

การประมาณค่าอุณหภูมิของแผ่นบาง 1 มิติ ด้วยการนำความร้อน ศึกษา ผลกระทบจากอุณหภูมิที่ขอบเปลี่ยนแปลงแบบสเต็ปฟังก์ชัน

Temperature Estimation for Heat Conduction in A 1-D Thin Plate: Study of The Effect of Boundary Temperature Changing With A Step Function

สกนธ์ คล่องบุญจิต

ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

E-mail: sakonklong@hotmail.com

บทคัดย่อ

การศึกษานี้ เป็นการศึกษาผลกระทบของอุณหภูมิที่ขอบของแผ่นวัสดุบางที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบสเต็ปฟังก์ชัน เพื่อทำการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางวิธีเชิงตัวเลขนำมาใช้ และผลการคำนวณเชิงตัวเลขจะถูกเปรียบเทียบกับผลการคำนวณวิธีเชิงวิเคราะห์ซึ่งได้จากวิธี Duhamel's Theorem ผลจากการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขที่แตกต่างกันให้ผลไปในทางเดียวกับการคำนวณค่าอุณหภูมิด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ อย่างไรก็ตามการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะมีความคลาดเคลื่อนสูง โดยวิธี Fully Implicit Method ให้ผลความคลาดเคลื่อนประมาณ $\pm 1.37^{\circ}\text{C}$ และวิธี Crank-Nicolson Method ให้ผลความคลาดเคลื่อนประมาณ $\pm 0.77^{\circ}\text{C}$

คำสำคัญ : การนำความร้อน 1 มิติ, อุณหภูมิแบบสเต็ปฟังก์ชัน, ทฤษฎี Duhamel's Theorem

Abstract

In this study, the effect of temperature changing at boundary of a thin plate is studied. At Boundary of the thin plate, temperature changes with a step function. To estimate temperature within the thin plate, numerical methods are applied, and these numerical results are compared with results of Duhamel's Theorem which is the analytical method. Different numerical methods show the same trend as the thin plate temperature calculation with the analytical method. However, the temperature estimation nearby boundary of thin plate with numerical methods has high deviation value: Fully Implicit Method shows the deviation of $\pm 1.37^{\circ}\text{C}$ and Crank-Nicolson Method shows the deviation of $\pm 0.77^{\circ}\text{C}$.

Keywords : 1-D Heat conduction, A step function temperature, Duhamel's Theorem

1. บทนำ

สำหรับปัญหาด้านการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ในชิ้นงานต่าง ๆ นั้น เป็นเหตุการณ์ที่พบบ่อยมากในการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นวัสดุบาง (ซึ่งมีความหนาไม่เกิน 3 มิลลิเมตร) สิ่งที่น่าสนใจสำหรับการถ่ายเทความร้อนลักษณะนี้คือการหาค่าอุณหภูมิของแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่งต่างๆภายในแผ่นวัสดุบาง อย่างไรก็ตามด้วยความบางของแผ่นวัสดุทำให้ไม่สามารถวัดอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุได้ ด้วยเหตุนี้นักวิจัยหลายๆท่านจึงพยายามศึกษาหาวิธีการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางสำหรับการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีการต่างๆทั้งวิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical Method) วิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) และวิธีที่ผสมวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลขเข้าด้วยกัน โดยในการทดสอบผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะใช้คำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ [1] เป็นค่าในการอ้างอิง

ตัวอย่างของงานวิจัยลักษณะนี้ ดังเช่น งานวิจัย [2,3] เป็นการประมาณอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางในปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) งานวิจัย [4] เป็นการประมาณอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางในปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีเชิงตัวเลขที่เรียกว่า One-Dimension Mapped Infinite Element งานวิจัย [5] เป็นการประมาณอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางในปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ด้วยการใช้วิธีการเชิงตัวเลขทั้งแบบระเบียบวิธีผลต่างจำกัดและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ งานวิจัย [6] เป็นการประมาณอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางต่างชนิดกันที่ซ้อนติดกันอยู่หลายชั้นในปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ที่เรียกว่า Vodiccka's Approach และงานวิจัย [7] เป็นการประมาณอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางต่างชนิดกัน 2 ชนิดที่ซ้อนติดกันในปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขแบบ Fully Explicit Method

