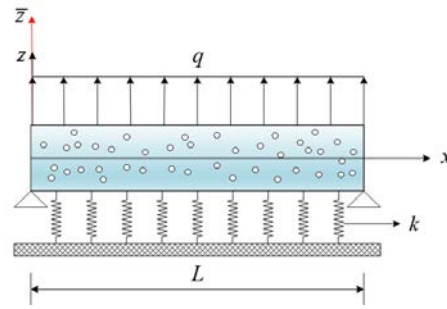
เมื่อ e_0 คือสัมประสิทธิ์ความพูนและหากคานไม่มีรูปพูนค่าของ e_0 จะมีค่าเป็นศูนย์

2.2. สมการควบคุมของคานวางบนฐานรากยืดหยุ่น

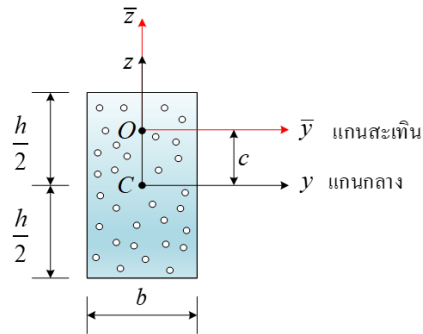
พิจารณาคานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีความกว้าง b หนา h โดยมีขนาดหน้าตัดสม่ำเสมอตลอดความยาว L วางบนฐานรากยืดหยุ่นที่มีค่าความแข็งแรงเท่ากับ k และมีน้ำหนักบรรทุกแบบสม่ำเสมอ q กระทำต่อคาน จากนั้นกำหนดให้แกน y วางตำแหน่งตรงกลางของหน้าตัดและแกน $\bar{y}$ วางบนแกนสะเทิน ซึ่งทั้งสองแกนมีระยะห่างเท่ากับ c แสดงดังรูปที่ 1 สำหรับพฤติกรรมการคดของคานได้กำหนดให้เป็นไปตามทฤษฎีคานของออยเลอร์-เบอร์นูลลี ซึ่งมีสมมุติฐานที่สำคัญคือ ระบายที่ตั้งฉากกับผิวสะเทินก่อนคานเกิดการโก่งตัวยังคงตั้งฉากเช่นเดิมเมื่อคานมีการโก่งตัวและสามารถแสดงการเคลื่อนที่ของตำแหน่งใดๆ บนหน้าตัดคานในแนวแกน x ได้ดังสมการที่ (4)

$$u = \bar{z} \frac{dw}{dx} \quad (4)$$

เมื่อ w คือระยะโก่งตัวของคาน



(ก)



(ข)

รูปที่ 1 คานเชิงประกอบแบบ FG วางบนฐานรากยืดหยุ่นและหน้าตัดคาน (ก) คานเชิงประกอบแบบ FG วางบนฐานรากยืดหยุ่น (ข) หน้าตัดคาน

จากสมการที่ (4) สามารถแสดงค่าความเครียดตามแนวแกน x ได้ดังสมการที่ (5)

$$\varepsilon_x = \bar{z} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5)$$

จากรูปที่ 1 จะเห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่างแกน $\bar{z}$ กับ z มีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (6)

$$\bar{z} = z - c \quad (6)$$

จากนั้นแทนสมการที่ (6) ลงในสมการที่ (5) จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (7)

$$\varepsilon_x = (z - c) \frac{d^2w}{dx^2} \quad (7)$$

สมมุติให้พฤติกรรมของวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic Material) ดังนั้น ความสัมพันธ์ของความเค้นกับความเครียดสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (8)

$$\sigma_x = E(z)\varepsilon_x \quad (8)$$

ในการสร้างสมการควบคุมของปัญหาสามารถทำได้โดยการประยุกต์ใช้หลักการของงานเสมือน (Principle of Virtual Work) และแสดงได้ดังสมการที่ (9)

$$\delta U_B + \delta U_F + \delta V = 0 \quad (9)$$

เมื่อ δU_B , δU_F และ δV คือพลังงานความเครียดเสมือนของคานเนื่องจากการดัด พลังงานความเครียดเสมือนที่สะสมในฐานรากยึดหยุ่นและงานเสมือนเนื่องจากแรงภายนอกกระทำ ตามลำดับ

โดยพลังงานความเครียดเสมือนของคานเนื่องจากการดัดสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (10)

$$\delta U_B = \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (10)$$

ส่วนพลังงานความเครียดเสมือนที่สะสมในฐานรากยึดหยุ่นมีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (11)

$$\delta U_F = \int_0^L k w \delta w dx \quad (11)$$

ในขณะที่งานเสมือนเนื่องจากแรงภายนอกกระทำแสดงได้ดังสมการที่ (12)

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w dx \quad (12)$$

แทนสมการที่ (10)–(12) ลงในสมการที่ (9) ร่วมกับการใช้ความสัมพันธ์จากสมการที่ (7) และ (8) จากนั้นทำการอินทิเกรตแยกส่วน (Integration by Part) จะได้สมการควบคุมของปัญหาดังสมการที่ (13)

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + k w = q \quad (13)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังสมการที่ (14) และ (15)

$$w = 0 \text{ หรือ } Q = 0 \text{ ที่ตำแหน่ง } x = 0, x = L \quad (14)$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \text{ หรือ } M = 0 \text{ ที่ตำแหน่ง } x = 0, x = L \quad (15)$$

โดยที่ Q และ M คือแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ตามลำดับ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (16) และ (17) ตามลำดับ

$$Q = D \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (16)$$

$$M = D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (17)$$

เมื่อ $D = \int_A (z - c)^2 E(z) dA$ คือค่าความแข็งแกร่งการดัดของคาน (Bending Stiffness)

สุดท้ายแทนสมการที่ (17) ลงในสมการที่ (13) จะได้สมการควบคุมของปัญหาที่อยู่ในรูปของระยะโก่งตัว w ได้ดังสมการที่ (18)

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + k w = q \quad (18)$$

สำหรับการหาระยะ c สามารถหาได้จากผลรวมของแรงภายในตามแนวแกน x มีค่าเป็นศูนย์ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (19)

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (19)$$

จากนั้นแทนสมการที่ (8) ลงในสมการที่ (19) และใช้ความสัมพันธ์ของความเครียดจากสมการที่ (7) ทำให้สามารถคำนวณระยะ c ได้ดังสมการที่ (20)

$$c = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} \quad (20)$$

3. การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์

ในการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์จะเริ่มต้นด้วยการเขียนตัวแปรต่างๆ ให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติเพื่อให้สมการต่างๆ อยู่ในรูปอย่างกระชับและสะดวกในการหาคำตอบซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (21)

$$\bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \eta = \frac{kL^4}{D}, \bar{q} = \frac{qL^3}{D} \quad (21)$$

จากสมการที่ (21) สามารถเขียนสมการควบคุมของปัญหา (18) ใหม่ให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติได้ดังสมการที่ (22)

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} + \eta \bar{w} = \bar{q} \quad (22)$$

ส่วนค่าแรงเฉือนและโมเมนต์คดสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (23) และ (24) ตามลำดับ

$$Q = \frac{D}{L^2} \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} \quad (23)$$

$$M = \frac{D}{L} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \quad (24)$$

คำตอบเชิงวิเคราะห์ของสมการที่ (22) เป็นผลรวมของคำตอบแบบเติมเต็ม (Complementary Solution) กับคำตอบแบบเฉพาะ (Particular Solution) และสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (25)

$$\bar{w} = e^{\xi \bar{x}} [C_1 \cos(\xi \bar{x}) + C_2 \sin(\xi \bar{x})] + e^{-\xi \bar{x}} [C_3 \cos(\xi \bar{x}) + C_4 \sin(\xi \bar{x})] + \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (25)$$

