

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบแรงกระทำด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ รูปหลายเหลี่ยมที่แบ่งโดเมนย่อยภายในเซลล์สำหรับปัญหาใน 2 มิติ

Free and Forced Vibration Analyses by n-sided Polygonal Cell-based Strain-Smoothed Finite Element for Two-dimensional Problem

สุธี ปิยะพิพัฒน์¹ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม² และ กำธรเกียรติ มุสิกเกด^{3*}

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

E-mail: Suthee.p@en.rmutt.ac.th¹, Boonchai_p@rmutt.ac.th², kamtornkiat@rmutt.ac.th^{3*}

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ทำการวิเคราะห์ตรวจสอบการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบแรงกระทำสำหรับปัญหาในสองมิติด้วยการใช้วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนด้านใดๆ เริ่มด้วยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็น เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมเหมือนกับวิธีการสร้างเอลิเมนต์ในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมก็สามารถสร้างได้โดยอาศัยหลักของ Delaunay triangulation สำหรับโครงตาข่ายรูปสามเหลี่ยมแบบไม่มีการเรียงตำแหน่ง เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้นจะถูกแบ่งย่อยออกเป็นเอลิเมนต์สมมาตรแบบรูปสี่เหลี่ยมต่อไป ในงานนี้ได้ศึกษาวิเคราะห์ตัวอย่างคานของ Cook ที่ถูกปรับปรุงโดยเพิ่มรูเจาะจำนวน 3 รูเจาะเข้าไป โดยด้านซ้ายของคานถูกกำหนดให้มีสภาพเป็นฐานรองรับแบบยึดหมุน ในขณะที่ปลายตรงข้ามอีกด้านหนึ่งถูกกำหนดให้รับแรงเฉือนในแนวดิ่ง รูปแบบของการวิเคราะห์แบ่งออกเป็นสองประเภท ได้แก่ การสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบมีแรงกระทำเป็นคาบ เนื่องจากคานตัวอย่างที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้นไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ จึงใช้ผลเฉลย ซึ่งได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการใช้โครงตาข่ายแบบรูปสี่เหลี่ยมที่มีความละเอียดมาก ที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Close-to-exact solutions) อ้างอิงแทนผลเฉลยแม่นยำตรง การวิเคราะห์แบบแรกตรวจสอบความถี่ธรรมชาติและรูปร่างที่สอดคล้องกันสี่ค่าแรกของคานตัวอย่างด้วยการแก้ปัญหา Eigenvalue problem ผลที่ได้แสดงความสอดคล้องของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมกับผลที่ใช้ในการอ้างอิงเป็นอย่างดี แบบที่สองเป็นการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนซึ่งเกิดจากแรงกระทำชั่วคราวด้วยวิธี Newmark-Beta เพื่อเปรียบเทียบการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ณ จุดที่กำหนดไว้ในช่วงเวลาที่ระบุสำหรับแรงที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาที่เป็นรูปสามเหลี่ยม ผลลัพธ์ที่ได้ยังคงมีความสอดคล้องกันกับค่าอ้างอิงตลอดเวลาของการวิเคราะห์ด้วยจำนวนเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่น้อยกว่าเมื่อเทียบกับวิธีเดิม



คำสำคัญ : เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม; สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์; คานของคุก; การสั่นแบบอิสระ; การสั่นแบบแรงกระทำชั่วคราว

Abstract

Free and forced vibration analyses using n-sided polygonal element-based strain-smoothed finite element for two-dimensional problem is investigated for this research. Initialized with triangular elements discretization on problem domain like an old fashion finite element, an arbitrary n-sided polygon elements can be created by Delaunay triangulation algorithms for unstructured triangular mesh. Those polygonal elements will then be further partitioned into quadrilateral smoothing cells. A modified Cook beam with three holes which its left side is hinged while the opposite side is imposed to shear traction in vertical direction is an example for numerical simulation. Two types of analyses are performed namely free and transient vibration. Due to unavailable exact solutions, close-to-exact solutions obtained from very fine quadrilateral meshes finite element analysis are utilized instead. The former analysis investigates the first four natural frequencies and corresponding mode shapes of an example beam by solving an Eigenvalue problem. The results show in good agreement between polygonal smoothed finite element and reference solutions. The latter is forced periodic vibration analysis using implicit Newmark-Beta method comparing a vertical displacement at a particular point in specified duration of force dependent triangular time variation. The results are also in good shape with reference solutions at all periods of analysis time with few numbers of polygonal elements compared to a traditional one.

Keywords: n-sided Polygonal element; Smoothed finite element; Cook's beam; Free vibration; Periodic vibration

1. บทนำ

วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical methods) การโมเดลปัญหาเชิงตัวเลข (Numerical modeling) รวมถึงวิธีการจำลองเชิงตัวเลข (Numerical simulations) เป็นสิ่งที่นักวิทยาศาสตร์รวมถึงวิศวกรทุกสาขาไม่สามารถปฏิเสธได้ถึงถึงความสำคัญของมันในการเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมที่นับวันจะมีความซับซ้อนของปัญหาเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ จนไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact solutions) ได้โดยตรง วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ถือได้ว่าเป็นจุดกำเนิดของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดวิธีหนึ่งในปัจจุบัน

เนื่องจากความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ ความหลากหลายของการใช้งานไม่ได้ถูกจำกัดอยู่เฉพาะปัญหาการวิเคราะห์โครงสร้างเท่านั้น แต่ยังรวมไปถึงงานในสาขาวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมเกือบทุกแขนงในโลก เช่น การวิเคราะห์ปัญหาพลศาสตร์ของโครงสร้างและของไหล (Structure and fluid dynamics analysis) สนามแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic) การชนและสัมผัส (Impact and contact) การถ่ายเทมวลและความร้อน วัสดุชีวภาพ เป็นต้น ถึงกระนั้นก็ดี ข้อจำกัดของวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ก็มีมากมายหลายอย่างด้วยเช่นเดียวกัน ได้แก่ ความแม่นยำของความเค้นที่ได้ มีค่าไม่ดีเมื่อใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม (Triangular element) สำหรับปัญหา

