

อัตราการเข้าสู่ของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่แบ่งตามโหนดสำหรับการ วิเคราะห์คานเชลลูลาร์ในสองมิติ

Convergence Rate of N-sided Polygonal Node-based Strain Smoothed Finite Element for 2D Castellated Beam Analysis

สุธี ปิยะพิพัฒน์, บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, กษาทพล ปิ่นพัฒนพล และ กำธรเกียรติ มุสิกเกตุ*

¹ภาควิชาวิศวกรรมโยธา, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี คลองหก คลองหลวง
ปทุมธานี 12110

Suthee Piyaphipat, Boonchai Phungpaingam, Khathapol Pinpatthanapong and Kamtornkiat Musiket*

¹ Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Thunyaburi,
Klong Hok, Khlong Luang, Pathumthani, 12110, Thailand

*Corresponding Author E-mail: kamtornkiat@rmutt.ac.th

Received: Nov 11, 2021; Revised: Mar 27, 2022; Accepted: Jun 02, 2022

บทคัดย่อ

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ซึ่งแบ่งโดเมนย่อยออกเป็นเอลิเมนต์รอบโหนดของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมสำหรับปัญหาในสองมิติได้ถูกนำเสนอในครั้งนี้ เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่ได้จากสองรูปแบบคือ DistMesh และ PolyMesher จะถูกแบ่งออกเป็นรูปสี่ด้านเล็ก ๆ ที่เรียกว่าเซลหรือเอลิเมนต์สามเหลี่ยม รอบโหนดของเอลิเมนต์หลักหลายเหลี่ยม ปัญหาทดสอบที่ใช้คือคานเชลลูลาร์ที่มีรูเจาะจำนวนห้ารูเจาะตามความยาวของคานสำหรับเป็นตัวแทนโดเมนของปัญหาที่ไม่ต่อเนื่อง ปลายคานอิสระด้านไกลถูกกระทำด้วยแรงเฉือนในแนวดิ่ง ในขณะที่ปลายด้านตรงข้ามถูกกำหนดให้เป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น ตรวจสอบการวิเคราะห์สามแบบที่รวมถึงแบบสถิตยศาสตร์ การสั่นแบบอิสระและการสั่นแบบชั่วขณะตามลำดับ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะสมมุติให้เมทริกซ์มวลเป็นแบบรวมผลเพื่อหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตเชิงตัวเลขของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณภายในด้วยความสามารถที่รอบด้าน มีเสถียรภาพและประสิทธิภาพในการเป็นเครื่องมือที่ใช้สำหรับการอินทิเกรตตามเวลา การศึกษาครั้งนี้ จะใช้วิธีของนิวมาร์ค การวิเคราะห์แบบสถิตยศาสตร์นั้น PolyMesher ได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพที่ดีกว่า DistMesh อย่างมีนัยสำคัญทั้งในเรื่องความแม่นยำของผลลัพธ์และอัตราการเข้าสู่หาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง ในทางตรงกันข้ามถึงแม้ว่าผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ทางพลศาสตร์แบบอิสระและแบบแรงกระทำ จะแสดงให้เห็นว่ามีความสอดคล้องกับค่าใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง ประสิทธิภาพของ DistMesh ที่ดีกว่าเล็กน้อย สามารถสังเกตได้ในกรณีของการสั่นแบบอิสระ มีข้อสังเกตว่า ความแตกต่างของคำตอบระหว่างการสร้างเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมจากทั้งสองกรณีมีค่าน้อยมากจนสามารถละเลยได้แต่ไม่ใช้กับกรณีของสถิตยศาสตร์

คำสำคัญ: เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม, สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์ย่อยตามโหนด, การสั่นแบบอิสระและแรงกระทำ, คานเชลลูลาร์

Abstract

N-Sided polytype smoothed finite element based on polygonal-node for two-dimensional problem is presented. Polygonal elements obtained from different algorithms namely DistMesh and PolyMesher will be further divided into small quadrilateral shape, referred as smoothing cells or elements, around the corresponding polygonal nodes. Benchmark problem was a castellated beam punched with five holes along its longitudinal axis representing discontinuous problem domain. Its far free edge is subjected to vertical shear traction while the opposite ended is designed as fixed support. Three analyses were investigated including static, free vibration, and transient vibration, respectively. For sake of simplicity, a lumped mass matrix is assumed to avoid numerical integration for shape functions. Due to its versatile yet stability and powerful time integration tool, an implicit Newmark-Beta method is employed. For static analysis, PolyMesher has shown better performance significantly for both accuracy and convergence rate to close-to-exact solution than DistMesh. Contradictory, although the results from free and forced dynamic analyses have shown in good agreement with close-to-exact solutions, a slightly better performance on DistMesh can be observed for free vibration. It is worth noting that the differences of results between both polygonal element creation are very small and negligible but not applicable for static case.

Keywords: N-Sided Polygonal element, Node-based strain smoothed finite element, free and forced vibrations, castellated beam

1 บทนำ

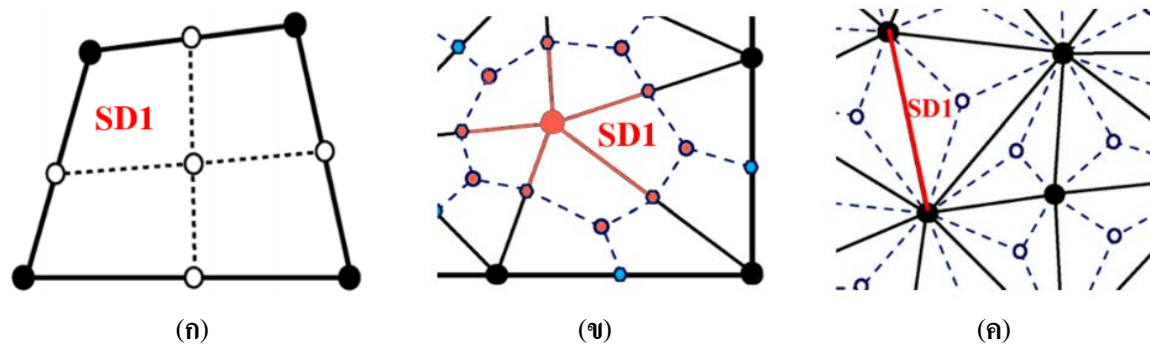
ตั้งแต่วันที่คอมพิวเตอร์มีการพัฒนาอย่างรวดเร็ว สามารถคำนวณปัญหาต่าง ๆ ที่มีความซับซ้อนได้อย่างรวดเร็วรวมทั้งให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Methods) ซึ่งจัดว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพไม่น้อยไปกว่าวิธีการวิเคราะห์ (Analytical Methods) วิธีหนึ่ง ที่เข้ามามีบทบาทมากยิ่งขึ้นเมื่อต้องจัดการกับปัญหาที่มีความซับซ้อนหรือไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงจากการวิเคราะห์ได้โดยตรง