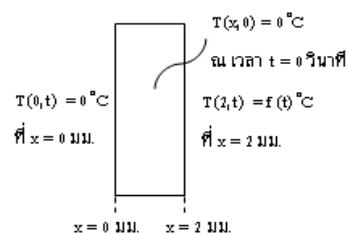
แม้ว่าจะมีการศึกษาหาวิธีการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางด้วยวิธีการต่างๆ ดังได้กล่าวไปแล้ว ในบางสถานการณ์ใช้งานการนำวิธีการประมาณ

ค่าอุณหภูมิเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ก็ยังไม่เหมาะสม โดยเฉพาะในกรณีที่ใช้งานที่มีการนำแผ่นวัสดุบางที่มีความหนาไม่เกิน 3 มิลลิเมตร ไปใช้เป็นแผ่นกั้นกระบวนการผลิตในโรงงานอุตสาหกรรมที่ด้านหนึ่งมีอุณหภูมิต่ำและอีกด้านหนึ่งมีอุณหภูมิสูง อีกทั้งด้านที่มีอุณหภูมิสูงยังเป็นด้านที่มีอุณหภูมิไม่คงที่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างรวดเร็วแต่ยังอยู่ในช่วงไม่เกิน 50°C และมีข้อจำกัดด้านคุณภาพของสินค้าในบางเรื่องทำให้ไม่สามารถติดตั้งอุณหภูมิที่แผ่นกั้นได้ ในสภาพการใช้งานแผ่นวัสดุบางเช่นนี้พฤติกรรมการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุจะเป็นข้อมูลที่สำคัญมากในการวิเคราะห์ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทผ่านแผ่นวัสดุบางนี้ ซึ่งเป็นข้อมูลที่ใช้ในการพิจารณาเปลี่ยนค่าความหนาและคุณสมบัติของแผ่นวัสดุบางที่ใช้เป็นแผ่นกั้นให้เหมาะสมแก่การใช้งานต่อไป

ด้วยเหตุผลดังกล่าวในงานศึกษานี้จึงทำการศึกษาปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ของแผ่นวัสดุบางโดยทำศึกษาผลกระทบของอุณหภูมิที่ขอบของแผ่นวัสดุบางที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบสแต็ปฟังก์ชันซึ่งเป็นลักษณะของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วต่อการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทั้งแบบ Explicit Method แบบ Fully Implicit Method และแบบ Crank-Nicolson Method โดยจะใช้ค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ด้วยทฤษฎี Duhamel's Theorem เป็นข้อมูลอ้างอิง

2. ขั้นตอนการทดสอบ

ในการศึกษานี้จะเริ่มด้วยการกำหนดตัวแบบปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ผ่านแผ่นวัสดุบาง โดยตัวแบบทางคณิตศาสตร์จะเป็นดังในรูปที่ 1



รูปที่ 1 ตัวแบบแสดงปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ

จากรูปที่ 1 แสดงถึงตัวแบบปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ผ่านแผ่นวัสดุบางที่มีความหนา 2 มิลลิเมตร โดยอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่ง x และเวลา t หรือ $T(x,t)$ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการที่ (1)

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

เมื่อ $0 \text{ มม.} \leq x \leq 2 \text{ มม.}$ และ $t \geq 0$ วินาที

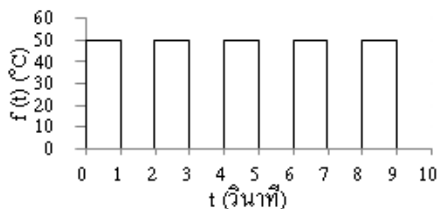
α คือ ค่า Thermal Diffusivity ของวัสดุ (m^2/s)

โดยที่ $T(0,t) = 0^\circ\text{C}$ ที่ $x = 0 \text{ มม.}$

$T(2,t) = f(t)^\circ\text{C}$ ที่ $x = 2 \text{ มม.}$

$T(x,0) = 0^\circ\text{C}$ ที่ $t = 0$ วินาที

$f(t)$ คือ อุณหภูมิในหน่วย $^\circ\text{C}$ ที่ขอบด้านขวาของแผ่นวัสดุบาง ซึ่งจะเป็นการเปลี่ยนแปลงแบบสลับฟังก์ชันดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่ขอบด้านขวาของแผ่นวัสดุบางตามฟังก์ชัน $f(t)$