2 มิติ หรือเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (Tetrahedral element) สำหรับปัญหา 3 มิติ ในกรณีที่ต้องการความแม่นยำของผลลัพธ์ที่มากขึ้น จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์แบบสี่หน้า (Quadrilateral element) และเอลิเมนต์ทรงหกหน้า (Hexahedral element) ซึ่งอาจต้องแลกมากับเวลาและค่าใช้จ่ายที่เพิ่มขึ้นเช่นเดียวกัน ความจำเป็นของการทำ Mapping ระหว่าง Parent และ Physical element ซึ่งอาจทำให้จาโคเบียนเมทริกซ์ (Jacobian matrix) มีโอกาสของการมีคุณสมบัติ Ill-conditioned ระหว่างการคำนวณ ในกรณีของการวิเคราะห์แบบ Large deformation รวมทั้งการเกิดพฤติกรรม Locking phenomenon สำหรับของแข็งที่เป็นแบบบีบอัดไม่ได้ ซึ่งมีค่าอัตราส่วนปัวซองเข้าใกล้ 0.5

ตลอดเวลาที่ผ่านมา มีความพยายามคิดค้นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขใหม่ๆ เพื่อเอาชนะข้อจำกัดของวิธีเก่าๆ ที่มีอยู่ รวมทั้งปรับปรุงผลจากการวิเคราะห์ให้มีความแม่นยำเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น วิธีต่างๆ เหล่านั้น ได้แก่ วิธี Virtual element method [1] วิธี Scaled boundary finite element [2] และวิธี Smoothed finite element methods [3] เป็นต้น สิ่งที่น่าสนใจสำหรับวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขทั้งสามวิธีข้างต้นที่เหนือกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์คือความสามารถในการใช้เอลิเมนต์ที่เป็นแบบทรงเหลี่ยมใดๆ (An n-sided arbitrary element) ได้อย่างไม่มีข้อจำกัดอยู่แค่การใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมหรือทรงสี่หน้าสำหรับปัญหาใน 2 มิติ นอกจากนี้สองวิธีหลังยังมีสิ่งที่เหนือกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเดิมที่เด่นชัดอีกประการหนึ่งคือ การไม่ต้องทำ Mapping ระหว่าง Parent element และ Physical element ซึ่งทำให้สามารถคำนวณได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพที่สูงกว่า วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ปรากฏครั้งแรกในบทความของ Liu G.R. et.al. [4] ซึ่งในขณะนั้นยังไม่ได้ใช้ชื่อนี้เหมือนในปัจจุบัน วิธีนี้ทำการเฉลี่ย

ค่าของสนามความเครียด (Smoothed strain) ของเอลิเมนต์ย่อยๆ (Domains or cells) ที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลัก (Main element) เพื่อให้มีความสม่ำเสมอและต่อเนื่อง (Smoothing cells) ไปทั่วทั้งเอลิเมนต์หลัก ต่อมา วิธีนี้ได้มีการพัฒนาแตกแขนงออกไปซึ่งสามารถจำแนกได้ตามประเภทของการสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอในเอลิเมนต์หลักออกได้เป็น 4 แบบ ได้แก่ การสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลัก (Cell-based) การสร้างโดเมนย่อยโดยใช้โหนดของเอลิเมนต์หลัก (Node-based) การสร้างโดเมนย่อยโดยใช้ด้านของเอลิเมนต์หลัก (Edge-based) และการสร้างโดเมนย่อยโดยใช้พื้นที่ผิวของเอลิเมนต์หลัก (Face-based) ตามลำดับ (สามวิธีแรกสำหรับปัญหาใน 2 มิติ ในขณะที่วิธีที่สี่ใช้สำหรับปัญหาใน 3 มิติ) [3]

วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ได้พิสูจน์ถึงความแม่นยำของผลการวิเคราะห์ที่ได้ว่ามีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเดิม รวมทั้งยังสามารถทำลายข้อจำกัดหลายประการลงได้อย่างสมบูรณ์ [5] มีการประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรมในด้านต่างๆ เช่น ปัญหาความเค้นในโครงสร้าง [6] ปัญหาทางด้านพลศาสตร์โครงสร้างและการสั่นสะเทือน [7] ปัญหาของแผ่นและแผ่นเปลือกบาง [8] ปัญหาทางกลศาสตร์ชีวภาพ [9] ปัญหาของการถ่ายเทความร้อนและกลศาสตร์อุณหภูมิตัว [10] ปัญหากลศาสตร์การแตกหัก [11] การวิเคราะห์ปัญหาอีลาสติค-พลาสติก [12] และอื่นๆ อีกมากมาย

ขั้นตอนแรกของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการเชิงตัวเลขนั้น โดเมนของปัญหาที่สนใจจะถูกแบ่งออกเป็นส่วนเล็ก (Domain discretization) เพื่อให้สามารถนำสมการที่เกี่ยวข้องเข้าไปประยุกต์ใช้ได้ โดยอาจแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ขั้นพื้นฐานอย่างง่ายที่สุดคือรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมสำหรับปัญหาใน 2 มิติ ดังที่ได้กล่าวไว้แล้ว สำหรับวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น

เนื่องจากการที่สนามความเครียดถูกทำให้เกิดความต่อเนื่องสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักและสามารถคำนวณได้จากการอินทิเกรตแทนที่จะเป็นการหาอนุพันธ์ผ่านสมการการประมาณรูปร่างภายใน (Shape functions) เหมือนในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทำให้สามารถใช้เอลิเมนต์หลักที่มีจำนวนของหลายด้านได้ ขั้นตอนของการสร้างเอลิเมนต์หลักที่มีจำนวนด้านใด ๆ รูปหลายเหลี่ยมนั้น สามารถทำได้หลายวิธี เช่น การสร้างเอลิเมนต์หลักหลายเหลี่ยมจากเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม [13] หรือการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมโดยตรงก็ได้ [14] เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ได้จากวิธีแรกจะมีความยาวด้านของเอลิเมนต์ที่ใกล้เคียงกัน ในขณะที่วิธีที่สองจะให้ด้านที่สม่ำเสมอมากกว่าสำหรับปัญหาที่มีส่วนโค้งส่วนเว้าหรือรูเจาะภายใน

งานวิจัยนี้ ทำการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติของคานที่ถูกปรับปรุงมาจาก Cook's beam [15] ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทำการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนย่อยๆ ด้วยเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมซึ่งมีด้านมากกว่าหรือเท่ากับ 4 ด้าน (Polygonal element) ขึ้นไป เอลิเมนต์หลักเหล่านั้นถูกสร้างขึ้นด้วยการเปลี่ยนรูปของเอลิเมนต์พื้นฐานสามเหลี่ยมที่ใช้ในไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิมให้กลายเป็นรูปหลายเหลี่ยมโดยอัลกอริทึมโดยอาศัย DistMesh algorithms [16] และจะถูกแบ่งออกเป็นเซลล์ย่อยๆ ที่มีความสม่ำเสมอ (Smoothing cell) ด้วยเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral element) จำนวนหลายเซลล์เพื่อให้เป็นเอลิเมนต์สม่ำเสมอต่อเนื่อง (Smoothed domain) ในที่สุด การวิเคราะห์ครั้งนี้มุ่งไปที่การวิเคราะห์แบบพลศาสตร์ (Dynamic analysis) เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural frequencies analyses) และรูปร่างของคานตัวอย่างในกรณีแรก และการหาผลตอบสนองของการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง ณ จุดที่กำหนดไว้ ต่อแรงกระทำที่ปลายคานซึ่งเป็น