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รับการยอมรับว่ามีประสิทธิภาพสูงสำหรับการแก้ปัญหาทั้งแบบสถิตยศาสตร์และพลศาสตร์ (Static and Dynamics) แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น (Linear and Nonlinear) ของปัญหาของแข็ง ของไหล สนามแม่เหล็กไฟฟ้า วัสดุชีวภาพ และอื่น ๆ ได้อย่างหลากหลาย [1–3] อย่างไรก็ตาม ข้อด้อยของมันในหลายๆ ด้าน [4] ก็กระตุ้นให้เกิดการคิดค้นวิธีใหม่ ๆ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณเชิงตัวเลขให้ดียิ่งขึ้น

วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (Smoothed Finite Element; SFEM) [4] เป็นอีกหนึ่งวิธีที่ถูกคิดค้นขึ้นมาเพื่อเอาชนะข้อด้อยของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในอดีต วิธีดังกล่าวสามารถแบ่งย่อยออกได้ตามลักษณะของการสร้างเอลิ

เมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอ (Smoothing Elements) ของเอลิเมนต์หลัก (Main Elements) ที่สามารถเป็นรูปสามเหลี่ยม (Triangular Element) สี่เหลี่ยม (Quadrilateral Element) หรือรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ (An Arbitrary n-Sided Polygonal Element) จากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนเล็ก ๆ (Discretization) กล่าวคือ หากมีการสร้างเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักดังกล่าว จะเรียกว่า Element-based SFEM หากมีการสร้างเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอรอบโหนดของเอลิเมนต์หลักเรียกว่า Node-based SFEM และหากมีการสร้างเอลิเมนต์ย่อยดังกล่าวรอบขอบของเอลิเมนต์หลักแล้ว เรียกว่า Edge-based SFEM (สำหรับปัญหาใน 2 มิติ) [5] หลักการสร้างเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอดังกล่าว ได้แสดงไว้ในรูปที่ 1(ก)–(ค) ตามลำดับ (SD หมายถึง โดเมน/เอลิเมนต์สม่ำเสมอ)

วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบต่าง ๆ ได้ถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมทั้ง 2 และ 3 มิติ อย่างแพร่หลาย วิเชียร และคณะ [6] ได้ศึกษาผลของอัตราส่วนความยาวด้านทั้งสองแกนต่อประสิทธิภาพของสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแบ่งเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมจำนวน 4 เอลิเมนต์ภายในเอลิเมนต์หลักรูปสี่เหลี่ยม ผลการศึกษาพบว่า



รูปที่ 1 การสร้างเอลิเมนต์ย่อย (ก) ภายใน (ข) ตามโหนด และ (ค) ตามด้านของเอลิเมนต์หลักใน 2 มิติ

ความแม่นยำในการคำนวณขึ้นอยู่กับอัตราส่วนดังกล่าวร่วมกับจำนวนของเอลิเมนต์หลักที่เพิ่มขึ้น วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ ยังได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอย่างหลากหลาย ได้แก่ ปัญหาการถ่ายเทความร้อน [7] ปัญหาการวิเคราะห์อีลาสโตพลาสติค [8] ปัญหาการวิเคราะห์ด้านพลศาสตร์ [9] เป็นต้น ผลการศึกษาเหล่านั้น แสดงให้เห็นความได้เปรียบของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เหนือกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

นอกจากนี้ เสถียรภาพของการวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสร้างเอลิเมนต์ย่อยตามโหนดนั้น พบว่าเป็นแบบ Spatially Stable เนื่องมาจากการที่จำนวนของโดเมนหรือเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอที่ถูกสร้างขึ้นตามโหนดของเอลิเมนต์หลักนั้น มากกว่าข้อกำหนดจำนวนของโดเมนย่อยสม่ำเสมอที่น้อยที่สุดที่ต้องการสำหรับวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์เสมอ จึงทำให้สามารถผ่านการทดสอบ Patch Test สำหรับความมีเสถียรภาพของการวิเคราะห์เชิงตัวเลข [4]

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยในครั้งนี้ มุ่งไปที่การเปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Convergent Rate) ของการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งสำหรับการวิเคราะห์ทางสถิตยศาสตร์ การหาค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequencies) หักล้างดับแรก สำหรับการสั่นสะเทือนแบบอิสระ รวมทั้งการวิเคราะห์แบบแรงกระทำชั่วขณะ (Transient Analysis) ตามลำดับ โดยทำการแบ่งโดเมนของปัญหาในระนาบสองมิติที่สนใจออกเป็นเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนด้านมากกว่าหรือเท่า

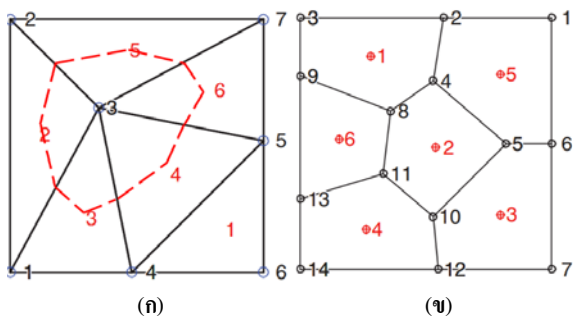
กับสี่ด้าน (N-Sided Polygonal Element) ด้วยอัลกอริทึมที่แตกต่างกันสองแบบคือ DistMesh [10] และ PolyMesher [11] แล้วจึงทำการสร้างเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอ (Smoothing Elements) ด้วยเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (Quadrilateral Element) รอบโหนดของแต่ละเอลิเมนต์หลักทั้งหมด ปัญหาตัวอย่างที่ใช้คือคานเชลลูลาร์ (Castellated Beam) ที่มีรูเจาะวงกลมซึ่งเป็นปัญหาแบบไม่มีความต่อเนื่องภายในโดเมน (Discontinuous Domain) เนื่องจากไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solutions) ของคานตัวอย่างได้ ผลการวิเคราะห์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าว จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งใช้จำนวนของโครงตาข่ายขนาดเล็กแบบ (Quadrilateral element; Q4) เพื่อเป็นตัวแทนของผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Close-to-Exact Solution)

บทความนี้มีรายละเอียดเนื้อหาดังต่อไปนี้ วัตถุประสงค์ของงานวิจัย กล่าวถึงในส่วนที่ 1 หลักการพื้นฐานของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหลายเหลี่ยมที่มีการสร้างเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอรอบโหนดของเอลิเมนต์หลัก การอินทิเกรตเชิงตัวเลขของเวลารวมทั้งเมทริกซ์รวมแบบรวมผล ถูกกล่าวถึงในส่วนที่ 2 วิธีการวิจัย รายละเอียดและขอบเขตของปัญหาตัวอย่างที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ในครั้งนี้ จะถูกกล่าวถึงในส่วนที่ 3 ตามด้วยผลของการศึกษาและบทสรุปในส่วนที่ 4 และ 5 ตามลำดับ

