

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสม่เสมอ 3 ส่วน
จากเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยม สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ
Smoothed Finite Element using three smoothing domains created
by arbitrary quadrilateral elements for Two-Dimensional Plane Stress Problem

กิตติภูมิ เรืองทรัพย์คณา กำธรเกียรติ มุสิกเกต* บุญชัย ผึ้งไผ่งาม และ สุธี ปิยะพิพัฒน์

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

E-mail: kittipoom_r@mail.rmutt.ac.th, kamtornkiat@rmutt.ac.th*,

boonchai.p@en.rmutt.ac.th, suthee.p@en.rmutt.ac.th

► บทคัดย่อ ◀

ทางเลือกของการสร้างโดเมนสม่เสมอย่อยภายในเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ได้ถูกนำเสนอสำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ โดเมนสม่เสมอย่อย 3 โดเมน ถูกสร้างขึ้นมาด้วยการประยุกต์แนวคิดของความสมมาตรเพื่อให้เกิดการกระจายตัวของโดเมนย่อยดังกล่าวทั่วทั้งขอบเขตของปัญหา เทคนิคการเปลี่ยนแปลงความชันของความเครียดเป็นกุญแจสำคัญสำหรับการกระจายสนามความเครียดตลอดโดเมนสม่เสมอย่อย ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ซึ่งใช้สำหรับงานวิจัยคือคานยื่นปลายที่รับแรงเฉือนกระทำที่ปลายคานในรูปฟังก์ชันพาราโบลา พารามิเตอร์ควบคุมที่ใช้มี 2 ตัว อย่างแรกคือขนาดของโครงตาข่ายจากหยาบสุด ซึ่งมีขนาด 16×4 ไปจนถึงขนาดละเอียด 48×12 ในอัตราส่วน 4:1 ซึ่งเป็นอัตราส่วนเดียวกันกับความยาวในแนวนอนต่อความลึกของคาน พารามิเตอร์ตัวที่สองคือ α ($\alpha_x = \alpha_y$) ซึ่งคิดเป็นเศษส่วนเทียบกับความยาวด้านของเอลิเมนต์โดยค่าที่ใช้คือ 0.2-0.3 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ ค่าความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดคานที่ระยะความยาวกึ่งกลางคานและค่าการเคลื่อนที่ของปลายคานซึ่งได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขถูกนำมาเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทางทฤษฎี ซึ่งคำนวณได้จากตำแหน่งเดียวกันเห็นได้อย่างชัดเจนว่าความแม่นยำของการเคลื่อนที่ปลายคานที่ได้ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ตัวที่สอง ความเค้นตั้งฉาก σ_{xx} เมื่อ α เท่ากับ 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 นั้น พบว่ามีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้ทางทฤษฎีและไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ในขณะที่ความถูกต้องของความเค้นเฉือน σ_{xy} ที่คำนวณได้นั้น กลับพบว่าขึ้นอยู่กับจำนวนความละเอียดของโครงตาข่ายมากกว่าค่าของ α

► คำสำคัญ : ◀

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์; โดเมนสม่เสมอย่อย; การเปลี่ยนแปลงความชัน; ปัญหาความเค้นใน 2 มิติ; คานยื่น

► Abstract ◀

The alternative way to create sub-smoothing domains within an element for smoothed finite element analysis was proposed in this research. Three sub-cell smoothing domains were established continuously with the utilization of symmetrical pattern over the entire problem domain. Strain gradient technique is the most important key to distribute strain field smoothly within smoothing domain. Two-dimensional plane stress problem employed for this research was a cantilever beam subjected to parabola shear force with a maximum magnitude of 1000 unit at free end. Two control parameters were used. The first one is meshing ranging from coarse mesh 16x4 to finer mesh 48x12 as the same 4:1 ratio of horizontal to vertical dimension of beam. The latter is α ($\alpha_x = \alpha_y$) measured as fracture of an element side. The values of α were 0.2-0.3, 0.3-0.4 and 0.4-0.5 respectively. Numerically evaluated normal and shear stresses over the cross-section area at the middle span and displacement at free end were compared to the exact solutions accordingly. Obviously, the free end displacement accuracy strongly influenced by the second control parameter. The normal stresses σ_{xx} at α equal to 0.3-0.4 and 0.4-0.5 compared to the exact solutions were found to be at the same accuracy while shear stresses σ_{xy} were found to be dependent on mesh size than the value of α .