ฟังก์ชันของเวลา (Periodic vibration analysis) โดยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมใดๆ เนื่องจากไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาตัวอย่างได้ ผลของการวิเคราะห์เหล่านี้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง (close-to-exact solutions) ซึ่งได้มาจากการใช้โปรแกรม ANSYS STUDENT VERSION 2020 R1

บทความนี้ได้แบ่งหัวข้อของงานวิจัยดังต่อไปนี้ ส่วนที่ 1 กล่าวถึงบทนำและวัตถุประสงค์ของงานวิจัย ส่วนที่ 2 กล่าวถึงพื้นฐานของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ความเค้นในระนาบ 2 มิติ การสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอต่อเนื่องรูปทรงสี่หน้า (Q4) ภายในเอลิเมนต์หลักรูปทรงหลายเหลี่ยม การใช้สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาพลศาสตร์ (Dynamic analysis) Lumped mass matrix Implicit Newmark-beta method และการแบ่งเมทริกซ์ออกเป็นส่วนที่ทราบค่าตัวแปรและส่วนที่ยังไม่ทราบค่าหลังจากกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแล้ว รวมถึงการแก้ระบบสมการตามลำดับ ผลการวิเคราะห์ทั้งสองส่วนที่กล่าวถึงมาแล้วจะถูกแสดงในส่วนที่ 3 และบทสรุปของการศึกษาวิจัยในครั้งนี้จะถูกกล่าวถึงในส่วนที่ 4 ตามลำดับ

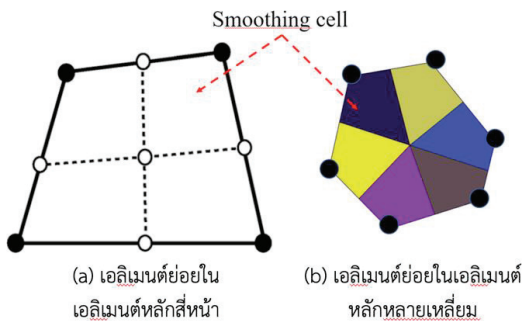


2. สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม (An arbitrary polygonal element-based smoothed finite element)

2.1 โดเมนย่อยสม่ำเสมอทรงสี่หน้า (Quadrilateral Smoothing Domains)

หลังจากการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมใดๆ ตลอดทั้งโดเมนของปัญหาที่สนใจแล้ว ดังภาพที่ 1 เอลิเมนต์เหล่านั้นจะถูกแบ่งให้เป็นโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains or cells) ภายในต่อไป งานวิจัยในครั้งนี้ใช้เอลิเมนต์ย่อยแบบทรงเหลี่ยมสี่หน้า

(Quadrilateral element, Q4) ดังแสดงในภาพที่ 1 (ขวา) การแบ่งลักษณะเช่นนี้ ทำให้ได้โดเมนย่อยสม่ำเสมอที่มีจำนวนเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลัก รูปหลายเหลี่ยมนั้นเอง ซึ่งถือว่าเป็นหัวใจสำคัญข้อหนึ่งของหลักการสร้างเอลิเมนต์หรือโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักที่จะต้องมีความน้อยเท่ากับ $2n/3$ เมื่อ n คือจำนวนของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของโหนดทั้งหมดนั่นเอง [3] ภาพที่ 1 แสดงความคล้ายคลึงกันระหว่างการสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักรูปทรงสี่เหลี่ยมและรูปทรงหลายเหลี่ยมใด ๆ



ภาพที่ 1 การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยในเอลิเมนต์หลัก

2.2 การสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field Construction)

การสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอต่อเนื่องของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ อาศัยเทคนิคของ strain smoothing บนโดเมนหรือเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักนั่นเอง ขั้นตอนนี้มีความแตกต่างกับการสร้างสนามความเครียดในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์เมื่อทราบค่าของสนามความเครียดภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมแล้ว ขั้นตอนต่อไปหลังจากนั้นจนกระทั่งถึงการได้มาซึ่งสมการของสถิติเฟนส ยังคงเป็นขบวนการทำงานเดียวกันกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ทุกประการ ความจริงข้อนี้ทำให้สามารถนำอัลกอริทึมของโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ซึ่งมีใช้กันอย่างแพร่หลายมาประยุกต์ใช้ได้ทันที โดยทำการปรับปรุงเพียงเล็กน้อย

เพื่อให้เกิดความแตกต่างกับสนามความเครียดในไฟไนท์เอลิเมนต์ ตัวแปรทั้งหมดในวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ จะถูกเขียนด้วยสัญลักษณ์เดียวกัน โดยกำหนดให้มีเครื่องหมายบาร์ (-) ด้านบน การคำนวณ หาค่าของตัวแปรความเครียดสม่ำเสมอ $\bar{\epsilon}$ ณ ตำแหน่ง x_k จะใช้เทคนิคการประมาณของค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน กล่าวคือ

$$\bar{\epsilon}(x_k) = \int_{\Omega_k^s} \tilde{\epsilon}(x) W(x_k - x) d\Omega \quad (1)$$

เมื่อ Ω_k^s คือโดเมนหรือเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอสำหรับตำแหน่ง x_k และ $W(x_k - x)$ คือฟังก์ชันน้ำหนักที่สัมพันธ์กับค่า ณ ตำแหน่งดังกล่าว ตัวแปรความเครียดที่อยู่ภายในโดเมนสม่ำเสมอนี้จะถูกคำนวณจากการกระจายตัวแปรความเครียดตลอดทั่วทั้งโดเมนย่อยสม่ำเสมอ Ω_k^s และถูกสมมติให้มีค่าคงที่ ฟังก์ชันน้ำหนักอย่างง่ายและนิยมใช้กันมากที่สุดสำหรับ smoothing function คือ Heaviside step function หากทำการแทนค่าของฟังก์ชันดังกล่าวในสมการที่ (1) แล้วใช้การอินทิเกรตที่ละส่วนจะได้

$$\bar{\epsilon}(x_k) = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) \bar{u}(x) d\Gamma \quad (2)$$

$$L_n(x) = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

เมื่อ A_k^s , $\bar{u}(x)$ และ $L_n(x)$ คือพื้นที่ทั้งหมดของเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอในแต่ละเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม การเปลี่ยนตำแหน่งของโหนดและเวกเตอร์ องค์ประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทั้งสองทิศทางที่พุ่งออกจากด้านหรือขอบเขตของโดเมนสม่ำเสมอตามลำดับ (ใน 2 มิติ)