เมื่อ $\xi = \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{2}}$ ส่วนค่าคงที่ C_1, C_2, C_3 และ C_4 หาได้จากเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $\bar{x} = 0$ และ $\bar{x} = 1$ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1.คานอย่างง่าย (Simple Beam)

เงื่อนไขขอบเขตของคานอย่างง่ายคือ $\bar{w}(0) = M(0) = 0$ และ $\bar{w}(1) = M(1) = 0$ แทนเงื่อนไขลงในสมการที่ (23) และ (25) จะได้ค่าคงที่ดังสมการที่ (26)–(29)

$$C_1 = - \left[\frac{e^{\xi} \cos(\xi) + 1}{2e^{\xi} \cos(\xi) + e^{2\xi} + 1} \right] \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (26)$$

$$C_2 = - \left[\frac{e^{\xi} \sin(\xi)}{2e^{\xi} \cos(\xi) + e^{2\xi} + 1} \right] \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (27)$$

$$C_3 = - \left[\frac{e^{\xi} \cos(\xi) + e^{2\xi}}{2e^{\xi} \cos(\xi) + e^{2\xi} + 1} \right] \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (28)$$

$$C_4 = - \left[\frac{e^{\xi} \sin(\xi)}{2e^{\xi} \cos(\xi) + e^{2\xi} + 1} \right] \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (29)$$

3.2.คานปลายยื่น (Cantilever Beam)

สำหรับคานปลายยื่นจะมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้ $\bar{w}(0) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0$ และ $Q(1) = M(1) = 0$ จากเงื่อนไขดังกล่าวจะได้ค่าคงที่ดังสมการที่ (30)–(33)

$$C_1 = - \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) - 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{+e^{2\xi} + 1} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (30)$$

$$C_2 = - \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) + 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{-e^{2\xi} - 1} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (31)$$

$$C_3 = - \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) + 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{+e^{4\xi} + e^{2\xi}} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (32)$$

$$C_4 = - \left(\frac{-2e^{2\xi} \cos^2(\xi) + 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{+e^{4\xi} + e^{2\xi}} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (33)$$

3.3.คานปลายยึดแน่น (Fixed End Beam)

คานแบบยึดแน่นมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้ $\bar{w}(0) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0$ และ $\bar{w}(1) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}(1) = 0$ จากเงื่อนไขทำให้ได้ค่าคงที่ดังสมการที่ (34)–(37)

$$C_1 = - \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) - 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{+e^{3\xi} \cos(\xi) + e^{3\xi} \sin(\xi)} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (34)$$

$$C_2 = - \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) + 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{-e^{2\xi} - e^{3\xi} \cos(\xi) + e^{3\xi} \sin(\xi)} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (35)$$

$$C_3 = - \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) + 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{+e^{4\xi} - e^{3\xi} \cos(\xi) - e^{3\xi} \sin(\xi)} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (36)$$

$$C_4 = - \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) - 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{-e^{4\xi} + e^{3\xi} \cos(\xi) + 3e^{3\xi} \sin(\xi)} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (37)$$

3.4.คานยื่นปลายหมุน (Propped Cantilever Beam)

คานปลายยื่นปลายหมุนมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้ $\bar{w}(0) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0$ และ $\bar{w}(1) = M(1) = 0$ ซึ่งทำให้ได้ค่าคงที่ดังสมการที่ (38)–(41)

$$C_1 = - \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) + 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{-e^{3\xi} \cos(\xi) - e^{\xi} \cos(\xi) - e^{2\xi} + 1} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (38)$$

$$C_2 = \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) - 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{+e^{3\xi} \sin(\xi) - 2e^{\xi} \cos(\xi)} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (39)$$

$$C_3 = \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) - 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{-e^{3\xi} \cos(\xi) - e^{\xi} \cos(\xi) + e^{4\xi} - e^{2\xi}} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (40)$$

$$C_4 = \left(\frac{2e^{2\xi} \cos^2(\xi) + 2e^{2\xi} \sin(\xi) \cos(\xi)}{-2e^{3\xi} \cos(\xi) - e^{3\xi} \sin(\xi) - e^{\xi} \sin(\xi)} \right) \frac{\bar{q}}{\eta} \quad (41)$$

4. การหาคำตอบด้วยวิธีกัลเลอร์กินไฟไนต์เอลิเมนต์

วัตถุประสงค์ในการพัฒนาวิธีกัลเลอร์กินไฟไนต์เอลิเมนต์ก็เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่ได้ทำการสร้างขึ้นมาก่อนหน้านี้ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

เริ่มต้นทำการคูณฟังก์ชันน้ำหนักเข้ากับสมการที่ (18) จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดความยาวคานและกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (42)

$$\int_0^L \left(D \frac{d^4 w}{dx^4} + kw - q \right) \bar{v} dx = 0 \quad (42)$$

เมื่อ $\bar{v}$ คือฟังก์ชันน้ำหนัก ต่อมาทำการอินทิเกรตแยกส่วนสมการที่ (42) จนกระทั่งได้ดังสมการที่ (43)

$$D \int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} dx + k \int_0^L w \bar{v} dx - q \int_0^L \bar{v} dx + \left(Q \bar{v} + M \frac{d\bar{v}}{dx} \right) \Big|_0^L = 0 \quad (43)$$

ทำการแบ่งคานออกเป็นชิ้นส่วนย่อย (Element) จำนวน N_E ชิ้น และกำหนดให้แต่ละชิ้นส่วนประกอบด้วยจุดต่อ (Node) จำนวน 2 จุด โดยแต่ละจุดต่อมีดีกรีความอิสระเท่ากับ 2 ได้แก่ 1) การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง w_i และ 2) มุมหมุน $\theta_i = dw_i/dx$ ($i = 1, 2$) แสดงดังรูปที่ 2 จากนั้นทำการประมาณระยะการโก่งตัวในแต่ละชิ้นส่วนย่อยจากการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและมุมหมุนของจุดต่อทั้งสองข้างซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (44)

$$w = [N]\{d\} \quad (44)$$

เมื่อ $\{d\} = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2]$ คือเวกเตอร์การเคลื่อนที่ของจุดต่อและ $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$ คือเมตริกฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม (Cubic Polynomial Shape Function) ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (45)–(48)

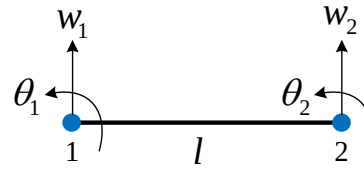
$$N_1 = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \quad (45)$$

$$N_2 = x - 2 \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (46)$$

$$N_3 = 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \quad (47)$$

$$N_4 = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \quad (48)$$

เมื่อ l คือ ความยาวของชิ้นส่วนย่อย



รูปที่ 2 ลักษณะชิ้นส่วนย่อยของคานและดีกรีความอิสระของจุดต่อ

สำหรับวิธีการจลน์ไฟไนต์เอลิเมนต์จะกำหนดให้ฟังก์ชันน้ำหนักเป็นฟังก์ชันรูปร่าง ($\bar{v}_i = N_i$, $i = 1, 2, 3, 4$) จากนั้นแทนสมการที่ (44) ลงในสมการที่ (43) และแทนฟังก์ชันน้ำหนักด้วยฟังก์ชันรูปร่างซึ่งจะทำให้ได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (49)