► Keywords: ◀

Smoothed finite element; Sub-cell smoothing domains; Strain gradient; Two-dimensional plane stress; Cantilever beam

1. บทนำ



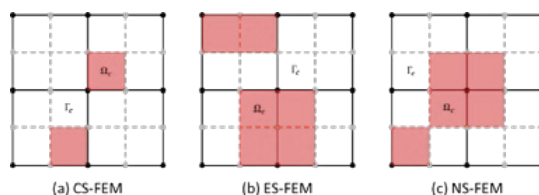
วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์จัดว่าเป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปหรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมมากที่สุดในปัจจุบันเนื่องจากความสามารถในการจัดการกับความซับซ้อนทั้งในส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์ รูปทรงของปัญหาโจทย์และเงื่อนไขขอบ รวมทั้งมีผลการคำนวณที่มีความแม่นยำ วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ใช้หลักในการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนเล็กๆ เรียกว่าเอลิเมนต์ (Elements) ซึ่งเชื่อมโยงกันด้วยโครงตาข่าย (Mesh) ฟังก์ชันของความเครียดถูกสร้างมาจากการใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลเพื่อประมาณค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งภายในเอลิเมนต์ สติฟเนส

ของแต่ละเอลิเมนต์จะถูกนำมารวมกันเป็นสติฟเนสของทั้งโดเมนเพื่อแก้ระบบสมการหาค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง ความเค้นและความเครียดของปัญหาต่อไป ความแม่นยำของคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบการเสีรูปของเอลิเมนต์ [1] ถึงแม้ว่าเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมพื้นฐาน (Constant Strain Triangular Element) จะมีความยืดหยุ่นมากกว่าในการสร้างโครงตาข่ายของปัญหาที่มีความซับซ้อนของรูปทรงก็ตาม ความแม่นยำของค่าที่ได้ก็ยังน้อยกว่าเอลิเมนต์แบบทรงสี่เหลี่ยมพื้นฐาน (Bilinear Quadrilateral element) นอกจากนี้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ยังมีพฤติกรรมที่ให้ค่าความแข็งแกร่งของการวิเคราะห์สูงกว่าความจริง รวมไปถึงปัญหาเรื่องความเที่ยงตรงของผลลัพธ์อีกด้วย

นักวิจัยหลายกลุ่มได้พยายามคิดค้นวิธีใหม่ๆ ขึ้นมาเพื่อจัดปัญหาเหล่านั้นออกไป ได้แก่ วิธีไม่ใช้โครงตาข่าย (Meshless Methods) [2] วิธีการแบ่งออกเป็นหนึ่ง (Partition of Unity) [3] และวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้าน (Polygonal Finite Element Methods) [4-6] วิธีไม่ใช้โครงตาข่ายสามารถใช้ได้ดีกับปัญหาที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งมาก (Large deformation) วิธีการแบ่งออกเป็นหนึ่งยอมให้ใช้รูปทรงเรขาคณิตของโดเมนปัญหาเป็นอิสระไม่ขึ้นตรงกับโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นจากไฟไนท์เอลิเมนต์ ส่วนวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้านนั้นสามารถสร้างโครงตาข่ายเป็นรูปหลายเหลี่ยมใดๆ ก็ได้ [7] Liu et al. [8,9] ได้คิดค้นวิธีที่เรียกว่าสมูทไฟไนท์-เอลิเมนต์ (Smoothed Finite Element Method, SFEM) โดยอาศัยหลักการของ gradient smoothing technique หลักพื้นฐานที่สำคัญของวิธีนี้คือการสร้างสนามความเครียด (strain field) ด้วยการใช้ Smoothed Galerkin weak form ซึ่งจะทำให้โมเดลที่ได้ด้วยวิธีนี้มีความแข็งแกร่งน้อยกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์และเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นรวมทั้งมีความถูกต้องแม่นยำมากกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์เดิม [10]

เทคนิคการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ (smoothing domains) นั้นสามารถทำได้หลายแบบคือ [9] cell-based SFEM (CSFEM) node-based SFEM (NSFEM) และ edge-based SFEM (ESFEM) เป็นต้น ดังแสดงในภาพที่ 1 ขึ้นอยู่กับการใช้ชิ้นส่วนใดในการสร้างโดเมนสม่ำเสมอขึ้นเอง ทำให้มีทางเลือกหลายทางสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่ต้องการ นอกจากนี้แล้ววิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ยังสามารถ

นำไปปรับปรุงใช้กับปัญหา geometry nonlinearity ใน 3 มิติที่มีวัสดุเป็นแบบใกล้บีบอัดไม่ได้ (nearly-incompressible material) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ [11]