ต่อจากนั้นจะทำการคำนวณอุณหภูมิ $T(x,t)$ ภายในแผ่นวัสดุบางด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ด้วยทฤษฎี Duhamel's Theorem เพื่อเป็นข้อมูลอ้างอิง ตามสมการ (2)

สำหรับเวลา $0 < t \leq 1$ วินาที

$$T(x,t) = K \phi(x,t)$$

สำหรับเวลา $1 \text{ วินาที} < t \leq 2 \text{ วินาที}$

$$T(x,t) = K \phi(x,t) - K \phi(x,t-1)$$

สำหรับเวลา $2 \text{ วินาที} < t \leq 3 \text{ วินาที}$

$$T(x,t) = K \phi(x,t) - K \phi(x,t-1)$$

$$+ K \phi(x,t-2)$$

$\vdots$

โดยที่ $K = 50^\circ\text{C}$ (ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(t)$)

$$\phi(x,t) = 0.5 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

$$\lambda_n = 0.5 n\pi$$

หลังจากนั้นจึงทำการประมาณค่าของอุณหภูมิ $T(x,t)$ ภายในแผ่นวัสดุบางด้วยวิธีเชิงตัวเลข แบบ Explicit Method แบบ Fully Implicit Method และแบบ Crank-Nicolson Method ตามสมการ (3) (4) และ (5) ตามลำดับ

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} [T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j] \quad (3)$$

$$T_{i-1}^{j+1} - (2 + \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t}) T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1} = -\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} T_i^j \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i-1}^{j+1} + (2 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}) T_i^{j+1} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i+1}^{j+1} \\ & = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i-1}^j + (2 - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}) T_i^j + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i+1}^j \end{aligned} \quad (5)$$

โดยที่ $i = 1, 2, 3, \dots, 39$ ในสมการที่ (3) (4) และ (5)

$j = 0, 1, 2, 3, \dots$ ในสมการที่ (3) (4) และ (5)

$\Delta x = 0.05 \text{ มม.}$ และ $\Delta t = 0.0001 \text{ วินาที}$

$x_i = i \Delta x$ และ $t_j = j \Delta t$

สำหรับค่าที่ขอบแผ่นวัสดุบางด้านซ้าย ณ ค่า

$i = 0$ หรือ ตำแหน่ง $x = 0 \text{ มม.}$ จะได้ $T_0^t = 0^\circ\text{C}$

สำหรับค่าที่ขอบแผ่นวัสดุบางด้านขวา ณ ค่า

$i = 40$ หรือ ตำแหน่ง $x = 2 \text{ มม.}$ จะได้ $T_{40}^t = f(t)$

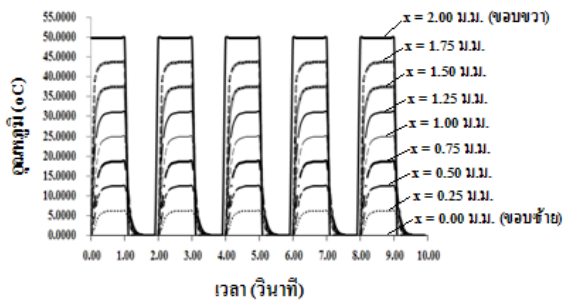
สำหรับค่าเริ่มต้น ณ ค่า $j = 0$ หรือเวลา $t = 0$ วินาที จะได้ $T_i^0 = 0^\circ\text{C}$

ในการคำนวณค่าอุณหภูมิ $T(x,t)$ ภายในแผ่นวัสดุบาง จะทำการสมมติว่าแผ่นวัสดุบางเป็นวัสดุ Stainless Steel AISI 304 ที่มีค่า Thermal Diffusivity, $\alpha = 4.019 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ในช่วงอุณหภูมิ 0°C ถึง 120°C [8]

เมื่อคำนวณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่งและเวลาต่างๆ ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลขเรียบร้อยแล้ว จะทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลขทั้ง 3 แบบ กับวิธีเชิงวิเคราะห์ด้วยทฤษฎี Duhamel's Theorem เพื่อทำการเปรียบเทียบความถูกต้องของการประมาณค่าด้วยวิธีเชิงตัวเลขทั้ง 3 แบบ พร้อมทั้งศึกษาผลของอุณหภูมิที่ขอบด้านขวาของแผ่นวัสดุบางที่เปลี่ยนแปลงอุณหภูมิแบบสลับฟังก์ชัน $f(t)$ ต่อการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางว่าเป็นเช่นไร