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (49)$$

เมื่อ $\{\Delta\} = \sum_{i=1}^{N_E} \{d\}$ คือเวกเตอร์การเคลื่อนที่ของจุดต่อ $[K] = \sum_{i=1}^{N_E} [k_e]$ คือเมตริกค่าความแข็งแกร่งของระบบโครงสร้างและ $\{F\} = \sum_{i=1}^{N_E} \{f_e\}$ คือเวกเตอร์ของน้ำหนักบรรทุก โดยที่เมตริก $[k_e]$ และเวกเตอร์ $\{f_e\}$ ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (50) และ (51) ตามลำดับ

$$[k_e] = \frac{D}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} \\ \frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} & \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} \\ \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} & \frac{13l}{35} & -\frac{11l^2}{210} \\ -\frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & -\frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\{f_e\} = \frac{q}{12} \begin{Bmatrix} 6l \\ l^2 \\ 6l \\ -l^2 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

ในการหาคำตอบทำได้ด้วยการแทนเงื่อนไขขอบเขตลงในสมการที่ (49) และทำการแก้สมการดังกล่าวจนได้เวกเตอร์การเคลื่อนที่ของจุดต่อ $\{\Delta\}$ จากนั้นสร้างเวกเตอร์ $\{d\}$ จากเวกเตอร์ $\{\Delta\}$ และทำการแทนเวกเตอร์ $\{d\}$ ที่ได้ลงในสมการที่ (44) ก็จะทำให้ได้ระยะการโก่งตัวของคานในแต่ละชิ้นส่วนย่อย

5. ผลการวิเคราะห์และอภิปรายผล

งานวิจัยนี้จะสมมุติให้คานาทำจากอะลูมิเนียมออกไซด์/อะลูมิเนียม ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$) เพื่อศึกษาผลกระทบของรูปพจน์ต่อพฤติกรรมการค้ำตามแบบจำลองที่นำเสนอ โดยวัสดุเชิงประกอบแบบ FGMs ที่ทำขึ้นจากอะลูมิเนียมออกไซด์/อะลูมิเนียมนั้นจะมีความแข็งแรงสูง ด้านทานความร้อนและการกัดกร่อนได้ดี และพบว่ามีประสิทธิภาพใช้งานด้านวิศวกรรมยานยนต์และวิศวกรรมอวกาศ [3],[20],[21] เช่น จานเบรก, ปลูกเครื่องยนต์, พัดลมในเครื่องยนต์และใบพัดกังหันก๊าซ เป็นต้น โดยคุณสมบัติของอะลูมิเนียมออกไซด์และอะลูมิเนียมรวมถึงพารามิเตอร์ต่างๆ ของคานาที่ใช้ในการวิเคราะห์แสดงดังตารางที่ 1

5.1. ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงวิเคราะห์

ก่อนทำการศึกษาพฤติกรรมการค้ำของคานาจะเริ่มต้นด้วยการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากคำตอบเชิงวิเคราะห์กับคำตอบจากวิธีกัลเลอร์กินไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่ได้พัฒนาขึ้นมา โดยขั้นตอนต่างๆ ของวิธีกัลเลอร์กินไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่ 4 จะถูกพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งเขียนด้วยโปรแกรม MATLAB สำหรับข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์กำหนดให้เป็นไปตามตารางที่ 1 และให้รูปพจน์การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอโดยค่าดัชนีเลขยกกำลัง p และสัมประสิทธิ์ความพูน e_0 มีค่าเท่ากับ 2 และ 0.5 ตามลำดับ

ตารางที่ 1 คุณสมบัติต่างๆ ของคานาเชิงประกอบแบบ FG

คุณสมบัติ	ค่าต่างๆ
โมดูลัสยืดหยุ่นที่ผิวบน E_t (Al_2O_3)	380 GPa
โมดูลัสยืดหยุ่นที่ผิวล่าง E_b (Al)	70 GPa
ความยาวคานา L	5 m
ความกว้างของหน้าตัด b	0.2 m
ความหนาของหน้าตัด h	0.4 m
ค่าความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุ่น k	$1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
น้ำหนักบรรทุกแบบสม่ำเสมอ q	$1 \times 10^4 \text{ N/m}$

สำหรับความถูกต้องของการวิเคราะห์ด้วยวิธีกัลเลอร์กินไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นส่วนย่อย อย่างไร

ก็ตาม หากใช้ชั้นส่วนย่อยที่มีจำนวนมากก็จะทำให้การคำนวณใช้เวลามากขึ้นตามไปด้วย ตารางที่ 2 แสดงระยะการโก่งตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของคานาแบบต่างๆ ซึ่งจะเห็นว่าคำตอบที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าที่สอดคล้องกัน โดยผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีกัลเลอร์กินไฟไนต์เอลิเมนต์จะให้คำตอบที่เท่ากับวิธีเชิงวิเคราะห์เมื่อมีจำนวนชั้นส่วนย่อยตั้งแต่ 8 ชั้นเป็นต้นไป ดังนั้นจากผลดังกล่าวสามารถยืนยันความถูกต้องของคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่ได้พัฒนาขึ้นมาและจะนำไปใช้ในการศึกษาพฤติกรรมการค้ำของคานาต่อไป

5.2. อิทธิพลของรูปพจน์ต่อค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและตำแหน่งของแกนสะเทิน

รูปที่ 3 แสดงลักษณะการกระจายของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นตลอดความหนาของหน้าตัดซึ่งคำนวณจากสมการที่ (1) จากรูปจะเห็นว่าโมดูลัสยืดหยุ่นที่ผิวบนและผิวล่างมีค่าเท่ากับ 380 GPa และ 70 GPa ตามลำดับ เนื่องจากที่ตำแหน่งผิวบนมีส่วนประกอบเป็นอะลูมิเนียมออกไซด์ (Al_2O_3) 100% และอะลูมิเนียม (Al) 0% ในทางกลับกันที่ผิวล่างจะมีส่วนประกอบของอะลูมิเนียมออกไซด์ (Al_2O_3) 0% และอะลูมิเนียม (Al) 100% นอกจากนี้ยังพบว่าค่าโมดูลัสยืดหยุ่นในช่วงระหว่างผิวบนจนถึงผิวล่างมีค่าที่ลดลงเมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่เพิ่มขึ้นนั้นเป็นเพราะสัมประสิทธิ์ความพูนเป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงปริมาณความพูนของวัสดุ หากวัสดุที่มีความพูนสูงค่าของสัมประสิทธิ์ความพูนก็จะมีค่าสูงตามไปด้วยซึ่งจะส่งผลให้โมดูลัสยืดหยุ่นมีค่าที่ลดลง

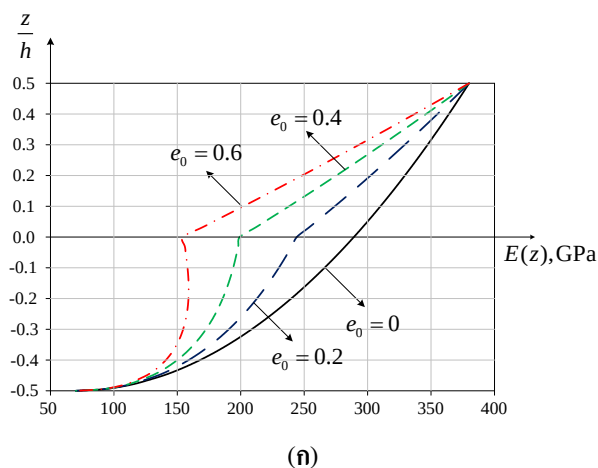
ตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบระยะการโก่งตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลาง ($\bar{x} = 0.5$) ของคานาแบบต่างๆ

วิธีหาคำตอบ	จำนวนชั้นส่วนย่อย	$\bar{w} \times 10^5$	
		1) คานอย่างง่าย	2) คานปลายยื่น
เชิงวิเคราะห์	-	14.7405	36.2882
กัลเลอร์กินไฟไนต์เอลิเมนต์	2	14.7482	36.3014
	4	14.7410	36.2891
	6	14.7406	36.2884
	8	14.7405	36.2882
	10	14.7405	36.2882