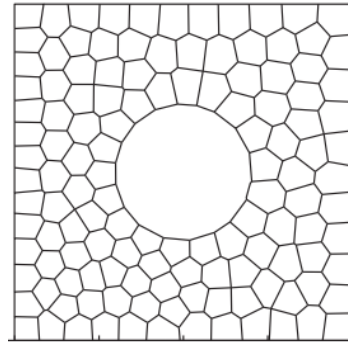
2 สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์หลายเหลี่ยมแบบแบ่งโดเมน ย่อยตามโหนดของเอลิเมนต์หลัก (N-sided Polygonal Node-based Strain Smoothed Finite Element)

2.1 การสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม (n-Sided Polygonal element creations)

การแบ่งโดเมนของปัญหาใน 2 มิติที่สนใจออกเป็น
ส่วนหรือเอลิเมนต์ย่อยนั้นนิยมสร้างโครงตาข่ายโดย
อาศัยโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ใช้งานแพร่หลาย
ทั่วไปหรือจากโปรแกรมที่ถูกสร้างขึ้นมา (In-house
Code) สำหรับการสร้างโครงตาข่ายโดยเฉพาะ เช่น
DistMesh [10], PolyMesher [11], PolyTop [12],
OpenMesh [13] หรือโปรแกรมอื่น ๆ การแบ่งโดเมนของ
ปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมในครั้งนี้ จะ
พิจารณาอัลกอริทึมของการสร้างเอลิเมนต์หลักหลาย
เหลี่ยมจาก DistMesh และ PolyMesher ความแตกต่างที่
สำคัญของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมหลักภายในขอบเขต
ของปัญหาที่ได้คือ วิธีแรกนั้น ทำการสร้างเอลิเมนต์
สามเหลี่ยมภายในโดเมนของปัญหาก่อน จากนั้น จึงทำ
การกำหนดจุดกึ่งกลางด้านและจุดศูนย์กลางของ
สามเหลี่ยมแต่ละรูปก่อน แล้วจึงทำการลากเส้นเชื่อมต่อ
ระหว่างจุดต่าง ๆ เหล่านั้นดังรูปที่ 2(ก) ขั้นตอนสุดท้าย
เป็นการลบด้านและโหนดทั้งหมดที่อยู่ภายในโดเมนของ
ปัญหา จะได้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมต่อไปดังแสดงใน
รูปที่ 2(ข) [14] สำหรับวิธีที่สอง PolyMesher [11] นั้น จะ
เป็นการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมภายในโดเมนของ
ปัญหาโดยตรงดังตัวอย่างในรูปที่ 3



รูปที่ 2 (ก) จุดกึ่งกลางเอลิเมนต์สามเหลี่ยมภายในโดเมน
(ข) เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่ได้



รูปที่ 3 โดเมนของปัญหาที่ถูกสร้างโดย PolyMesher

2.2 การสร้างสนามความเครียดต่อเนื่องภายในเอลิเมนต์ หลัก (Smoothed strain field construction)

ส่วนที่แตกต่างอย่างชัดเจนระหว่างวิธีไฟไนท์เอลิ
เมนต์และสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์คือการสร้างสนาม
ความเครียด (Strain Field) สำหรับวิธีแรกนั้น สนาม
ความเครียดดังกล่าว จะถูกสร้างจากสนามความเครียดที่
เรียกว่าสนามความเครียดที่สอดคล้องกัน (Compatible Strain
Field) ในขณะที่วิธีหลัง จะสร้างจากสนามความเครียด
แบบต่อเนื่องสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field) โดยอาศัย
เทคนิคการทำให้เกิดความต่อเนื่องสม่ำเสมอ (Smoothing
Techniques) เทคนิคดังกล่าวที่ง่ายที่สุดคือ Strain/gradient
Smoothing Technique โดยมีสมมุติฐานคือ ความเครียดภายใน
เอลิเมนต์ย่อยที่มีความต่อเนื่องสม่ำเสมอจะถูกประมาณค่า
มาจากสนามความเครียดที่สอดคล้องกัน (Compatible Strain
Field) หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงของการเปลี่ยนตำแหน่ง
(Displacement Gradient) ในกรณีที่ไม่สามารถหาค่าสนาม
ความเครียดได้โดยตรงและกำหนดให้มีค่าคงที่ภายในเอลิ
เมนต์ย่อยนั้น หัวใจสำคัญอยู่ที่การเลือกใช้ฟังก์ชันต่อเนื่อง
สม่ำเสมอที่เหมาะสมโดยฟังก์ชันที่เลือกใช้นี้ จะต้องม
ีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ ได้แก่ 1) จะต้องไม่เท่ากับศูนย์ ณ
ตำแหน่งที่สนใจ (Locally supported) 2) จะต้องมีความหมาย
เป็นบวกตลอดทั้งโดเมนที่รองรับ 3) จะต้องมีความต่อเนื่อง
จุดที่กำลังพิจารณาและ 4) จะต้องมีความสมมาตรของการรวมกัน
เท่ากับหนึ่ง (Unity Property) [4]

สำหรับในกรณีที่สนามความเครียดที่สอดคล้องกัน
สามารถหาค่าได้อย่างง่ายนั้น สนามความเครียดต่อเนื่อง
สม่ำเสมอจะสามารถคำนวณได้ว่า เป็นค่าเฉลี่ยของสนาม
ความเครียดที่สอดคล้องกันตลอดทั่วทั้งพื้นที่ของเอลิเมนต์

ข้อต่อเนื่องสม่ำเสมอเหล่านั้นนั่นเอง ค่าสนามความเครียดที่ได้นี้ มีค่าคงที่ แต่ในกรณีทั่วไป ซึ่งสนามความเครียดที่สอดคล้องกันนั้น ไม่สามารถคำนวณค่าได้อย่างง่ายนั้น จะใช้สนามของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement Field) แทน จากสมมุติฐานที่ว่าสนามการเปลี่ยนตำแหน่งในวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น จะต้องมีความต่อเนื่องบนขอบเขต Γ_k^s ของเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอและฟังก์ชันต่อเนื่องที่กำหนด จะต้องสามารถทำอินทิเกรตตลอดทั่วทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอ Ω_k^s ได้ เมื่อใช้การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts) หรือทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ของกรีน (Green's Divergence Theory) สมการสนามความเครียดต่อเนื่องสม่ำเสมอสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ (1) [5]

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) \bar{u}(x) d\Gamma \quad (1)$$