3. ผลการคำนวณ

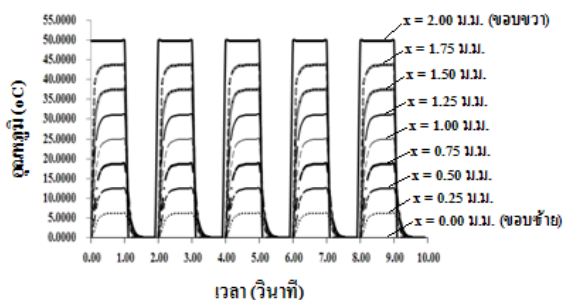
จากผลการคำนวณอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ด้วยทฤษฎี Duhamel's Theorem ตามสมการที่ (2) จะได้อุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆภายในแผ่นวัสดุบางดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 อุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่งต่างๆ
(วิธีเชิงวิเคราะห์ด้วยทฤษฎี Duhamel's Theorem)

จากรูปที่ 3 จะพบว่า แผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่งขอบซ้าย ($x = 0$ มม.) จะมีอุณหภูมิเท่ากับ 0°C และขอบขวา ($x = 2$ มม.) จะมีอุณหภูมิเป็นแบบสลับฟังก์ชัน $f(t)$ ส่วนอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งอื่นๆจะพบว่า 1) อุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางสูงขึ้นเมื่อใกล้ขอบขวา 2) อุณหภูมิภายในแผ่นจะต่ำลงเมื่อใกล้ขอบซ้าย และ 3) รูปแบบของอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆภายในแผ่นวัสดุบางจะถูกควบคุมด้วยสลับฟังก์ชัน $f(t)$ ทำให้มีรูปแบบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมีการเพิ่มขึ้นและลดลงตามสลับฟังก์ชัน $f(t)$

เมื่อทำการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางด้วยวิธีเชิงตัวเลขทั้ง 3 แบบ คือ ตามสมการที่ (3) (4) และ (5) จะได้ผลการประมาณค่าดังในรูปที่ 4 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลที่ได้มีลักษณะเดียวกับการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ด้วยทฤษฎี Duhamel's Theorem ดังในรูปที่ 3



รูปที่ 4 อุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่งต่างๆ
(วิธีเชิงตัวเลขทั้ง 3 วิธี)

ต่อจากนั้นเมื่อทำการพิจารณาผลกระทบของอุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุบางที่เปลี่ยนแปลงแบบสลับฟังก์ชัน $f(t)$ ว่าจะมีผลต่อการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้เคียงขอบขวาของแผ่นวัสดุบางด้วยวิธีเชิงตัวเลขทั้ง 3 วิธี บ้างหรือไม่ จึงทำการพิจารณาสมการ (3) (4) และ (5) ณ ตำแหน่ง $i = 39$ หรือ $x = 1.95$ มม. ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ถัดจากขอบขวาของแผ่นวัสดุเข้ามา (ขอบขวามีค่า $i = 40$ หรือ $x = 2.0$ มม.) จะได้สมการสำหรับการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่ง $i = 39$ หรือ $x = 1.95$ มม. ดังสมการที่ (6) - (8)

ด้วยวิธีเชิงตัวเลข แบบ Explicit Method

$$T_{39}^{j+1} = T_i^j + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} [T_{40}^j - 2T_{39}^j + T_{38}^j] \quad (6)$$

โดยที่ $T_{40}^j = f(t)$ ณ เวลาปัจจุบัน

เมื่อพิจารณาสมการที่ (6) พบว่า การประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่ง $i = 39$ หรือ $x = 1.95$ มม. จะใช้เพียงค่าของอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุที่เวลา ณ ปัจจุบันเพียง 3 ตำแหน่ง คือ 1) $i = 38$ หรือ $x = 1.9$ มม. 2) $i = 39$ หรือ $x = 1.95$ มม. และ 3) $i = 40$ หรือ $x = 2.0$ มม. (ขอบขวา)