มีข้อสังเกตว่า ในสมการที่ (2) นั้น สนามความเครียดที่ได้ ถูกคำนวณโดยการอินทิเกรตเส้นรอบรูปของพื้นที่โดเมนย่อยแทนที่จะเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในของมัน ซึ่งถือเป็นข้อดีของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ สมการสตีเฟนสเมทริกซ์สม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลักขึ้นอยู่กับค่าของ Strain-displacement matrix หรือ $\bar{B}$ เมทริกซ์ หากทำการแทนค่า $\bar{u}(x) = \sum N_i \bar{u}_i$ ลงในสมการที่ 2 แล้วจัดรูปสมการใหม่ จะสามารถแสดงค่าของเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Strain-Displacement matrix) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\bar{B}(x) &= \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) N(x) dx \\ &= \begin{bmatrix} \bar{b}_x & 0 \\ 0 & \bar{b}_y \\ \bar{b}_y & \bar{b}_x \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4)$$

โดย

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma} n_i(x) N(x) d\Gamma, \quad i = x, y \quad (5)$$

หากใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขซึ่งต้องการจำนวนจุดของเกาส์ (Gauss's point) เพียงแค่ 1 จุด ซึ่งให้ค่าความถูกต้องของการอินทิเกรตสำหรับเส้นขอบเขตของโดเมนย่อยสม่ำเสมอที่เป็นเส้นตรงนั้น (One Gauss point rule) ตำแหน่งดังกล่าวจะอยู่กึ่งกลางด้านแต่ละด้านที่ประกอบกันขึ้นมาเป็นเอลิเมนต์ย่อยเหล่านั้นนั่นเอง เพราะฉะนั้น เครื่องหมายการอินทิเกรตในสมการที่ (5) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของเครื่องหมายผลรวมได้เป็น

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k^s} \sum_{j=1}^{n_f} n_i^j N(x_j^G) L_j, \quad i = x, y \quad (6)$$

จากหลักการพื้นฐานของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ทั้งหมดที่กล่าวมาเบื้องต้น สมการสตีเฟนสเมทริกซ์ต่อเนื่องสม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลักสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของสตีเฟนสย่อยสม่ำเสมอหรือในรูปของเมทริกซ์ความสัมพันธ์ของความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Strain-displacement matrix) คือ

$$\bar{K}^{SFEM} = \sum \bar{K}^{SFEM^e} = \sum \bar{B}^T E \bar{B} A_k^s \quad (7)$$

E หมายถึงอีลาสติคเมทริกซ์ ท้ายที่สุดสมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ สามารถแสดงได้เป็น (SFEM หมายถึง Smoothed Finite Element Methods)

$$\bar{K}^{SFEM} \bar{u} = \bar{F} \quad (8)$$

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาพลศาสตร์ โครงสร้างและการสั่นสะเทือนนั้น แรงที่เกิดจากความเฉื่อย (Inertia forces) และแรงต้านทานการสั่นสะเทือน (Damping forces) จะถูกนำไปคำนวณรวมไว้ในสมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วย ส่งผลให้สมการที่ (8) เปลี่ยนรูปเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลลำดับที่สองเทียบกับเวลา คือ

$$\bar{K}^{SFEM} \bar{u} + C \dot{\bar{u}} + M \ddot{\bar{u}} = \bar{F} \quad (9)$$

เมื่อ M และ C คือเมทริกซ์มวล (Mass matrix) และเมทริกซ์ของแรงต้านทานการสั่นสะเทือน (Damping matrix) แสดงไว้ในสมการที่ (10) และ (11) ตามลำดับ

$$M = \int_{\Omega} N^T \rho N d\Omega \quad (10)$$

$$C = \int_{\Omega} N^T c N d\Omega \quad (11)$$

โดยที่ p และ c คือความหนาแน่นมวลและสัมประสิทธิ์แรงต้านทานการสั่นสะเทือน

สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนเพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural frequencies) รวมถึงรูปร่างที่สอดคล้องกับความถี่ดังกล่าว (Mode shapes) นั้น เทอมที่เกี่ยวข้องกับแรงภายนอกและแรงต้านทานการสั่นสะเทือนจะถูกกำจัดออกไปจากสมการที่ (9) ซึ่งลดรูปลงเป็นสมการอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ (Homogeneous differential equation) ดังสมการที่ (12)

$$\bar{K}^{SFEM} \bar{u} + M \ddot{u} = 0 \quad (12)$$

สมการดังกล่าวมีผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูปของสมการเอ็กโปเนนเชียลที่เป็นฟังก์ชันของเวลาและความถี่เชิงมุม (Angular frequency) เมื่อนำผลเฉลยทั่วไปแทนลงในสมการที่ (12) แล้วจัดรูปสมการเสียใหม่จะสามารถคำนวณหาค่าของความถี่ธรรมชาติได้ด้วยการแก้สมการ Eigenvalue problem นั่นเอง

$$[\bar{K}^{SFEM} - \omega^2 M] = 0 \quad (13)$$

ในกรณีที่ไม่นิยามผลของแรงต้านทานการสั่นสะเทือน สมการการเคลื่อนที่พลศาสตร์ (9) นั้น จะถูกหาค่าผลตอบสนองที่ต้องการภายหลังจากที่สมการเงื่อนไขขอบ (Prescribed boundary conditions) ได้ถูกนำไปรวมไว้ด้วยกัน โดยการเปลี่ยนตำแหน่งของแต่ละโหนด จะถูกแบ่งออกเป็นสองกลุ่ม u_1, u_2 โดยกลุ่มแรกเป็นกลุ่มที่ไม่ทราบค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโหนด (Unknown nodal displacement) ในขณะที่กลุ่มหลังเป็นกลุ่มที่ทราบค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโหนด หรือกล่าวได้อีกอย่างว่าเป็นกลุ่มของโหนดที่เป็นฐานรองรับซึ่งทราบค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Prescribed nodal displacement) แล้วนั่นเอง เมื่อทำการแบ่งกลุ่มของเมทริกซ์อื่นๆ ให้สอดคล้องกับการแบ่งกลุ่มของการเปลี่ยนตำแหน่งนั้น สมการที่ (9) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_1\} \\ \{\ddot{u}_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] \\ [K_{21}] \end{bmatrix} \{u_1\} + \begin{bmatrix} [M_{11}] \\ [M_{21}] \end{bmatrix} \{\ddot{u}_1\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [K_{12}] \\ [K_{22}] \end{bmatrix} \{u_2\} - \begin{bmatrix} [M_{12}] \\ [M_{22}] \end{bmatrix} \{\ddot{u}_2\} \quad (15)$$