โดย $L_n(x)$ คือเมทริกซ์ที่มีองค์ประกอบเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยกับด้านของเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอ ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (2)

$$L_n(x) = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

เมื่อสามารถคำนวณค่าของสนามความเครียดต่อเนื่องสม่ำเสมอได้แล้ว ขั้นตอนอื่น ๆ ต่อจากนี้ไปได้แก่ ขั้นตอนการหาเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Strain-Displacement Matrix) การสร้างสมการสติฟเนสและแรงในระดับเอลิเมนต์ (Element Stiffness Matrix and Force Vector) การรวมกันของสติฟเนสและแรงของทุกเอลิเมนต์ (Assembly of Stiffness Matrix and Force Vector) รวมทั้งการแก้ระบบสมการเชิงเส้น (Linear Equation Solving) เพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่าจะเหมือนกันกับในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ทุกประการ จึงทำให้สามารถนำวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ไปใช้ในการวิเคราะห์ต่อไปได้ในทันที โดยทำการเปลี่ยนแปลงโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพียงเล็กน้อย สมการเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่งหรือที่เรียกกันทั่วไปว่า B-Matrix นั้น สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3)–(4) คือ

$$\bar{B}(x) = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) N(x) d\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{b}_{Ix} & 0 \\ 0 & \bar{b}_{Iy} \\ \bar{b}_{Iy} & \bar{b}_{Ix} \end{bmatrix} \quad (3)$$

เมื่อ

$$\bar{b}_{IJ} = \frac{1}{A_k^s} \sum_{n=1}^{n_k^s} n_{j,n} N_I(X_n^G) L_n, J = x, y \quad (4)$$

และ n_k^s คือจำนวนด้านทั้งหมดของเอลิเมนต์ย่อยที่อยู่ในเอลิเมนต์หลักหรือโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอ X_n^G คือตำแหน่งของจุดของเกาส์ (Gauss Point) สำหรับการอินทิเกรตเชิงตัวเลข ในกรณีของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ ตำแหน่งดังกล่าวจะอยู่ ณ กึ่งกลางด้านของเอลิเมนต์ย่อยซึ่งมีความยาวด้านและเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยกับด้านนั้น ๆ เป็น L_n และ $n_{j,n}$ ตามลำดับ

2.3 การอินทิเกรตเชิงตัวเลขตามเวลา (Time Integration)

สมการของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์หรือสมการไฟไนท์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาด้านพลศาสตร์ในระนาบ 2 มิติ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการที่ (5)

$$\bar{K}d + \bar{C}\dot{d} + \bar{M}\ddot{d} = \bar{F} \quad (5)$$

โดย $\bar{M}, \bar{C}$ หมายถึง เมทริกซ์มวล (Mass Matrix) และเมทริกซ์ของการต้านทานแรงสั่นสะเทือน (Damping Matrix) ตามลำดับ เครื่องหมายจุดด้านบนตัวแปรหมายถึงลำดับของอนุพันธ์เทียบกับเวลา วิธีการอินทิเกรตตามเวลาที่ใช้สำหรับการแก้สมการอนุพันธ์ลำดับสองสมการที่ (5) มีอยู่หลายวิธีเช่น วิธี Crank-Nicholson หรือ Newmark Method [15] เนื่องจากความสามารถและความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีหลังจึงได้รับความนิยมสูงและถูกนำไปใช้ในโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์สำเร็จรูปมากมาย ดังนั้นงานวิจัยครั้งนี้ จึงใช้การอินทิเกรตตามเวลาของ Newmark ในการหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในสมการที่ (5)

สมมุติให้เวลาปัจจุบันของการวิเคราะห์เป็น t_0 และทราบค่าของตัวแปรทั้งหมด ณ เวลาดังกล่าวแล้ว การหาค่าตัวแปรเหล่านั้น ณ เวลาถัดไป $t_1 = t_1 + \Delta t$ โดย θ มีค่าอยู่ระหว่าง $0.5 \leq \theta \leq 1.0$ สามารถแสดงดังสมการที่ (6)–(8) ได้คือ

$$[\bar{M} + \beta(\Delta t)^2 K] d_{i+1} = \beta(\Delta t)^2 F_{i+1} + \bar{M} d_i + (\Delta t) \bar{M} \dot{d}_i + (\Delta t)^2 \bar{M} (0.5 - \beta) \ddot{d}_i \quad (6)$$

$$\dot{d}_{i+1} = \dot{d}_i + (\Delta t) [(1 - \gamma) \ddot{d}_i + \gamma \ddot{d}_{i+1}] \quad (7)$$

$$d_{i+1} = d_i + (\Delta t) \dot{d}_i + (\Delta t)^2 [(0.5 - \beta) \ddot{d}_i + \beta \ddot{d}_{i+1}] \quad (8)$$

โดยค่าของ β และ γ คือค่าคงที่ โดยทั่วไปนิยมกำหนดให้ มีค่าเท่ากับ 0.25 และ 0.5 ตามลำดับเพื่อให้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีเสถียรภาพ [16]

เพื่อความสะดวกสำหรับการวิเคราะห์ครั้งนี้ กำหนดให้ ไม่รวมแรงต้านทานของการสั่นสะเทือนเข้าไว้ใน การคำนวณ เพราะฉะนั้น สำหรับการวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติ สมการที่ (5) จะลดรูปลงเป็นสมการอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ (Homogeneous Differential Equation) ดังสมการที่ (9)

$$\bar{K}d + \bar{M}\ddot{d} = 0 \quad (9)$$

2.4 เมทริกซ์มวลแบบรวมผล (Lumped Mass Matrix)

เพื่อหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างการประมาณ ภายใน (Shape Functions) เพื่อหาค่าเมทริกซ์มวลที่เรียกว่า Consistent Mass matrix นั้น สามารถทำได้ด้วยการหาเมทริกซ์มวลแบบรวมผลแทน โดยค่าที่ได้จากการวิเคราะห์นั้น มีความแม่นยำที่มากกว่าการใช้เมทริกซ์มวลแบบ Consistent Mass matrix สำหรับปัญหาด้านพลศาสตร์ [17] สำหรับเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอรูปสี่เหลี่ยมรอบ โหนดของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนั้น เมทริกซ์ ดังกล่าวสามารถเขียนเป็นสมการที่ (10) ได้ดังนี้

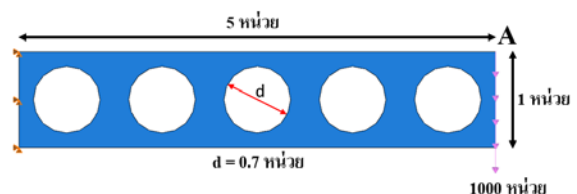
$$[\bar{K} - \omega^2 \bar{M}]d = 0 \quad (10)$$

เมื่อ $\rho, t, A, I_{8 \times 8}$ คือความหนาแน่นมวลของเอลิเมนต์ ความหนาของเอลิเมนต์ที่สนใจ พื้นที่ของเอลิเมนต์และเมทริกซ์อันดับขนาด 8×8 ตามลำดับ

3 วิธีการและผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์คานเชลลูลาร์ (Castellated Beam) ที่มีรูเจาะเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 0.7 หน่วยจำนวนทั้ง