พิจารณาสลับฟังก์ชัน $f(t)$ ถ้าเวลา ณ ปัจจุบันเป็นเวลา $t = 1, 3, 5, \dots$ ซึ่งเป็นเวลาที่อุณหภูมิกำลังจะเปลี่ยนแปลงจาก 50°C ลงมาเป็น 0°C อย่างทันทีทันใด และ ณ เวลา $t = 2, 4, 6, \dots$ ซึ่งเป็นเวลาที่อุณหภูมิกำลังจะเปลี่ยนแปลงจาก 0°C ขึ้นไปเป็น 50°C อย่างทันทีทันใด เมื่อต้องการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่ง $i = 39$ หรือ $x = 1.95$ มม. จะเห็นว่าไม่มีผลของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุอย่างทันทีทันใด

ด้วยวิธีเชิงตัวเลข แบบ Fully Implicit Method และ แบบ Crank-Nicolson Method

แบบ Fully Implicit Method

$$T_{38}^{j+1} - \left(2 + \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t}\right) T_{39}^{j+1} = -\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} T_{40}^j - T_{40}^{j+1} \quad (7)$$

โดยที่ $T_{40}^{j+1} = f(t + \Delta t)$ ณ เวลาถัดไป

แบบ Crank-Nicolson Method

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{38}^{j+1} + \left(2 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{39}^{j+1} \\
& = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{38}^j + \left(2 - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{39}^j + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{40}^j \\
& + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{40}^{j+1}
\end{aligned} \quad (8)$$

โดยที่ $T_{40}^j = f(t)$ ณ เวลาปัจจุบัน

และ $T_{40}^{j+1} = f(t + \Delta t)$ ณ เวลาถัดไป

เมื่อพิจารณาสมการที่ (7) และ (8) พบว่า การประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่ง $i = 39$ หรือ $x = 1.95$ มม. จะมีผลกระทบจากอุณหภูมิของแผ่นวัสดุบางที่ขอบขวา ณ เวลาถัดไป ($T_{40}^{j+1} = f(t + \Delta t)$) มาร่วมในการประมาณค่าด้วย

พิจารณาสเปปฟังก์ชัน $f(t)$ ถ้าเวลา ณ ปัจจุบันเป็นเวลา $t = 1, 3, 5, \dots$ วินาที ซึ่งเป็นเวลาที่อุณหภูมิกำลังจะเปลี่ยนแปลงจาก 50°C ลงมาเป็น 0°C อย่างทันทีทันใด และ ณ เวลา $t = 2, 4, 6, \dots$ วินาที ซึ่งเป็นเวลาที่อุณหภูมิกำลังจะเปลี่ยนแปลงจาก 0°C ขึ้นไปเป็น 50°C อย่างทันทีทันใด เมื่อต้องการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบาง ณ ตำแหน่ง $i = 39$ หรือ $x = 1.95$ มม. จะเห็นว่าผลของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุอย่างทันทีทันใดมีโอกาสดำเนินการประมาณอุณหภูมิมีความผิดพลาดได้ไม่มากนัก

เมื่อทำประมาณหาค่าหาอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาด้วยวิธีเชิงตัวเลขทั้ง 3 วิธี ตามค่าที่แสดงไว้ในตารางที่ 1 พบว่า อุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุบางที่เปลี่ยนแปลงอุณหภูมิแบบสเปปฟังก์ชัน $f(t)$ ส่งผลกระทบต่อการประมาณหาค่าหาอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาของแผ่นวัสดุด้วยวิธีเชิงตัวเลขดังนี้

ด้วยวิธีเชิงตัวเลข แบบ Explicit Method

ผลจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุอย่างทันทีทันใด ณ เวลา $t = 1, 2, 3, \dots$ วินาที ไม่ส่งผลกระทบต่อการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาของแผ่นวัสดุบางดังที่สมการ (6) อธิบายไว้จริง