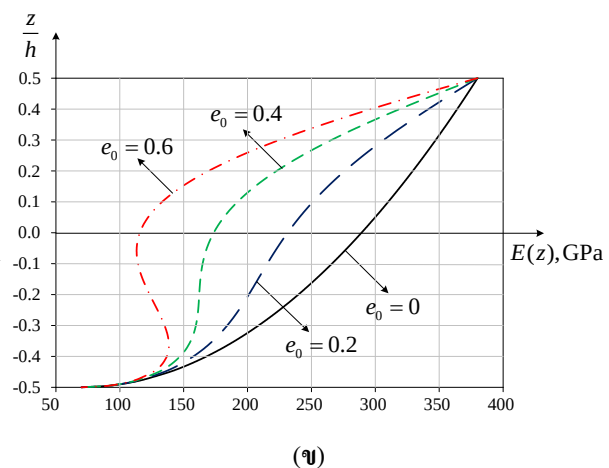
ตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบระยะการ โกงตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลาง ($\bar{x} = 0.5$) ของคานแบบต่างๆ (ต่อ)

วิธีหาคำตอบ	จำนวนชั้นส่วนย่อย	$\bar{w} \times 10^5$	
		3) คานปลายยึดแน่น	4) คานยื่นหนุนปลาย
เชิงวิเคราะห์	-	3.0932	6.1065
กาลเออร์กิ้นไฟไนต์เอลิเมนต์	2	3.0948	6.1098
	4	3.0933	6.1067
	6	3.0932	6.1066
	8	3.0932	6.1065
	10	3.0932	6.1065

รูปที่ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ความพูนกับตำแหน่งของแกนสะเทิน จากรูปพบว่าเมื่อสัมประสิทธิ์ความ



พูนมีค่าเพิ่มขึ้นตำแหน่งของแกนสะเทินจะเลื่อนสูงขึ้นเนื่องจากตำแหน่งของแกนสะเทินเป็นตำแหน่งที่ขนาดของแรงลัพธ์ในแนวแกน x ที่อยู่เหนือแกนสะเทินมีค่าเท่ากับขนาดของแรงลัพธ์ที่อยู่ใต้แกนสะเทินซึ่งแรงลัพธ์ทั้งสองจะแปรผันโดยตรงกับค่าโมดูลัสยืดหยุ่น จากรูปที่ 3 จะเห็นว่าค่าโมดูลัสยืดหยุ่นบริเวณด้านบนจะมีค่าสูงกว่าบริเวณด้านล่าง จึงทำให้ตำแหน่งของแกนสะเทินเลื่อนขึ้นเพื่อให้ขนาดของแรงลัพธ์ทั้งสองมีค่าที่เท่ากันและเมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่เพิ่มขึ้นค่าโมดูลัสยืดหยุ่นบริเวณด้านล่างจะมีค่าน้อยกว่าบริเวณด้านบนเพิ่มมากขึ้นจึงเป็นสาเหตุที่ทำให้ตำแหน่งของแกนสะเทินเลื่อนขึ้นไปมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้พบว่าเมื่อดัชนีเลขยกกำลังมีค่าสูงขึ้นตำแหน่งของแกนสะเทินจะเลื่อนสูงขึ้นตามไปด้วย

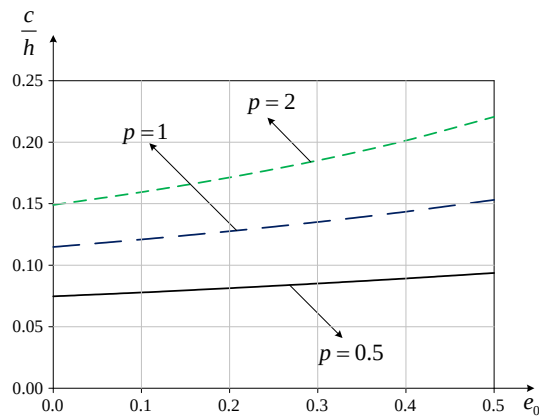


รูปที่ 3 การกระจายของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นตลอดความหนาของหน้าตัดเมื่อค่า $p = 0.5$ (ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ (ข) การกระจายแบบ SCED

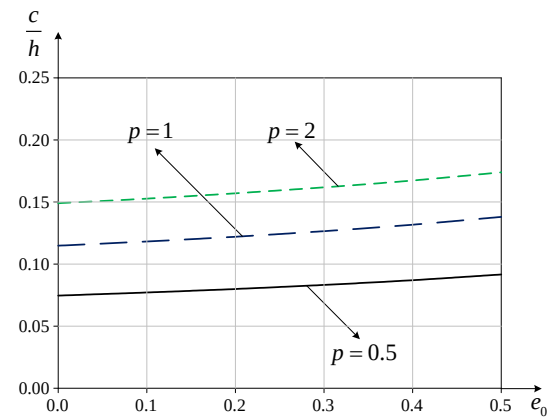
5.3.อิทธิพลของรูปพูนและดัชนีเลขยกกำลังต่อการโก่งตัวของคาน

รูปที่ 5-6 แสดงการโก่งตัวของคานอย่างง่ายและคานปลายยื่น ตามลำดับ เมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่แตกต่างกัน จากรูปทั้งสองพบว่าการ โกงตัวของคานจะมีค่าที่เพิ่มขึ้นเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่สูงขึ้น เพราะการเพิ่มของค่าสัมประสิทธิ์ความพูนจะทำให้โมดูลัสยืดหยุ่นมีค่าที่ลดลงส่งผลให้ความแข็งแกร่งการดัดของคานมีค่าลดลงตามไปด้วย

เพื่อเข้าใจถึงพฤติกรรมนี้มากยิ่งขึ้นจึงได้ทำการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ความพูนกับอัตราส่วนความแข็งแกร่งการดัดของคานซึ่งแสดงดังรูปที่ 7 จากรูปจะเห็นว่าเมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่เพิ่มขึ้นจะทำให้ความแข็งแกร่งการดัดของคานมีค่าที่ลดลง นอกจากนี้พบว่าการกระจายของรูปพูนแบบไม่สม่ำเสมอมีอัตราการลดลงที่มากกว่าการกระจายแบบ SCED



(ก)

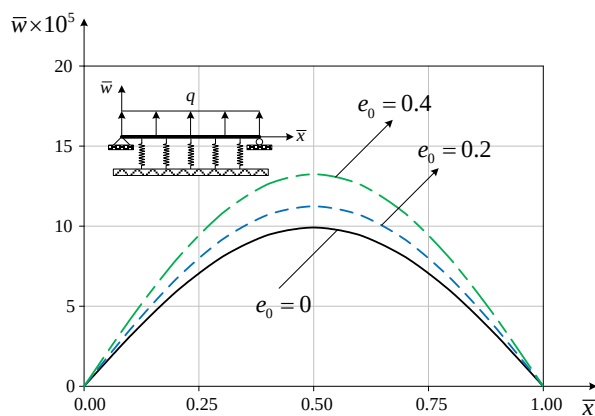


(ข)

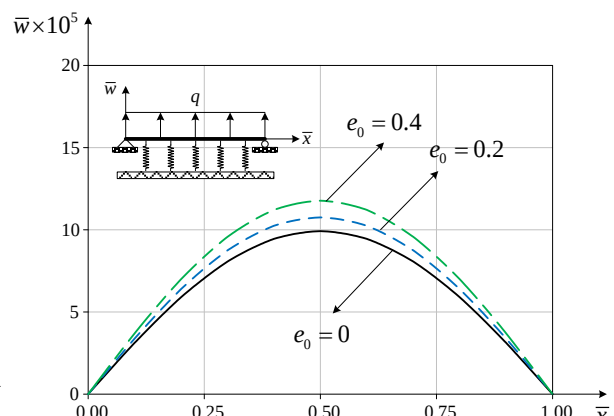
รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ความพูนกับตำแหน่งของแกนสะเทิน (ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ (ข) การกระจายแบบ SCED