$$[K_{11}]\{u_1\} + [M_{11}]\{\ddot{u}_1\} = \{F_1\} - [K_{12}]\{u_2\} - [M_{12}]\{\ddot{u}_2\} \quad (16)$$

$$K_{11}(u_1)_n + M_{11}(\ddot{u}_1)_n = (F_1)_n - K_{12}(u_2)_n - M_{12}(\ddot{u}_2)_n \quad (17)$$

$$u_n = \bar{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_n, u_n = \bar{u}_n + \gamma \Delta t^2 \ddot{u}_n \quad (18)$$

$$(\beta \Delta t^2 K_{11} + M_{11})(\ddot{u}_1)_n = (F_1)_n - K_{11} \bar{u}_{1n} - K_{12}(u_2)_n - M_{12}(\ddot{u}_2)_n \quad (19)$$

เมื่อทำการย้ายกลุ่มของเมทริกซ์ที่ทราบค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งของโหนด u_2 ไปไว้ด้านขวามือของสมการ จะได้สมการที่ (15) ซึ่งสามารถหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของ u_1 ได้ด้วยการแก้สมการแถวแรกดังแสดงในสมการที่ (16) นั่นเอง สำหรับค่าของแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า นั้น สามารถหาได้จากการแก้สมการที่ (15) ในแถวที่สองนั่นเอง

2.3 การอินทิเกรตเชิงตัวเลขตามเวลา (Numerical time integration)

สมการที่ (16) เป็นสมการอนุพันธ์ลำดับสองเทียบกับเวลา การแก้สมการดังกล่าวสามารถทำได้ด้วยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขต่างๆ เช่น Houboldt's method [17] และ Alpha method [18] ในบรรดาวิธีเหล่านี้ การอินทิเกรตโดยตรง (Direct integrations) จัดว่าเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากกว่าวิธีอื่น ซึ่งสามารถแบ่งย่อยออกได้เป็นสองแบบหลักๆ ได้แก่ Explicit and Implicit time integration methods วิธีแรกเป็นการหาค่าผลตอบสนองที่สนใจ ณ เวลา $t = t + \Delta t$ ซึ่งปรากฏอยู่ด้านขวาของสมการเพียงอย่างเดียว วิธีที่เป็นที่นิยมสำหรับ Explicit method นั้น เรียกว่า Central difference method [19] ในขณะที่วิธีหลังนั้น ผลตอบสนองที่ต้องการทราบค่า ณ เวลา $t = t + \Delta t$ นั้นจะปรากฏอยู่ทั้งสองด้านของสมการทำให้มีความยุ่งยากในการแก้ปัญหามากกว่าวิธีแรก

ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ถึงแม้ว่าจะมีความยุ่งยากมากกว่าวิธีแรกก็ตาม Implicit method สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาได้กว้างขวางกว่า จึงจัดว่าเป็นวิธีมาตรฐานและเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์สำเร็จรูปต่างๆ ไป เช่น ANSYS, ABAQUS, AUTODESK, MIDAS, SAP2000 และอื่นๆ อีกมากมาย การอินทิเกรตเชิงตัวเลขวิธีนี้ แบ่งย่อยออกได้เป็นสองวิธีตามผู้คิดค้น

ได้แก่ Newmark's method [20] และ Wilson's method [16] สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ เลือกใช้วิธี Implicit time integration method ของ Newmark ในการวิเคราะห์สองปัญหาตัวอย่างที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น สมการที่ (16) ณ เวลาที่ $t_n = n\Delta t$ สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (17) เมื่อทราบค่าของ $u_0, \dot{u}_0 = 0$ ณ เวลาเริ่มต้น ค่าของการเคลื่อนที่และความเร็วสามารถคำนวณได้ด้วยสมการที่ (18) เมื่อค่าของ β, γ คือค่าคงที่ ซึ่งควบคุมความมีเสถียรภาพของการอินทิเกรตโดยปกติแล้วค่าดังกล่าวถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.25 และ 0.5 ตามลำดับ ค่าของ $\bar{u}_n$ และ $\dot{\bar{u}}_n$ ทำนัยค่าของการเคลื่อนที่และความเร็ว ณ เวลาก่อนเวลาปัจจุบัน $(n-1)$ หากทำการแทนค่าสมการที่ (18) ลงในสมการที่ (17) แล้วจัดเรียงเทอมเสียใหม่จะได้ดังสมการที่ (19) จากสมการดังกล่าว ทำให้สามารถหาค่าของความเร่ง ณ เวลาปัจจุบันได้ เมื่อทราบค่าความเร่ง ณ เวลาปัจจุบันแล้ว ก็สามารถคำนวณหาค่าของความเร่งรวมทั้งการเคลื่อนที่ ณ เวลาปัจจุบันได้ด้วยสมการที่ (18) นั่นเอง

2.4 A Lumped mass matrix

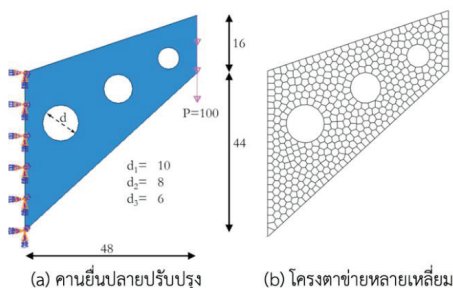
เพื่อความง่ายของการคำนวณในขณะนี้ ยังคงมีประสิทธิภาพและความแม่นยำสูง การศึกษาครั้งนี้ เลือกใช้การคำนวณ mass matrix แบบ Lumped mass แทนการใช้ Consistent mass เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากในการอินทิเกรตของฟังก์ชันการประมาณภายใน (Shape functions) ของเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า ในขณะเดียวกันค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ Lumped mass matrix มีความแม่นยำกว่าการใช้ Consistent mass matrix สำหรับการวิเคราะห์ปัญหา ด้านพลศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญ [3] สมการสำหรับการคำนวณหา Lumped mass matrix ของเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (Q4) แสดงได้ดังสมการที่ (20)

$$M_i^e = \frac{\rho t A_i^e}{4} I \quad (20)$$

เมื่อ p , t , A_i^e และ I คือความหนาแน่นมวลของวัตถุ (mass density) ความหนาของเอลิเมนต์ (element thickness) พื้นที่ของเอลิเมนต์ (element area) และ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) ที่มีขนาด 8×8 ตามลำดับ (เลข 4 ในสมการหมายถึงจำนวนโหนดของเอลิเมนต์)

3. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical simulation)

ตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ในครั้งนี้ถูกปรับปรุงมาจากคานยื่นปลายของ Cook (Cook's beam) ซึ่งมีรูเจาะเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 10, 8, และ 6 หน่วยตามลำดับ และใช้เป็นตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนทั้งสองแบบ เพื่อความสะดวกขนาดของคานในรูปดังกล่าวนั้น ถูกกำหนดให้ไม่มีหน่วย ในขณะที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและอัตราส่วนปัวซองถูกกำหนดให้มีความเท่ากับ 3×10^6 MPa และ 0.28 ตามลำดับ ความหนาของคานถูกกำหนดให้มีความเท่ากับ 1 หน่วยเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขการเป็นปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ (2D Plane stress problem) ซ้ายมือของคานเป็นฐานรองรับแบบยึดหมุน (Hinges) ในขณะที่มีแรงเฉือนกระทำในแนวดิ่งขนาด 100 หน่วย ณ บริเวณปลายคานด้านขวามือ รูปทรงทางเรขาคณิตของคานจะถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยแบบรูปทรงหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนของเอลิเมนต์แตกต่างกัน ดังแสดงในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 Cook's beam

เนื่องจากคานที่ถูกปรับปรุงดังกล่าวไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact solution) เพื่อใช้เป็นค่าอ้างอิงสำหรับการเปรียบเทียบในการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมได้ จึงจำเป็นที่จะต้องใช้โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ที่มีอยู่เพื่อหาค่าอ้างอิงดังกล่าว ในที่นี้ ผู้เขียนจึงใช้โปรแกรม ANSYS STUDENT VERSION 2021 R2 ซึ่งเป็นรุ่นที่นักศึกษาในมหาวิทยาลัยต่างๆ สามารถใช้งานได้ฟรี ทำการวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์แบบ Q4 จำนวนที่มากพอเพื่อให้มั่นใจว่าผลเฉลยที่ได้มีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นยำตรง (close-to-exact solution) มากที่สุด จำนวน Q4 เอลิเมนต์และโหนดที่ใช้มีจำนวนทั้งสิ้น 25,102 เอลิเมนต์และ 25,603 โหนด

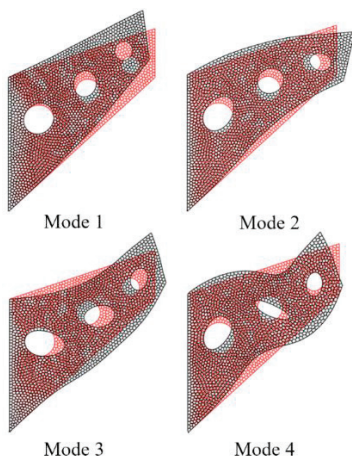
3.1 การวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency)

ความถี่ธรรมชาติของคานตัวอย่างจำนวน 4 ค่าแรก ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม ซึ่งถูกสร้างขึ้นจากขบวนการสร้างโครงตาข่ายด้วย DistMesh สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 1 โดยรวมค่าสำหรับใช้ในการอ้างอิงจากโปรแกรม ANSYS ไว้ด้วย

ตารางที่ 1 ความถี่ธรรมชาติทั้ง 4 ค่าเปรียบเทียบกับค่าอ้างอิง

	Natural frequencies (rad/s)			
Element	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
145	475.12	1171.6	1326.3	2233.1
431	470.65	1157.3	1303.7	2178.2
1477	466.37	1152.1	1296.5	2154.6
5520	465.73	1150.4	1294.2	2146.9
21680	465.10	1149.6	1293.4	2143.1
Ref.	464.52	1149.1	1292.8	2142.4
Error (%)	-0.125	-0.04	-0.05	-0.03

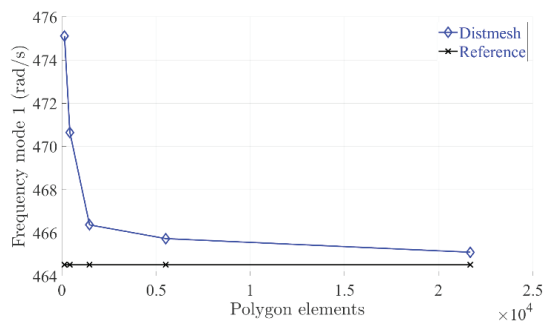
จากตารางที่ 1 พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติแรกทั้ง 4 มีค่าลู่เข้าใกล้ค่าความถี่ธรรมชาติอ้างอิง เมื่อจำนวนของเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกันกับที่พบในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ ค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อน (Error norm) ของความถี่ธรรมชาติดังกล่าว เมื่อจำนวนของเอลิเมนต์มีค่าความละเอียดมากที่สุด 21,680 เมื่อเทียบกับค่าอ้างอิงมีค่าเป็น 0.125, 0.04, 0.05 และ 0.03 เปอร์เซนต์ตามลำดับ ซึ่งจัดว่ามีค่าน้อยมากและพิจารณาได้ว่าเทียบเท่ากับค่าอ้างอิงได้อย่างไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ โหมดการเปลี่ยนรูปร่างของคานตัวอย่างที่สอดคล้องกับความถี่ธรรมชาติทั้ง 4 ค่านั้น (Mode shapes) สามารถแสดงได้ในภาพที่ 3 จะสังเกตได้ว่าการเปลี่ยนรูปร่างทั้งหมดนั้น สอดคล้องกับการเปลี่ยนรูปร่างทางกายภาพที่สามารถเกิดขึ้นได้จริงโดยไม่ปรากฏว่ามีค่าของ spurious nonzero energy modes หรือการเปลี่ยนรูปร่างทางกายภาพที่ไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง อันเนื่องมาจากผลของความผิดพลาดจากการคำนวณเชิงตัวเลขให้เห็นเลยนั่นเอง



ภาพที่ 3 รูปร่างที่สอดคล้องกับความถี่ธรรมชาติ 4 โหมดแรก (The first four mode shapes)

สำหรับการลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่ใกล้ค่าผลเฉลยแม่นยำนั้น ทำการวาดกราฟความล้มพันธ์ระหว่างจำนวนเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมกับความถี่ธรรมชาติ