ด้วยวิธีเชิงตัวเลข แบบ Fully Implicit Method และ แบบ Crank-Nicolson Method

ผลจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุอย่างทันทีทันใด ณ เวลา $t = 1, 3, 5, \dots$ วินาที ซึ่งเป็นเวลาที่อุณหภูมิกำลังจะเปลี่ยนแปลงจาก 50°C ลงมาเป็น 0°C อย่างทันทีทันใด ไม่ส่งผลกระทบต่อการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาของแผ่นวัสดุ เนื่องจากค่า T_{40}^{j+1} ในสมการที่ (7) และ (8) มีค่าเท่ากับ 0°C แต่สำหรับ ณ เวลา $t = 2, 4, 6, \dots$ วินาที ซึ่งเป็นเวลาที่อุณหภูมิกำลังจะเปลี่ยนแปลงจาก 0°C ขึ้นไปเป็น 50°C อย่างทันทีทันใด ค่า T_{40}^{j+1} ในสมการที่ (7) และ (8) มีค่าเท่ากับ 50°C ซึ่งจะส่งผลกระทบต่อการประมาณค่าอุณหภูมิ ทำให้ผลการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวามีค่าคลาดเคลื่อนไปจากค่าที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ด้วย Duhamel's Theorem โดยจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมากขึ้นเมื่อใกล้ขอบขวามากขึ้น (สังเกตจากค่าที่ตำแหน่ง $x = 1.75, 1.85$ และ 1.95 มม. ในตารางที่ 1) และค่าการประมาณด้วยวิธีเชิงตัวเลขแบบ Crank-Nicolson Method จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนสูงกว่าแบบ Fully Implicit Method ดังแสดงไว้ในตารางที่ 2 ด้วยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และผลกระทบต่อการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุอย่างทันทีทันใดจะหมดไปเมื่อทำการประมาณค่าอุณหภูมิภายในวัสดุบาง ณ ตำแหน่งที่ห่างออกมาจากขอบขวาแล้ว (สังเกตจากค่าที่ตำแหน่ง $x = 1.65$ มม. ในตารางที่ 1 และค่าความคลาดเคลื่อน ในตารางที่ 2)

จากผลการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาทำให้สังเกตเห็นค่าการคำนวณที่น่าสนใจ นั่นคือ ในปัญหาการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางในการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ของวัสดุแผ่นบาง โดยทั่วไป ที่ค่า $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ ที่เท่ากับ วิธีเชิงตัวเลขทั้ง 3 แบบ วิธี Crank-Nicolson Method จะใช้เวลาการคำนวณที่รวดเร็วที่สุดและคุณภาพของผลการคำนวณที่ดีที่สุด ทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด รองลงจะเป็นวิธี Fully Implicit Method และสุดท้ายจะเป็นวิธี Explicit Method

ตารางที่ 1 ผลกระทบของผลจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุอย่างทันทีทันใดต่อการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาของแผ่นวัสดุบาง

อุณหภูมิ T (°C) หน่วย °C												
เวลา (วินาที)	i = 33 หรือ x = 1.65 มม.				i = 35 หรือ x = 1.75 มม.				i = 37 หรือ x = 1.85 มม.			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	41.2492	41.2492	41.2492	41.2492	43.7494	43.7494	43.7494	43.7494	46.2496	46.2496	46.2496	46.2496
2	0.001	0.0008	0.0009	0.0008	0.0008	0.0006	0.0007	0.0007	0.0005	0.0004	0.0946	0.0172
3	41.2492	41.2492	41.2492	41.2492	43.7494	43.7494	43.7494	43.7494	46.2496	46.2496	46.2496	46.2496
4	0.001	0.0008	0.0009	0.0008	0.0008	0.0006	0.0007	0.0007	0.0005	0.0004	0.0946	0.0172
5	41.2492	41.2492	41.2492	41.2492	43.7494	43.7494	43.7494	43.7494	46.2496	46.2496	46.2496	46.2496
6	0.001	0.0008	0.0009	0.0008	0.0008	0.0006	0.0007	0.0007	0.0005	0.0004	0.0946	0.0172
7	41.2492	41.2492	41.2492	41.2492	43.7494	43.7494	43.7494	43.7494	46.2496	46.2496	46.2496	46.2496
8	0.001	0.0008	0.0009	0.0008	0.0008	0.0006	0.0007	0.0007	0.0005	0.0004	0.0946	0.0172
9	41.2492	41.2492	41.2492	41.2492	43.7494	43.7494	43.7494	43.7494	46.2496	46.2496	46.2496	46.2496
10	0.001	0.0008	0.0009	0.0008	0.0008	0.0006	0.0007	0.0007	0.0005	0.0004	0.0946	0.0172

แต่สำหรับปัญหาในการศึกษาครั้งนี้ เมื่ออุณหภูมิในขอบขวาเปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบ สเต็ปฟังก์ชันกลับให้ผลต่างออกไปนั่นคือวิธีเชิงตัวเลขทั้ง 3 แบบ กลับให้ผลการคำนวณในเวลาใกล้เคียงกัน เนื่องจากต้องคำนวณที่ค่า $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ ที่ค่า และผลการคำนวณจากวิธี Explicit Method กลับ