ต่อมาจะทำการศึกษาอิทธิพลของดัชนีเลขยกกำลังต่อการโก่งตัวของคานซึ่งดัชนีเลขยกกำลังเป็นพารามิเตอร์ที่กำหนดลักษณะการกระจายและขนาดของโมดูลัสยืดหยุ่นรูปที่ 8-9 แสดงการโก่งตัวของคานอย่างง่ายและคานปลายยื่น ตามลำดับเมื่อดัชนีเลขยกกำลังมีค่าที่แตกต่างกัน จากรูปพบว่า การโก่งตัวของคานจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อดัชนีเลขยกกำลังมีค่าที่เพิ่มขึ้น เพื่อให้เข้าใจถึงพฤติกรรมดังกล่าวมากยิ่งขึ้นจึงได้ทำ

การสร้างลักษณะการกระจายของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นตลอดความหนาของหน้าตัดเมื่อดัชนีเลขยกกำลังมีค่าที่แตกต่างกัน แสดงดังรูปที่ 10 จากรูปจะเห็นว่าเมื่อดัชนีเลขยกกำลังมีค่าที่เพิ่มขึ้น โมดูลัสยืดหยุ่นจะมีค่าที่ลดลง นั่นจึงเป็นสาเหตุที่ทำให้ความแข็งแกร่งการดัดของคานมีค่าที่ลดลงและส่งผลให้การโก่งตัวของคานที่มีค่าดัชนีเลขยกกำลังที่สูงมีการโก่งตัวที่มากกว่าคานที่มีค่าดัชนีเลขยกกำลังที่ต่ำ



(ก)



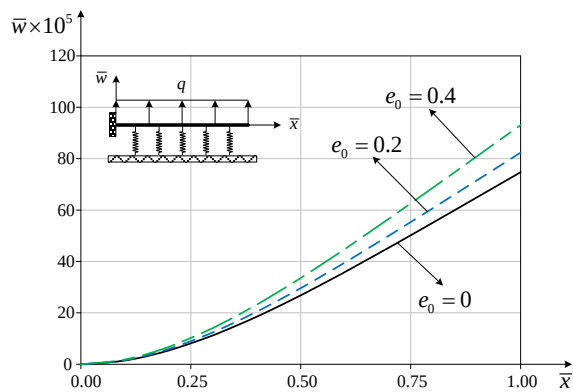
(ข)

รูปที่ 5 การโก่งตัวของคานอย่างง่ายเมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่แตกต่างกันและค่า $p = 2$ (ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ (ข) การกระจายแบบ SCED

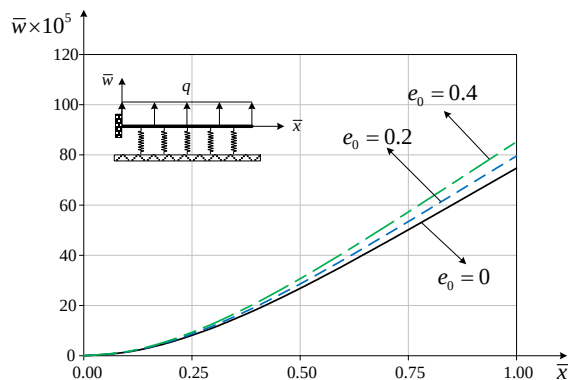
5.4. อิทธิพลของรูปร่างและดัชนีเลขยกกำลังต่อการกระจายของความเค้นบนหน้าตัด

เนื้อหาในส่วนนี้จะทำการวิเคราะห์คานอย่างง่ายและสร้างรูปการกระจายของความเค้น σ_x ตลอดความหนาของ

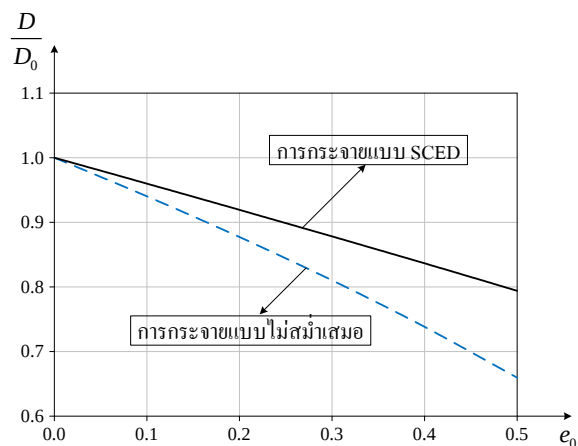
หน้าตัดที่ตำแหน่งตรงกลางคาน เพื่อศึกษาผลกระทบของรูปร่างและดัชนีเลขยกกำลังต่อการกระจายของความเค้นบนหน้าตัด



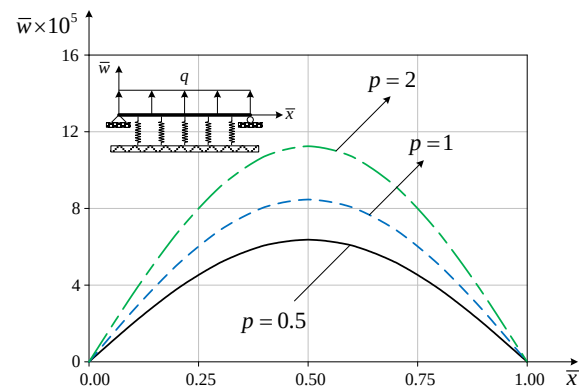
(ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ



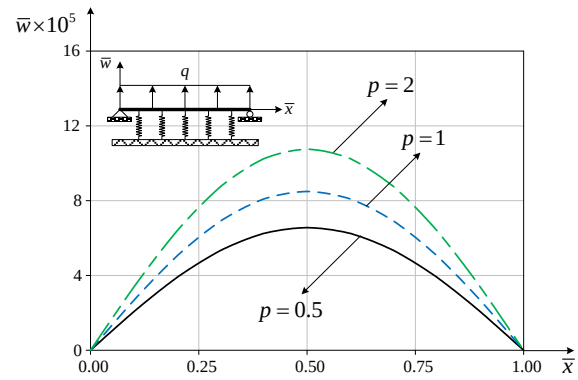
(ข) การกระจายแบบ SCED

รูปที่ 6 การโค้งตัวของคานปลายยื่นเมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่แตกต่างกันและค่า $p = 2$ 

รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ความพูนกับอัตราส่วนความแข็งแรงการค้ำของคาน

เมื่อ D_0 คือ ความแข็งแรงการค้ำของคานที่ไม่มีรูปพูน

(ก)

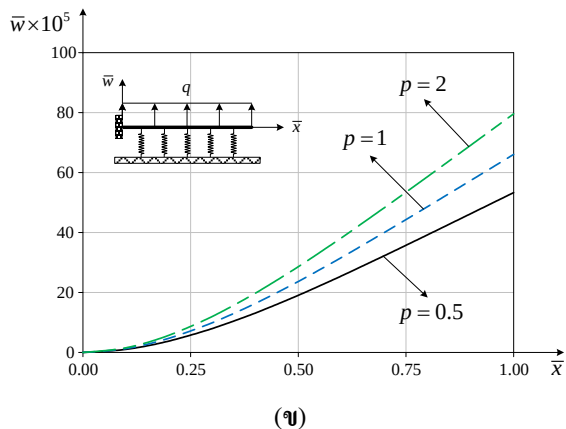
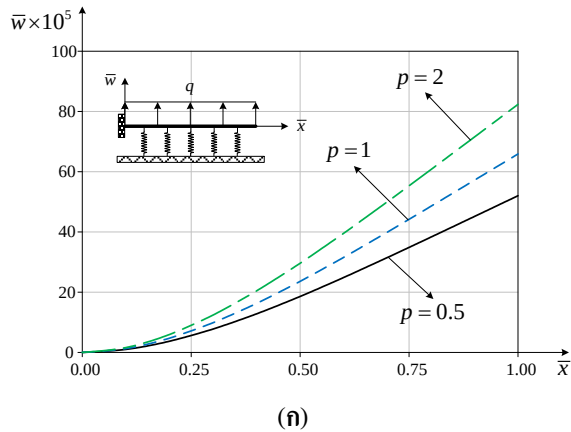