โหมดแรก ดังแสดงในภาพที่ 4 ค่าของความถี่ธรรมชาติในโหมดแรกที่มีจำนวนเอลิเมนต์ต่างๆ เทียบกับค่าอ้างอิงจากรูปดังกล่าว อาจจำแนกออกได้เป็นสองส่วน ส่วนแรกนั้นพบว่าการลู่เข้าในช่วงของจำนวนเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมตั้งแต่ 145-1477 มีอัตราการลู่เข้าที่สูงมาก แต่เมื่อทำการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์หลักให้มีความละเอียดมากขึ้น อัตราการลู่เข้าจะช้ากว่าช่วงแรก

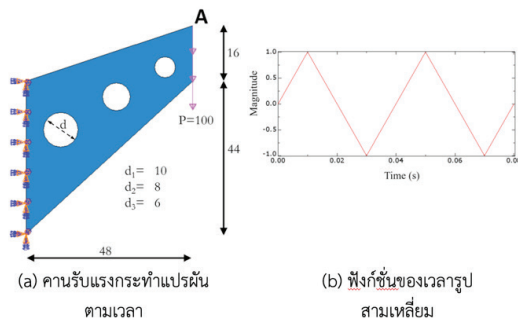


ภาพที่ 4 การลู่เข้าหาผลเฉลยที่มีค่าใกล้ผลเฉลยแม่นยำตรงของความถี่ธรรมชาติโหมดที่ 1

3.2 การวิเคราะห์ผลตอบสนองต่อแรงตามเวลา (Transient periodic response)

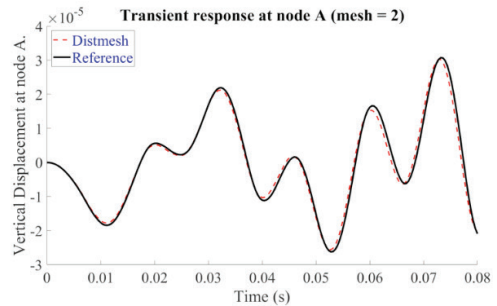
ขั้นตอนนี้เป็นกระบวนการวิเคราะห์ผลตอบสนองของคานซึ่งมีรูปทรงเรขาคณิตและคุณสมบัติทางวัสดุเหมือนกับตัวอย่างในหัวข้อที่แล้ว ต่างกันตรงที่แรงกระทำที่ปลายคานด้านอิสระนั้น ถูกกำหนดให้มีค่าแปรผันตามเวลาแบบรูปสามเหลี่ยม (Linear triangular time variation) $P = 100 \times F(t)$ โดย $F(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาโดยมีค่าเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ที่เวลา $t = 0$ แล้วจึงมีค่าเพิ่มขึ้นแบบเส้นตรงเป็น 1 ที่เวลา $t = 0.1$ ลดลงเป็น -1 ณ เวลา $t = 0.3$ แล้วจึงกลับมาเท่ากับศูนย์เมื่อเวลา $t = 0.4$ วินาที ดังแสดงในภาพที่ 5 (b) ฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลานี้จะถูกนำไปใช้กับแรงเฉือนที่กระทำเป็นเวลา 0.8 วินาที สำหรับเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ (Δt) และจำนวนครั้งของการวิเคราะห์ (Time steps) กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.0001 วินาทีและ 500 ครั้งตามลำดับ จุด A ถูกกำหนดให้ใช้เป็นจุดสำหรับ

การวิเคราะห์ผลตอบสนองการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งที่แปรเปลี่ยนไปตามฟังก์ชันของเวลา การสร้างโครงตาข่ายหลักรูปหลายเหลี่ยมใช้หลักการเดียวที่ได้กล่าวถึงไปแล้วโดยมีจำนวนของเอลิเมนต์เท่ากับ 431, 1,477, 5,520 และ 21,680 (เทียบเท่ากับการกำหนดขนาดของ Mesh ในการเขียนโปรแกรมเท่ากับ 2, 1, 0.5 และ 0.25 ตามลำดับ) สำหรับสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์และ 25,102 สำหรับผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงคำนวณโดยไฟไนท์เอลิเมนต์ตามลำดับ

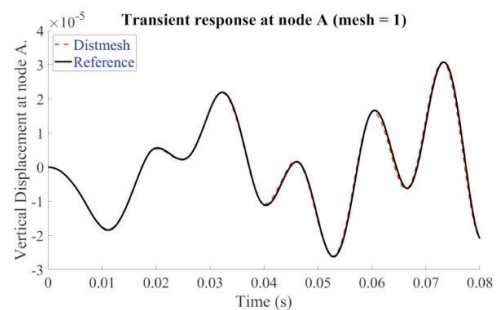


ภาพที่ 5 โมเดลการวิเคราะห์ผลตอบสนองของแรงตามเวลา

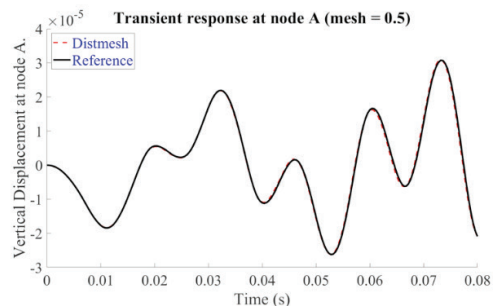
การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของจุด A ที่มีต่อผลตอบสนองต่อแรงกระทำที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจากการวิเคราะห์ถูกนำมาแสดงในรูปของกราฟเปรียบเทียบกับค่าที่ใช้ในการอ้างอิง ดังแสดงในภาพที่ 6 ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมซึ่งทำการแบ่งโดเมนสม่ำเสมอด้วยเอลิเมนต์แบบ Q4 นั้นสามารถวิเคราะห์ผลตอบสนองตามเวลาของคานตัวอย่างได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยพบว่า เมื่อใช้จำนวนเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเท่ากับ 5,520 เอลิเมนต์ (ภาพที่ 6 (c)) ค่าการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งที่มากที่สุดของจุด A เกิดขึ้น ณ เวลา $t = 0.0731$ s. ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3.085×10^{-5} ไม่มีความแตกต่างกับผลเฉลยที่มีค่าใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง 3.075×10^{-5} ณ เวลาเดียวกัน อย่างมีนัยสำคัญโดยค่าความคลาดเคลื่อนดังกล่าว มีค่าเพียง 0.4 เปอร์เซ็นต์