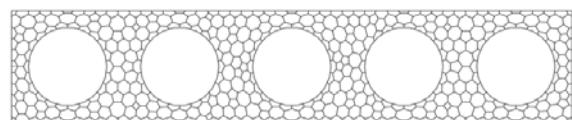
สิ้น 5 รูเจาะตามความยาวของคาน อัตราส่วนความยาวต่อ ความสูงของคานกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 5:1 เพื่อป้องกันการ เกิดพฤติกรรม Shear Locking ด้านซ้ายของคานเป็น ฐานรองรับแบบยึดแน่นในขณะที่ปลายคานอิสระด้านตรง ข้ามรับแรงเฉือนขนาด 1,000 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 4 ค่า โมดูลัสยืดหยุ่นและค่าอัตราส่วนปึงของกำหนดให้มีค่า เท่ากับ $3E+07$ และ 0.28 ตามลำดับ เพื่อความสะดวกในการ วิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ขนาดต่าง ๆ ของคานถูกกำหนดให้ไม่มีหน่วย คานดังกล่าว ถูกแบ่ง ออกเป็นโครงตาข่ายแบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่มีขนาด หยาบสุด (เอลิเมนต์ขนาดใหญ่) ถึงละเอียดสุด (เอลิเมนต์ ขนาดเล็ก) จำนวน 5 ช่วงโดยมีจำนวนโหนดของเอลิเมนต์ เท่ากับ 448, 542, 829, 1,525 และ 2,500 โหนดตามลำดับ สำหรับการวิเคราะห์แบบสถิติศาสตร์ ตัวอย่างของโครงตา ข่ายแบบรูปสี่เหลี่ยมสำหรับใช้เป็นค่าในการอ้างอิงซึ่ง คำนวณด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ แสดงไว้ในรูปที่ 5(ก) ในขณะที่ตัวอย่างโครงตาข่ายของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม สำหรับการวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ แสดงไว้ในรูปที่ 5(ข) ตามลำดับ



รูปที่ 4 โมเดลของคานเชลลูลาร์



(ก)



(ข)

รูปที่ 5 (ก) โครงตาข่ายรูปสี่เหลี่ยม (ข) โครงตาข่ายรูปหลายเหลี่ยม

3.1 การเปลี่ยนตำแหน่งของปลายคาน ณ จุด A (Tip Displacement at A)

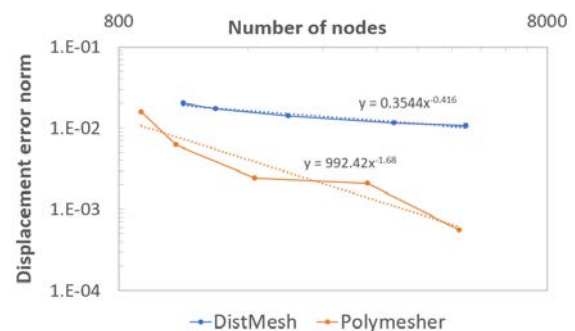
การวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอตามจำนวนโหนดของเอลิเมนต์หลักในส่วนนี้ เป็นการหาการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งทางสถิติศาสตร์ของจุด A ตามรูปที่ 4 ด้วยโครงตาข่ายที่มีเอลิเมนต์ต่างกันจำนวน 5 ชุด ค่าผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับการเปรียบเทียบผลนั้น ถูกวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ ABAQUS [18]

ผลการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งของจุด A บนคานตัวอย่าง (รูปที่ 3) แสดงไว้ในตารางที่ 1 (ค่าในแถวสุดท้ายหมายถึงค่าผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำ) ผลจากการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ดังกล่าว มีค่าเข้าใกล้ค่าสำหรับอ้างอิงเมื่อมีการเพิ่มจำนวนโครงตาข่ายให้ละเอียดมากขึ้นเช่นเดียวกับในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ โดยมีค่าอยู่ระหว่าง -0.027808 ถึง -0.0027545 สำหรับอัลกอริทึมแบบ DistMesh และ -0.00027686 ถึง -0.0027240 สำหรับอัลกอริทึมแบบ PolyMesher ตามลำดับ จากค่าดังกล่าว พบว่า คานตัวอย่างที่ทำการวิเคราะห์ในครั้งนี ให้ค่า Upper bound ของการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง ณ จุด A หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า คานเซลล์ูลาร์มีพฤติกรรมที่เป็น Overly soft นั่นเอง

ค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อนของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement Error Norm) มีค่าลดลงตามจำนวนโหนดที่เพิ่มขึ้น โดยลดลงจาก 2.02 เป็น 1.06 และ 1.58 เป็น 0.05 เปอร์เซนต์ ตามลำดับสำหรับอัลกอริทึมที่ใช้ในการเปรียบเทียบทั้งสองแบบ เมื่อนำค่าดังกล่าวกับจำนวนโหนดมาวาดกราฟในแบบ log-log สเกล สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 6 จากรูปดังกล่าวพบว่า ความชันของกราฟ แสดงถึงอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงของการเปลี่ยนตำแหน่งนั่นเอง จากตัวอย่างการวิเคราะห์ในครั้งนี พบว่า PolyMesher มีค่าของการลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่า DistMesh โดยมีค่าเท่ากับ 1.68 ในขณะที่อย่างหลังมีค่าเท่ากับ 0.416

ตารางที่ 1 ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง ณ จุด A

อัลกอริทึม	จำนวน เอลิเมนต์	จำนวน โหนด	ค่าการ เปลี่ยน ตำแหน่ง	ค่ามาตรฐาน ความคลาด เคลื่อน
DistMesh	448	1,134	-0.0027808	0.0202896
PolyMesher	448	904	-0.0027686	0.0158393
DistMesh	542	1,347	-0.0027728	0.0173779
PolyMesher	542	1,091	-0.0027422	0.0061329
DistMesh	829	1,991	-0.0027643	0.0142366
PolyMesher	829	1,663	-0.0027320	0.0024179
DistMesh	1,525	3,518	-0.0027567	0.0014579
PolyMesher	1,525	3,047	-0.0027325	0.0021000
DistMesh	2,294	5,172	-0.0027545	0.0106713
PolyMesher	2,500	4,986	-0.0027240	0.0005478
ABAQUS	-	9,628	-0.0272513	0.0000000



รูปที่ 6 อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงของคานตัวอย่าง

3.2 ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างของโหมด (Natural Frequencies and Mode Shapes)