(ข)

รูปที่ 8 การโค้งตัวของคานอย่างง่ายเมื่อดัชนีเลขยกกำลังมีค่าที่แตกต่างกันและค่า $e_0 = 0.2$ (ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ (ข) การกระจายแบบ SCED

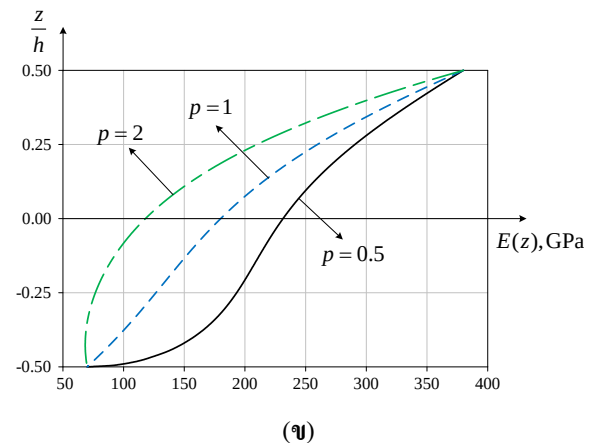
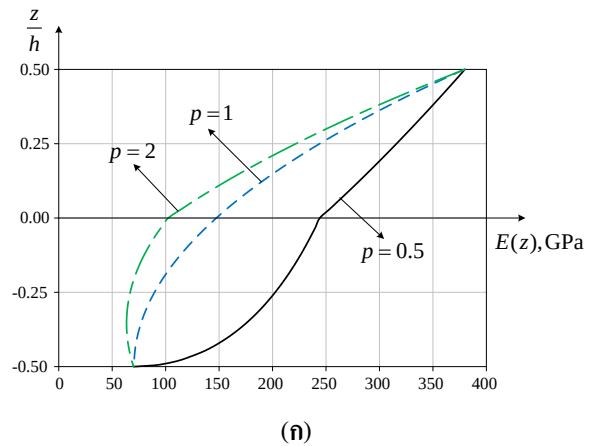
รูปที่ 11 แสดงการกระจายของความเค้น σ_x ตลอดความหนาของหน้าตัดเมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่แตกต่างกัน จากรูปจะเห็นว่าการกระจายของความเค้นดิ่งของการกระจายรูปพูนทั้งสองแบบมีลักษณะที่คล้ายกัน โดยจะมีค่าที่เพิ่มขึ้นเมื่อตำแหน่งนั้นห่างจากแกนสะเทินมากยิ่งขึ้นซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นโค้งและมีค่าสูงสุดที่ผิวบน นอกจากนี้พบว่าค่าสูงสุดจะมีค่าที่ใกล้เคียงกันแม้สัมประสิทธิ์ความพูนจะมีค่าที่แตกต่างกัน ในทางกลับกันการกระจายของความเค้นอัดจะมีลักษณะที่แตกต่างกัน โดยการกระจายของรูปพูนแบบไม่สม่ำเสมอพบว่าความเค้นอัดจะมีค่าที่ลดลงเมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่เพิ่มขึ้นและค่าสูงสุดจะเกิดที่ผิวล่าง ส่วนการกระจายความเค้นอัดของการกระจายของรูปพูนแบบ SCED จะมีลักษณะการกระจายที่ใกล้เคียงกันแม้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ความพูนมีค่าที่แตกต่างกันก็ตามและพบว่าค่าสูงสุดจะเกิดที่ผิวล่าง

โดยคานที่มีสัมประสิทธิ์ความพรุนที่มากกว่าจะให้ค่าความเค้นอัดสูงสุดมากกว่าคานที่มีสัมประสิทธิ์ความพรุนที่น้อยกว่าแต่มีค่าแตกต่างกันไม่มาก



รูปที่ 9 การโก่งตัวของคานปลายยื่นเมื่อคานนี้เลขยกกำลังมีค่าที่แตกต่างกันและค่า $e_0 = 0.2$ (ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ (ข) การกระจายแบบ SCED

รูปที่ 12 แสดงการกระจายของความเค้น σ_x ตลอดความหนาของหน้าตัดเมื่อคานนี้เลขยกกำลังมีค่าที่แตกต่างกัน จากรูปพบว่า การกระจายของรูปพจน์ทั้งสองแบบให้ลักษณะการกระจายของความเค้นที่คล้ายกัน โดยความเค้นดึงจะมีค่าที่เพิ่มขึ้นตามระยะห่างจากแกนสะเทินและมีค่าสูงสุดที่ผิวบนซึ่งค่าสูงสุดนี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อคานนี้เลขยกกำลังมีค่าที่เพิ่มขึ้น ส่วนความเค้นอัดพบว่ามีค่าที่ไม่แน่นอนตามระยะห่างจากแกนสะเทิน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อคานนี้เลขยกกำลังมีค่าเท่ากับ 0.5 ความเค้นอัดจะมีการเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างมากที่บริเวณด้านล่างและพบว่าความเค้นอัดสูงสุดนั้นไม่ได้เกิดที่ผิวล่าง



รูปที่ 10 การกระจายของโมดูลัสยืดหยุ่นตลอดความหนาของหน้าตัดเมื่อคานนี้เลขยกกำลังมีค่าที่แตกต่างกันและค่า $e_0 = 0.2$ (ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ (ข) การกระจายแบบ SCED

5.5.อิทธิพลของรูปพจน์และฐานรากยึดหยุ่นต่อโมเมนต์ดัด

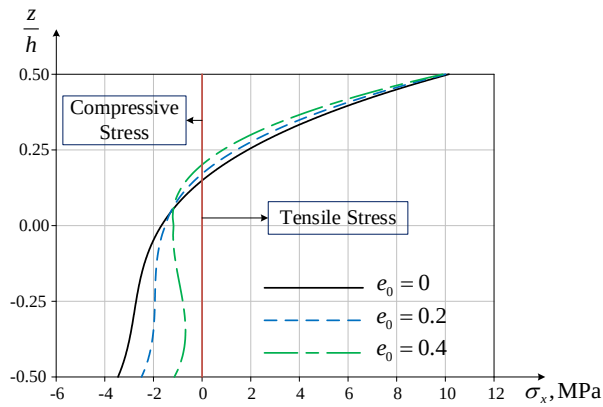
ต่อมาจะทำการวิเคราะห์คานปลายยึดแน่นที่มีค่าความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุ่นที่แตกต่างกันและคำนวณหาโมเมนต์ดัดที่ตำแหน่ง $x = 0$ เพื่อศึกษาผลกระทบของรูปพจน์และฐานรากยึดหยุ่นต่อโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นโดยผลการวิเคราะห์ดังกล่าวจะนำเสนอในรูปของอัตราส่วนโมเมนต์ดัด R_M ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (52)

$$R_M = \frac{M}{M_0} \quad (52)$$

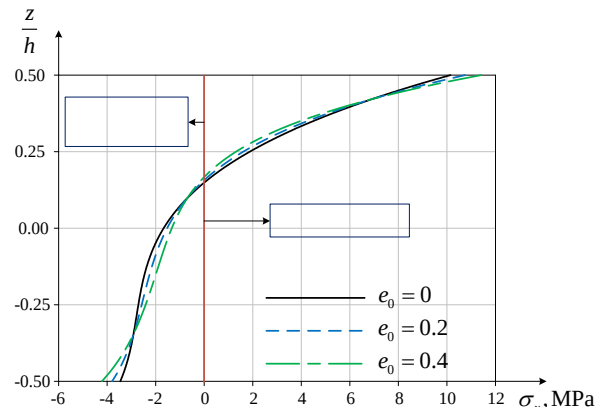
เมื่อ M และ M_0 คือโมเมนต์ดัดของคานที่พิจารณาผลจากรูปพจน์และไม่พิจารณาผลจากรูปพจน์ ตามลำดับ