ให้คุณภาพของผลการคำนวณที่ดีที่สุด ทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด เนื่องจากการคำนวณค่าอุณหภูมิ ณ เวลาถัดไปที่ตำแหน่งต่างๆ ภายในแผ่นวัสดุบาง จะไม่ได้รับผลจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิแบบทันทีทันใดของอุณหภูมิรอบๆ ตำแหน่งที่ทำการคำนวณค่าอุณหภูมิ ณ เวลาถัดไปนั่นเอง (ตามสมการที่ 3)

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาของแผ่นวัสดุ ด้วยวิธีเชิงตัวเลข แบบ Explicit Method (A) แบบ Fully Implicit Method (B) และ แบบ Crank-Nicolson Method (C)

วิธี	ค่าความคลาดเคลื่อน $\times 10^{-3}$ (หน่วย °C)						
	x = 1.65 มม.	x = 1.7 มม.	x = 1.75 มม.	x = 1.8 มม.	x = 1.85 มม.	x = 1.9 มม.	x = 1.95 มม.
A	6.9	6.7	6.6	6.4	6.2	5.9	5.6
B	8.4	8.1	7.8	7.8	22.0	169.8	1373.9
C	7.6	7.4	7.2	6.9	7.5	54.2	774.1

หมายเหตุ ใช้ค่าการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ด้วยทฤษฎี Duhamel's Theorem เป็นค่าอ้างอิง

4. สรุป

จากการศึกษาการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางในปัญหาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ ของวัสดุแผ่นบางเมื่ออุณหภูมิที่ขอบขวาของแผ่นวัสดุบางเปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบสเต็ปฟังก์ชัน พบว่า เมื่อใช้วิธีเชิงตัวเลข 3 แบบ คือ แบบ Explicit Method แบบ Fully Implicit Method และแบบ Crank-Nicolson Method การประมาณค่าอุณหภูมิให้ผลไปในทางเดียวกับค่าการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ด้วย Duhamel's Theorem อย่างไรก็ดี อุณหภูมิที่ขอบของแผ่นวัสดุบางที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบสเต็ปฟังก์ชันจะส่งผลให้การประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาของแผ่นวัสดุบาง ทำให้การประมาณค่าอุณหภูมิด้วยวิธีเชิงตัวเลข แบบ Fully Implicit Method และแบบ Crank-Nicolson Method เกิด

ความคลาดเคลื่อนไปจากค่าการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ ด้วย Duhamel's Theorem ส่วนการประมาณค่าอุณหภูมิภายในแผ่นวัสดุบางบริเวณใกล้ขอบขวาของแผ่นวัสดุบางด้วยวิธีเชิงตัวเลขแบบ Explicit Method จะไม่ได้รับผลกระทบใดๆ

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] M. Necati Ozisik, "Heat Conduction," the 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [2] Abdollah Shidfar and Ali Zakeri, "A Numerical Technique for Backward Inverse Heat Conduction Problems in One-Dimensional Space," Applied Mathematics and Computation 171, pp. 1016 – 1024 (2005).
- [3] G. Lefebvre, "A General Modal-Based Numerical Simulation of Transient Heat Conduction in a One-Dimensional Homogeneous Slab," Energy and Building 24, pp. 2309 – 2322 (2010).
- [4] M.R. Motley and J.H. Prevost, "Simulation of Transient Heat Conduction Using One-Dimensional Mapped Infinite Element," International Journal for Numerical Methods in Engineering 83, pp. 598 – 610 (2010).
- [5] Mile R. Vujicic, "Finite Element Solution of Transient Heat Conduction Using Iterative Solvers," International Journal for Computer-Aided Engineering and Software 23, pp 408-431 (2006).
- [6] F. de Monte, "An Analytic Approach to the Unsteady Heat Conduction Processes in One-Dimensional Composite Media," International Journal of Heat and Mass Transfer 45, pp. 1333- 1343 (2002).
- [7] F. de Monte, "Multi-Layer Transient Heat Conduction Using Transient Time Scales," International Journal of Thermal Sciences 45, pp. 882 - 892 (2006).

[8] F.P. Incropera and D.P. De Witt, "Fundamentals of Heat and Mass Transfer," the 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc., 1990.