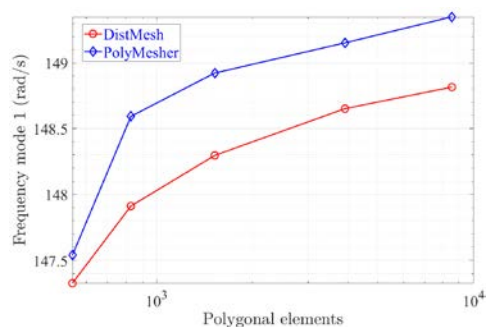
ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ของคานตัวอย่างจำนวนหกลำดับแรกที่ได้ตามขนาดของโครงตาข่ายจากวิธีที่เสนอ เปรียบเทียบกับค่าอ้างอิงได้แสดงไว้ในตารางที่ 2 เช่นเดียวกับวิธีเชิงตัวเลขอื่น ๆ ค่าดังกล่าว มีค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Error Norm) ที่ลดลงตามจำนวนของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่เพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับในกรณีของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานในหัวข้อที่ผ่านมา ความถี่ธรรมชาติลำดับแรก ๆ ซึ่งมีความสำคัญทางกายภาพมากกว่า

ความถี่ธรรมชาติลำดับอื่น ๆ นั้น มีค่าเท่ากับ 149.35 และ 148.8 รอบต่อวินาที เทียบกับค่าอ้างอิง

ตารางที่ 2 ความถี่ธรรมชาติ 6 ลำดับแรก

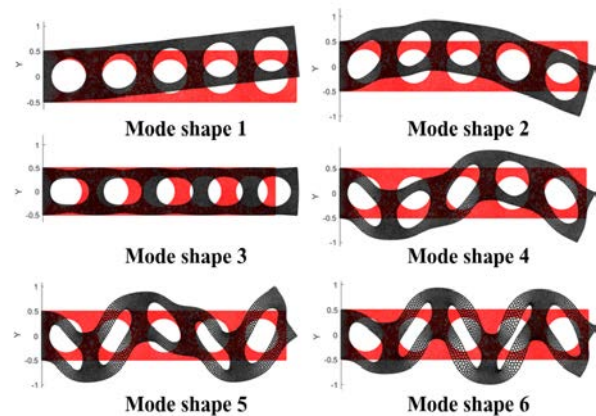
จำนวน โหนด	อัลกอริทึม	ความถี่ธรรมชาติ (รอบต่อวินาที)					
		โหมด					
		1	2	3	4	5	6
542	DistMesh	147.3	587.3	925.2	1,194.6	1,690.5	2,040.5
	PolyMesher	147.5	579.6	919.8	1,172.8	1,655.5	1,999.8
829	DistMesh	147.9	590.9	926.6	1,203.2	1,705.8	2,062.3
	PolyMesher	148.5	586.6	923.8	1,190.9	1,681.4	2,028.8
1525	DistMesh	148.2	593.6	928.6	1,210.7	1,718.6	2,078.4
	PolyMesher	148.9	591.8	926.7	1,203.8	1,704.2	2,059.2
3927	DistMesh	148.6	596.2	930.1	1,217.0	1,729.1	2,092.5
	PolyMesher	149.1	595.8	929.2	1,214.3	1,724.4	2,085.2
8543	DistMesh	148.8	597.1	930.6	1,219.4	1,733.1	2,095.6
	PolyMesher	149.3	597.4	930.3	1,218.8	1,731.4	2,095.2
Ref	ABAQUS	149.3	597.8	931.1	1,221.3	1,732.8	2,095.8

149.38 สำหรับลำดับที่หนึ่ง และ 597.4 และ 597.1 รอบต่อวินาทีเทียบกับค่าอ้างอิง 597.8 รอบต่อวินาทีสำหรับลำดับที่สองของอัลกอริทึมแบบ DistMesh และ PolyMesher ตามลำดับเป็นต้น อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับความถี่ธรรมชาติลำดับแรกของทั้งสองอัลกอริทึมซึ่งแสดงในรูปที่ 7 นั้น ถึงแม้ว่าค่าที่ได้จาก DistMesh จะมีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงน้อยกว่า PolyMesher ก็ตาม อัตราการลู่เข้ากลับมีค่าที่ใกล้เคียงกันนั่นคือ 0.0034 และ 0.0037 ตามลำดับ



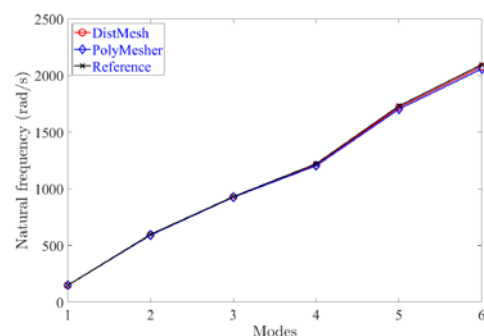
รูปที่ 7 อัตราการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติของโหมดแรก

รูปร่างโหมด (Mode Shapes) ซึ่งสอดคล้องกับความถี่ธรรมชาติหกลำดับแรกที่วิเคราะห์ได้จากวิธีที่เสนอสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 8 จากรูป สังเกตเห็นว่า การเปลี่ยนรูปร่างโหมดทั้ง 6 ลำดับแรกดังกล่าวมีความสอดคล้องกับการเปลี่ยนรูปร่างที่เกิดขึ้นจริงทางกายภาพ



รูปที่ 8 รูปร่างโหมดที่สอดคล้องกับความถี่ธรรมชาติ 6 ลำดับแรก

ไม่มีปรากฏการณ์ที่เรียกว่า Spurious Zero-Energy Modes [17],[18] ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากความผิดพลาดของการคำนวณเชิงตัวเลขและส่งผลให้รูปร่างโหมดของคานาเซลล์ดูลำดับที่เกิดขึ้นไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง ความถี่ธรรมชาติ 6 ลำดับแรก ณ โครงตาข่ายละเอียดสุดเมื่อนำมาวาดกราฟเทียบกับค่าที่ใช้ในการอ้างอิง สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 9 มีข้อสังเกตว่า ค่าที่ได้จาก DistMesh เข้าใกล้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่า PolyMesher เล็กน้อย และถือว่ามีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ (เส้นกราฟทั้งสองมีความสอดคล้องเกือบเป็นเส้นเดียวกันกับค่าอ้างอิง)

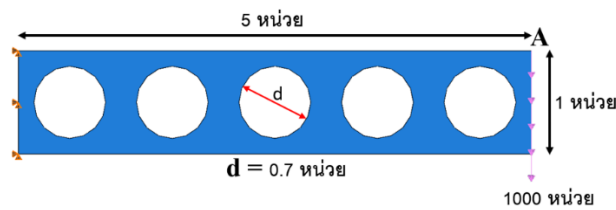


รูปที่ 9 ความถี่ธรรมชาติหกลำดับแรกเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอ้างอิง

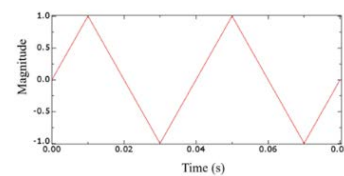
3.3 การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบแรงกระทำชั่วขณะ (Transient vibration Analysis)