รูปที่ 13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนโมเมนต์ตัดกับความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุ่นเมื่อสัมประสิทธิ์ความพรมมีค่าที่แตกต่างกัน จากรูปพบว่าอัตราส่วนโมเมนต์ตัดของคานในทุกกรณีมีค่าที่น้อยกว่า 1 แสดงให้เห็นว่าผลกระทบจากฐานพรมทำให้โมเมนต์ตัดที่เกิดขึ้นมีค่าที่ลดลง ซึ่งคานที่มีสัมประสิทธิ์ความพรมที่สูงจะเกิดโมเมนต์ตัดที่น้อยกว่าคานที่มีสัมประสิทธิ์ความพรมที่ต่ำ

นอกจากนี้ เมื่อค่าความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุ่นมีค่าที่เพิ่มขึ้นจะทำให้อัตราส่วนโมเมนต์ตัดมีค่าที่ลดลง โดยคานที่มีสัมประสิทธิ์ความพรมสูงจะมีอัตราการลดลงที่มากกว่าคานที่มีสัมประสิทธิ์ความพรมต่ำ พฤติกรรมดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าฐานรากยึดหยุ่นมีอิทธิพลต่อคานที่มีความพรมสูงมากกว่าคานที่มีความพรมต่ำ

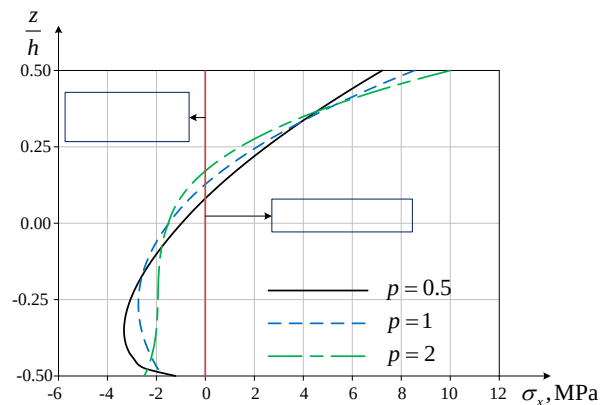


(ก)

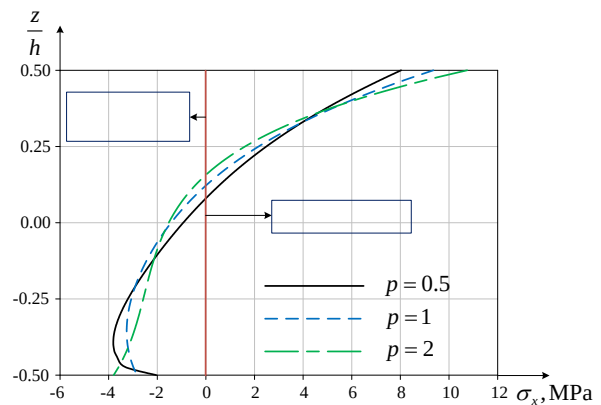


(ข)

รูปที่ 11 การกระจายความเค้น σ_x ตลอดความหนาของหน้าตัดเมื่อสัมประสิทธิ์ความพรมมีค่าที่แตกต่างกันและค่า $p = 2$ (ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ (ข) การกระจายแบบ SCED

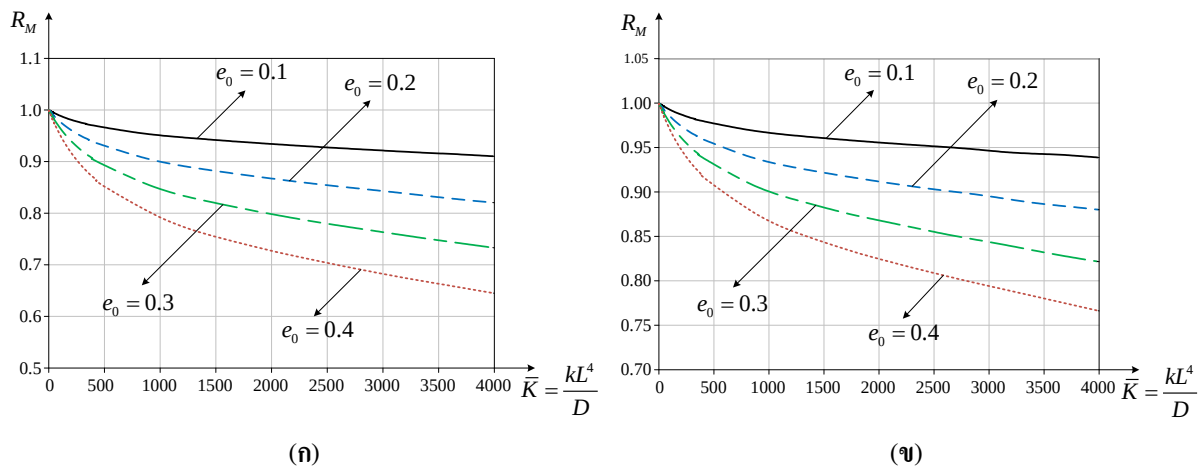


(ก)



(ข)

รูปที่ 12 การกระจายความเค้น σ_x ตลอดความหนาของหน้าตัดเมื่อดัชนีเลขยกกำลังมีค่าที่แตกต่างกันและค่า $e_0 = 0.2$ (ก) การกระจายแบบไม่สม่ำเสมอ (ข) การกระจายแบบ SCED



รูปที่ 13 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนโมเมนต์คดกับค่าความแข็งแรงของฐานรากยึดหุ่นเมื่อคานมีค่าสัมประสิทธิ์ความพูนที่แตกต่างกันและค่า $p = 2$ (ก) การกระจายแบบไม่สมมาตร (ข) การกระจายแบบ SCED

6. สรุปผลการศึกษา

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาแบบจำลองสำหรับการศึกษาพฤติกรรมการคดของคานเชิงประกอบแบบ FG วางบนฐานรากยึดหุ่นและพิจารณาผลกระทบจากพูนของวัสดุ โดยที่คำตอบของปัญหาได้สร้างขึ้นจากวิธีเชิงวิเคราะห์และได้ทำการเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีกัลเลอร์คินไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อประเมินความถูกต้องและพบว่าคำตอบทั้งสองวิธีมีความสอดคล้องกัน จากนั้นทำการศึกษาอิทธิพลของพารามิเตอร์ต่างๆ ของแบบจำลองต่อพฤติกรรมการคดของคาน จากการศึกษาสามารถสรุปได้ดังนี้