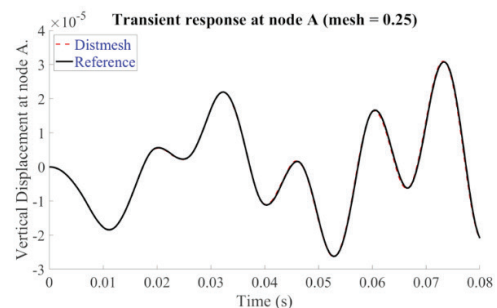
(a) 431 เอลิเมนต์



(b) 1477 เอลิเมนต์



(c) 5520 เอลิเมนต์



(d) 21680 เอลิเมนต์

ภาพที่ 6 ผลตอบสนองการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของจุด A ซึ่งรับแรงกระทำที่แปรเปลี่ยนตามเวลา



4. สรุปและวิจารณ์ผล (Conclusions and discussion)

คานยื่นปลายที่ปรับปรุงมาจาก Cook's beam โดยมีรูเจาะวงกลม ซึ่งมีขนาดต่างกันจำนวน 3 รูเจาะ ได้ถูกใช้เป็นตัวอย่งสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาพลศาสตร์ เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติรวมทั้งผลตอบสนองต่อแรง ที่ขึ้นอยู่กักับเวลาของการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ณ จุดที่กำหนดด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งถูกสร้างจากเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมก่อนที่จะถูกเปลี่ยนให้เป็นรูปหลายเหลี่ยมในภายหลัง เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้น ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปทรงสี่หน้าเพื่อสร้างเอลิเมนต์ย่อยที่มีความต่อเนื่องสม่ำเสมอต่อไป โดยจำนวนของเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอั้น สอดคล้องกับจำนวนเอลิเมนต์น้อยสุด (เท่ากับจำนวนโหนดของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม) ที่ต้องการสำหรับสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบการสร้างเอลิเมนต์ย่อยจากการแบ่งเอลิเมนต์หลัก

ผลการวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติแรกทั้ง 4 ค่าของวิธีที่เสนอ พบว่ามีค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อน (Error norm) เท่ากับ 0.125, 0.04, 0.05 และ 0.03 สำหรับเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมจำนวน 21,680 อัตราการลู่เข้าหาผลที่ใช้ในการอ้างอิงมีค่าสูงในช่วงแรกและลดลงในช่วงท้าย

สำหรับในกรณีของการวิเคราะห์ผลตอบสนองต่อแรงที่ขึ้นกับเวลาสำหรับการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของจุด A ที่ถูกกำหนดไว้ในคานนั้น พบว่าผลที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม มีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Close-to-exact solution) ด้วยการใช้จำนวนเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมเพียง 5,520 เอลิเมนต์โดยมีค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อนเพียง 0.4 เปอร์เซ็นต์



5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้เขียนใคร่ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรีที่สนับสนุนเวลา รวมทั้งแหล่งข้อมูลอื่นๆ อันเป็นประโยชน์สำหรับการทำวิจัยในครั้งนี้



6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Beirão da Veiga, L, Brezzi, Franco, Marini, Luisa Donatella, Russo, Alessandro (2014). The hitchhiker's guide to the virtual element method. Journal of Mathematical models, & sciences, methods in applied, 24(08): 1541-1573.
- [2] Wolf, John P (2003). The scaled boundary finite element method: John Wiley & Sons.
- [3] Liu Gui-Rong and Trung Nguyen. (2016). Smoothed finite element methods: CRC press.
- [4] Liu GR, Zhang GY, Dai KY, Wang YY, Zhong ZH, Li GY, Han X (2015). A linearly conforming point interpolation method (LC-PIM) for 2D solid mechanics problems. International Journal of Computational Methods, 2(04): 645-665.
- [5] Liu Gui-Rong (2019). The smoothed finite element method (S-FEM): A framework for the design of numerical models for desired solutions. Frontiers of Structural, & Engineering, Civil, 13(2): 456-477.

- [6] Liu GR, Nguyen TT, Dai KY, Lam KY (2007). Theoretical aspects of the smoothed finite element method (SFEM). International journal for numerical methods in Engineering, 71(8): 902-930.
- [7] He ZC, Li GY, Zhong ZH, Cheng AG, Zhang GY, Liu GR, Zhou Z (2013). An edge-based smoothed tetrahedron finite element method (ES-T-FEM) for 3D static and dynamic problems. Computational mechanics, 52(1): 221-236.
- [8] Nguyen-Thoi, T Bui-Xuan T, Liu GR, Vo-Duy, T (2018). Static and free vibration analysis of stiffened flat shells by a cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3) using three-node triangular elements. International Journal of Computational Methods, 15(06): 1850056.
- [9] Jiang Chen, Zhang Zhi-Qian, Han Xu, Liu Gui-Rong (2014). Selective smoothed finite element methods for extremely large deformation of anisotropic incompressible bio-tissues. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 99(8): 587-610.
- [10] Rong Xin, Niu Ruiping, Liu Gui Rong (2020). Stability analysis of smoothed finite element methods with explicit method for transient heat transfer problems. International Journal of Computational Methods, 17(02): 1845005.
- [11] Bhowmick Sauradeep, and Liu GR (2018). On singular ES-FEM for fracture analysis of solids with singular stress fields of arbitrary order. Engineering Analysis with Boundary Elements, 86: 64-81.
- [12] Liu Jun, Zhang Zhi-Qian, Zhang Guirong (2015). A smoothed finite element method (S-FEM) for large-deformation elastoplastic analysis. International Journal of Computational Methods, 12(04): 1540011.
- [13] Persson Per-Olof, and Strang, Gilbert (2004). A simple mesh generator in MATLAB. SIAM review, 46(2): 329-345.
- [14] Talischi Cameron, Paulino Glaucio H Pereira, Anderson Menezes, Ivan FM (2012). PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in MATLAB. Structural, Optimization, and Multidisciplinary, 45(3): 309-328.



- [15] Timoshenko Stephen P and Gere James M. (2009). Theory of elastic stability: Courier Corporation.
- [16] Ooi Ean Tat, Song Chongmin, Tin-Loi Francis, Yang Zhenjun (2012). Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modelling. International journal for numerical methods in engineering, 91(3): 319-342.
- [17] Bathe Klaus-Jürgen and Wilson, Edward L (1976). Numerical methods in finite element analysis: Prentice Hall.
- [18] Hilber Hans M, Hughes Thomas JR, Taylor Robert L (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. Earthquake Engineering, & Dynamics, Structural, 5(3): 283-292.
- [19] Biggs John M and Biggs, JM (1964). Introduction to structural dynamics. ISBN 07-005255-7.
- [20] Newmark Nathan M (1962). A method of computation for structural dynamics. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 127(1): 1406-1433.