ส่วนสุดท้าย เป็นการวิเคราะห์คานตัวอย่างที่รับแรงกระทำชั่วขณะ โดยแรงเฉือน (Vertical Traction) ซึ่งกระทำที่ปลายคานด้านไกลนั้น ถูกกำหนดให้มีขนาดแปรเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันของเวลาตามรูปที่ 10(b) ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (Elastic Modulus) และอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio) ถูก

กำหนดให้มีค่าเป็น $3E+07$ และ 0.28 ตามลำดับเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์ในหัวข้อที่ผ่านมา ค่าที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Close-to-Exact Solution) สำหรับเปรียบเทียบนี้ สามารถหาได้ด้วยการใช้โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ ABAQUS ที่ใช้ความละเอียดของโครงตาข่ายแบบทรงสี่หน้า (Q4) ที่มีจำนวนมากพอสำหรับใช้เป็นค่าอ้างอิง



(ก)

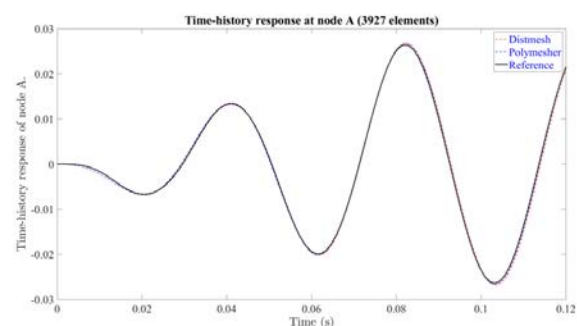
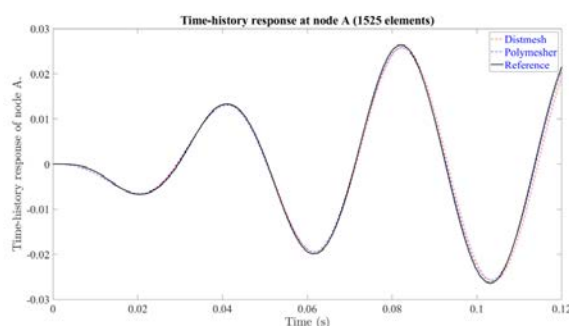
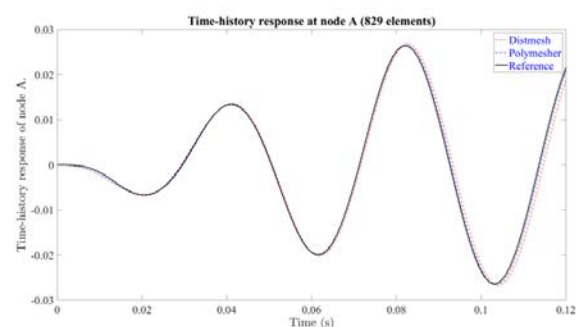
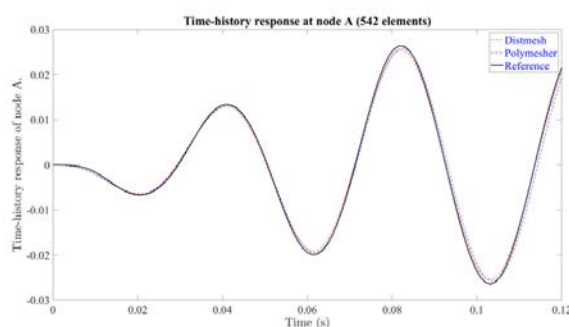


(ข)

รูปที่ 10 (ก) คานตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์แบบรับแรงกระทำชั่วขณะ (ข) การแปรผันของแรงตามเวลา

ผลจากการวิเคราะห์เพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุด A ที่แปรเปลี่ยนไปตลอดช่วงเวลา 0.12 วินาทีระหว่างอัลกอริทึมทั้งสองรูปแบบสำหรับความละเอียดโครงตาข่ายจำนวน 4 ชุดด้วยกัน ได้แก่ 542, 829, 1525 และ 3927 เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม ได้แสดงไว้ในรูปที่ 11 จากรูปพบว่า ความแตกต่างระหว่างค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุด A ซึ่งได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์

แบบสร้างเอลิเมนต์ย่อยตามโหนดของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึมทั้งสองวิธีกับค่าอ้างอิงที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ โดยพบว่า อัลกอริทึม PolyMesher จะให้ค่าที่ต่ำกว่า DistMesh เพียงเล็กน้อยซึ่งความแตกต่างดังกล่าวจะลดลงตามจำนวนความละเอียดของโครงตาข่ายที่เพิ่มขึ้น



รูปที่ 11 การเปลี่ยนตำแหน่ง ของจุด A ตามเวลา

4 สรุปและวิจารณ์ผล

งานวิจัยนี้เป็นการนำเสนอการวิเคราะห์ทั้งทางสถิตยศาสตร์ การสันสเทือนแบบอิสระและแบบแรงกระทำชั่วคราวของคานเชลลูลาร์ตัวอย่างด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมซึ่งสร้างจากอัลกอริทึมที่แตกต่างกันสองแบบ โดยทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้นออกเป็นโดเมนย่อยสม่ำเสมอรูปสี่เหลี่ยมที่สอดคล้องกับโหนดของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม (n-Sided Polyshape Node-based Smoothed Finite Element)

ผลการศึกษาพบว่า การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งของปลายคานด้านบน ณ จุดที่กำหนด สำหรับการสร้างอัลกอริทึมแบบ PolyMesher มีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าแบบ DistMesh อย่างมีนัยสำคัญ ค่าความคลาดเคลื่อนที่โครงตาข่ายมากที่สุดมีค่าเพียง 0.05 เปอร์เซ็นต์เมื่อเทียบกับ 1.06 เปอร์เซ็นต์ นอกจากนี้ยังพบว่า อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใช้ในการอ้างอิงซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.68 สูงกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับค่า 1.0 ซึ่งเป็นค่าที่เหมาะสม (Optimal) สำหรับปัญหาทางสถิตยศาสตร์ทั่วไปสำหรับเอลิเมนต์ที่เป็นแบบเชิงเส้น (Linear Element) หากพิจารณาจำนวนโหนดของเอลิเมนต์ที่ใช้ พบว่า มีจำนวนเพียงแค่ครึ่งหนึ่งของเอลิเมนต์ที่ใช้ในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์เพื่อให้ได้ค่าการของเปลี่ยนตำแหน่งที่เทียบเท่ากัน ทำให้วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบ PolyMesher ที่มีการสร้างโดเมนหรือเอลิเมนต์ย่อยตามโหนดของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนั้น มีประสิทธิภาพในการคำนวณสูงโดยใช้จำนวนโหนดที่น้อยกว่า ถือว่าเป็นอีกทางเลือกหนึ่งของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ให้ค่าผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำไม่ด้อยไปกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ ข้อสังเกตที่พบอีกประการหนึ่งคือ ผลของการเคลื่อนที่ในแนวตั้งที่ได้นี้เป็นค่า Upper bound ของผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง หากสามารถหาค่า Lower Bound ของค่าดังกล่าวได้ ก็จะสามารถทำการคาดคะเนผลลัพธ์ของปัญหาต่าง ๆ ซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) ได้จากการวิเคราะห์โดยตรงได้ในที่สุด

ในกรณีของการวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติและโหมดรูปร่างที่สอดคล้องหกลำดับแรกด้วยการแก้ปัญหา

Eigenvalue Problem นั้นพบว่า การสร้างเอลิเมนต์หลักหลายเหลี่ยมทั้งสองแบบ มีความสอดคล้องกับค่าที่ใช้ในการอ้างอิงมาก ณ ความละเอียดของโครงตาข่ายมากที่สุดนั้น ค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อนของความถี่ธรรมชาติลำดับแรกมีค่าเพียง 0.02 เปอร์เซ็นต์ รูปร่างโหมด (Mode Shapes) ทั้งหมดลำดับแรกที่ได้ สามารถเกิดขึ้นได้จริงและสอดคล้องกับลักษณะทางกายภาพของคานตัวอย่าง

เช่นเดียวกับการวิเคราะห์การสันสเทือนอิสระ การเปลี่ยนตำแหน่งของจุด A ตามแรงกระทำที่แปรเปลี่ยนตามเวลาสำหรับการวิเคราะห์การสันสเทือนแบบแรงกระทำชั่วคราวนั้น อัลกอริทึมทั้งสองแบบนี้ ให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับค่าอ้างอิงและไม่มี ความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญเมื่อใช้โครงตาข่ายจำนวนมากขึ้น ความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ ไม่ได้มาจากการเลือกใช้รูปแบบการสร้างเอลิเมนต์หลักหลายเหลี่ยมใด ๆ สำหรับการวิเคราะห์แต่เพียงอย่างเดียว แต่ยังขึ้นอยู่กับประเภทของการวิเคราะห์รวมทั้งคุณสมบัติของอื่นของผู้วิเคราะห์ ได้แก่ ความละเอียดของโครงตาข่าย ระดับความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ต้องการ ความต่อเนื่องภายในทั้งด้านรูปทรงและคุณสมบัติวัสดุของปัญหานั้น ๆ เป็นต้น เมื่อพิจารณาใช้ร่วมกันอย่างรอบคอบ จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขนั้นมีความน่าเชื่อถือมากในที่สุด

5 กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้เขียนขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรีสำหรับการสนับสนุนเวลาและแหล่งข้อมูลสำหรับการสืบค้นบทความอื่น ๆ อันเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] K. J. Bathe, "An Introduction to the Use of Finite Element Procedures," in *Finite Element Procedures*, Hoboken, NJ, USA: Prentice Hall, 1996, ch. 1, sec. 1.1-1.4, pp. 1-14.
- [2] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. Z. Zhu, "The Standard Discrete System and Origins of the Finite

- Element Method,” in *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 6th ed., Waltham, MA, USA: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005, ch. 1, sec. 1.1–1.8, pp. 1–12.
- [3] T. J. Hughes, “Fundamental Concepts: A Simple One-dimensional Boundary-Value Problem,” in *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Mineola, NY, USA: Dover Publication, 2000, ch. 1, sec. 1.1–1.15, pp. 1–44.
- [4] G. R. Liu and T. T. Nguyen, “Introduction,” in *Smoothed Finite Element Methods*, 1st ed., Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2010, ch. 1, sec. 1.1–1.7, pp. 1–11.
- [5] G. R. Liu, “The smoothed finite element method (S-FEM): A framework for the design of numerical models for desired solutions,” *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, vol. 13, no. 2, pp. 456–477, 2019, doi: 10.1007/s11709-019-0519-5.
- [6] W. Junchum, K. Musiket, B. Phungpaingam and P. Pongsivasathit, “Two-Dimensional plane stress analysis by smoothed finite element method using 4 smoothing cells created by an arbitrary quadrilateral element,” *Engineering Journal of Research and Development*, vol. 32, no. 3, pp. 33–51, 2021. (in Thai)
- [7] M. J. Kazemzadeh-Parsi and F. Daneshmand, “Solution of geometric inverse heat conduction problems by smoothed fixed grid finite element method,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 45, no. 10, pp. 599–611, 2009, doi: 10.1016/j.finel.2009.03.008.
- [8] J. Liu, Z. -Q. Zhang and G. Zhang, “A smoothed finite element method (S-FEM) for large-deformation elastoplastic analysis,” *International Journal of Computational Methods*, vol. 12, no. 4: pp. 1540011, 2015, doi: 10.1142/S0219876215400113.
- [9] E. Li, Z. Zhang, C. Chang, S. Zhou, G. R. Liu and Q. Li, “A new homogenization formulation for multifunctional composites,” *International Journal of Computational Methods*, vol. 13, no. 2, pp. 2016, Art. no. 1640002, doi: 10.1142/S0219876216400028.
- [10] P. O. Persson and G. Strang, “A simple mesh generator in MATLAB,” *SIAM review*, vol. 46, no. 2, pp. 329–345, 2004, doi: 10.1137/S0036144503429121.
- [11] C. Talischi, G. H. Paulino, A. Pereira and I. F. Menezes, “PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in MATLAB,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 45, pp. 309–328, 2012, doi: 10.1007/s00158-011-0706-z.
- [12] C. Talischi, G. H. Paulino, A. Pereira and I. F. Menezes, “PolyTop: a MATLAB implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 45, pp. 329–357, 2012, doi: 10.1007/s00158-011-0696-x.
- [13] L. Kobbelt. “OpenMesh”, [openmesh.org. https://www.graphics.rwth-aachen.de/software/openmesh/](https://www.graphics.rwth-aachen.de/software/openmesh/)
- [14] E. T. Ooi, C. Song, F. Tin-Loi and Z. Yang, “Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modelling,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 91, no. 3, pp. 319–342, 2012, doi: 10.1002/nme.4284.
- [15] I. M. Smith, D. V. Griffiths, and L. Margetts, “Forced Vibrations,” in *Programming the finite element method*, 5th ed., Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2013, ch. 11, sec. 11.1–11.7, pp. 483–508.
- [16] D. L. Logan, “Structural Dynamics and Time-Dependent Heat Transfer,” in *A first course in the finite element method*, 6th ed., Boston, MA, USA:

-
- Cengage Learning, Inc., 2017, ch. 16, sec. 16.3, pp. 764–780.
- [17] K. Y. Dai, G. R. Liu and T. T. Nguyen, T. T., “An n-sided polygonal smoothed finite element method (nCSFEM) for solid mechanics,” *Finite elements in analysis and design*, vol. 43, no. 11–12, pp. 847–860, 2007, 10.1016/j.finel.2007.05.009.
- [18] Abaqus G. Abaqus 6.11. Dassault Systemes Simulia Corporation, Providence, RI, USA. 2011