- 1) การเพิ่มขึ้นของสัมประสิทธิ์ความพูนทำให้โมดูลัสยึดหุ่นมีค่าที่ลดลง
- 2) เมื่อสัมประสิทธิ์ความพูนและดัชนีเลขยกกำลังมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ตำแหน่งของแกนสะเทินเลื่อนสูงขึ้น นอกจากนี้ยังทำให้ความความแข็งแรงการคดมีค่าที่ลดลงจึงเป็นสาเหตุที่ทำให้คานมีการโก่งตัวที่เพิ่มขึ้น
- 3) ค่าสัมประสิทธิ์ความพูนและดัชนีเลขยกกำลังส่งผลกระทบต่อลักษณะการกระจายของความเค้นตามแนวแกน x บนหน้าตัด
- 4) คานที่มีความพูนสูงจะได้รับอิทธิพลจากฐานรากยึดหุ่นมากกว่าคานที่มีความพูนต่ำ

7. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยพฤติกรรมการคดของคานเชิงประกอบแบบ FG ที่พิจารณาผลกระทบของพูนวางบนฐานรากยึดหุ่นนี้ ได้รับรับการสนับสนุนจากทุนวิจัยประจำปีงบประมาณ 2565 ภายใต้แผนงานวิจัยโครงการการวิจัยและพัฒนาการขับเคลื่อนเศรษฐกิจด้วยนวัตกรรมโดยใช้กระบวนการสะสมศึกษาสำหรับสร้างมูลค่าเชิงรุกบนฐานทุนทรัพยากรและวัฒนธรรมล้านนา สัญญาเลขที่ 2565FF167

เอกสารอ้างอิง

- [1] R. M. Mahamood and E. T. Akinlabi, "Introduction to Functionally Graded Materials," in *Functionally graded materials*, Cham, Switzerland: Springer, 2017, ch. 1, sec. 1, pp. 1–2.
- [2] I. Elishakoff, D. Pentaras and C. Gentilini, "Introduction to Functionally Graded Materials," in *Mechanics of functionally graded material structures*, Toh Tuck Link, Singapore: World Scientific, 2015, ch. 2, pp. 13–14.
- [3] B. Saleh, J. Jiang, R. Fathi, T. Al-hababi, Q. Xu, L. Wang, D. Song and A. Ma, "30 Years of Functionally Graded Materials: An Overview of Manufacturing Methods, Applications and Future Challenges,"

- Composite Part B*, vol. 201, 2020, Art.no. 108376, doi: 10.1016/j.compositesb.2020.108376.
- [4] J. Zhu, Z. Lai, Z. Yin, J. Jeon and S. Lee, "Fabrication of ZrO₂-NiCr Functionally Graded Material by Powder Metallurgy," *Materials Chemistry and Physics*, vol. 68, no. 1–3, pp. 130–135, 2001, doi: 10.1016/S0254-0584(00)00355-2.
- [5] N. Wattanasakulpong, B. G. Prusty, D. W. Kelly and M. Hoffman, "Free Vibration Analysis of Layered Functionally Graded Beams with Experimental Validation," *Materials and Design*, vol. 36, pp. 182–190, 2012, doi: 10.1016/j.matdes.2011.10.049.
- [6] K. E. Harti, M. Rahmoune, M. Sanbi, R. Saadani, M. Bentaleb and M. Rahmoune, "Finite Element Model of Vibration Control for an Exponential Functionally Graded Timoshenko Beam with Distributed Piezoelectric Sensor/Actuator," *actuators*, vol. 8, no. 1, 2019, Art.no. 19, doi: 10.3390/act8010019.
- [7] P. R. Kumar, K. M. Rao and N. M. Rao, "Effect of Taper on Free Vibration of Functionally Graded Rotating Beam by Mori-Tanaka Method," *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, vol. 100, pp. 729–736, 2019, doi: 10.1007/s40032-018-0477-z.
- [8] R. Singh and P. Sharma, "A Review on Modal Characteristics of FGM Structures," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2148, no. 1, 2019, Art.no. 030037, doi: 10.1063/1.5123959.
- [9] S. C. Mohanty, R. R. Dash and T. Rout, "Parametric Instability of a Functionally Graded Timoshenko Beam on Winkler's Elastic Foundation," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 241, no. 8, pp. 2698–2715, 2011, doi: 10.1016/j.nucengdes.2011.05.040.
- [10] S. C. Mohanty, R. R. Dash and T. Rout, "Static and Dynamic Analysis of a Functionally Graded Timoshenko Beam on Winkler's Elastic Foundation," *Journal of Engineering Research and Studies*, vol. 1, no.2, pp. 149–165, 2010.
- [11] N. D. Nguyen, T. P. Vo and T. -K. Nguyen, "An Improved Shear Deformation Theory for Bending and Buckling Response of Thin-walled FG Sandwich I-beams Resting on the Elastic Foundation," *Composite Structures*, vol. 254, 2020, Art.no. 112823, doi: 10.1016/j.compstruct.2020.112823.
- [12] N. Fouda, T. El-midany and A.M. Sadoun, "Bending, Buckling and Vibration of a Functionally Graded Porous Beam Using Finite Elements," *Journal of Applied and Computational Mechanics*, vol. 3, no. 4, pp. 274–282, 2017, doi: 10.22055/JACM.2017.21924.1121.
- [13] K. Gao, R. Li and J. Yang, "Dynamic Characteristics of Functionally Graded Porous Beams with Interval Material Properties," *Engineering Structures*, vol. 197, 2019, Art.no. 109441, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.109441.
- [14] M. Fouaidi, M. Jamal and N. Belouaggadia, "Nonlinear Bending Analysis of Functionally Graded Porous Beams Using the Multiquadric Radial Basis Functions and a Taylor Series-Based Continuation Procedure," *Composite Structures*, vol. 252, 2020, Art.no. 112593, doi: 10.1016/j.compstruct.2020.112593.
- [15] N. T. B. Phuong, T. M. Tu, H. T. Phuong and N. V. Long, "Bending Analysis of Functionally Graded Beam with Porosities Resting on Elastic Foundation Based on Neutral Surface Position," *Journal of Science and Technology in Civil Engineering*, vol. 13, no. 1, pp. 33–45, 2019, doi: 10.31814/stce.nuce2019-13(1)-04.
- [16] R. Penna and L. Feo, "Nonlinear Dynamic Behavior of Porous and Imperfect Bernoulli-Euler Functionally Graded Nanobeams Resting on Winkler Elastic Foundation," *technologies*, vol. 8, no. 4, 2020, Art.no. 56, doi: 10.3390/technologies8040056.
- [17] N. D. Nguyen, T. N. Nguyen, T. K. Nguyen and T. P. Vo, "A new two-variable shear deformation theory for

- bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded porous beams,” *Composite Structures*, vol. 282, 2022, Art.no. 115095, doi: 10.1016/j.compstruct.2021.115095.
- [18] V. Boggarapu, R. Gujjala, S. Ojha, S. Acharya, P.V. Babu, S. Chowdary, D. K. Gara, “State of the Art in Functionally Graded Materials,” *Composite Structures*, vol. 262, 2021, Art.no. 1113596, doi: 10.1016/j.compstruct.2021.1113596.
- [19] M. Dhuria, N. Grover and K. Goyal, “Influence of Porosity Distribution on Static and Buckling Responses of Porous Functionally Graded Plates,” *Structures*, vol. 34, pp. 1458–1474, 2021, doi: 10.1016/j.istruc.2021.08.050.
- [20] G. Udupa, S.S. Rao and K.V. Gangadharan, “Functionally Graded Composite Materials: An Overview,” *Procedia Materials Science*, vol. 5, pp. 1291–1299, 2014, doi: 10.1016/j.mspro.2014.07.442.
- [21] D. Gayen, R. Tiwari and D. Chakraborty, “Static and Dynamic analyses of Cracked Functionally Graded Structural Components: A Review,” *Composites Part B*, vol. 173, 2019, Art.no. 106982, doi: 10.1016/j.compositesb.2019.106982.