ภาพที่ 1 รูปแบบการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ

ในวิธี cell-based SFEM ซึ่งถือว่าเป็นวิธี SFEM ที่เป็นพื้นฐานนั้นได้ถูกศึกษาอย่างแพร่หลาย เช่น นำไปใช้กับปัญหาทางด้านพลศาสตร์ (Dynamics) [12] ปัญหาเกี่ยวกับแผ่นและแผ่นเปลือกบาง (Plate and Shell) [13] ปัญหาเกี่ยวกับกลศาสตร์ของการแตกหักโดยใช้ร่วมกับวิธี Extended Finite Element Method (XFEM) สำหรับปัญหาใน 2 มิติ [14]

งานวิจัยนี้ ทำการศึกษาผลของการใช้เอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวน 3 โดเมนภายในเอลิเมนต์หลักที่สร้างขึ้นมาจากโครงตาข่ายทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้วยโปรแกรม MATLAB [16] ความยาวแต่ละด้านของโดเมนย่อยนี้ถูกกำหนดให้เป็นอัตราส่วน α เทียบกับความยาวเดิมของด้านของเอลิเมนต์หลัก อัตราส่วนของโครงตาข่ายในแนวตั้งต่อแนวนอน ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1:4 ซึ่งเป็นอัตราส่วนเดียวกันกับขนาดของคานยื่นปลายที่ใช้ในการศึกษาหลักในการสมมาตรของ Unit cell ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับโดเมนสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องภายในโดเมนทั้งหมดของปัญหา

2. วิธีการวิจัย



2.1 สมการครอบคลุมปัญหาอีลาสติคใน 2 มิติ (Governing Equations for 2D Elasticity Problem)

ตัวแปรภายในซึ่งไม่ทราบค่าทั้งสามตัวของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ภายใต้ทฤษฎีอีลาสติคเชิงเส้นได้แก่ การเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ความเครียด (strain) และความเค้น (stress) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ดังสมการที่ 1 ถึง 3 คือ

$$u = [u_x \quad u_y]^T \quad (1)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy}]^T \quad (2)$$

$$\sigma = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \quad (3)$$

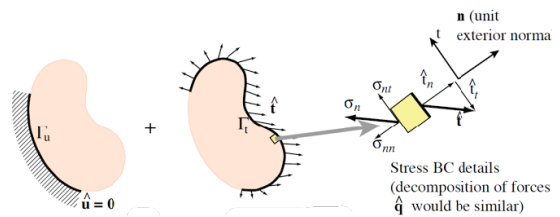
สมการดังกล่าวจะถูกเชื่อมโยงเข้าด้วยกันด้วยสมการ kinematic, constitutive และ internal-equilibrium ถ้าสมมติให้ค่าความเค้นและเครียด ณ สถานะเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์ ความเชื่อมโยงของสมการดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็นสมการในรูปสัญลักษณ์ของเทนเซอร์ (Tensor Notations) คือ

$$\varepsilon = Du, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad D^T \cdot \sigma + b = 0 \quad (4)$$

เมื่อเวกเตอร์ b คือแรงภายในเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุ และ E คืออีลาสติคโมดูลัสเมทริกซ์ และ D เป็นดิฟเฟอเรนเชียลเมทริกซ์โอเปอเรเตอร์

เงื่อนไขขอบที่ถูกระบุไว้บนโดเมนของปัญหาทางกลศาสตร์ Γ นั้น แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือเงื่อนไขขอบของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement boundary conditions) และเงื่อนไขขอบของแรง (Force boundary conditions) การที่จะระบุเงื่อนไขขอบเหล่านั้น นิยมแบ่งโดเมนของปัญหาดังกล่าวออกเป็น 2 ส่วนด้วยกัน คือ Γ_u และ Γ_t เพื่อแยกความแตกต่างของเงื่อนไขขอบทั้ง 2 ประเภท ดังแสดงในภาพที่ 2 เมื่อเงื่อนไขขอบของการเปลี่ยน

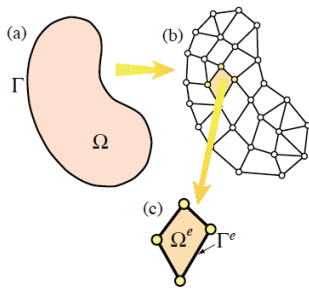
ตำแหน่งถูกกำหนดให้อยู่บนโดเมน Γ_u โดย $\hat{u}$ หมายถึงการเคลื่อนที่บนเงื่อนไขขอบที่กำหนดไว้ซึ่งมักจะมีค่าเท่ากับศูนย์ $\hat{u} = 0$ ณ ตำแหน่งของฐานรองรับ ส่วนเงื่อนไขขอบของแรงนั้นถูกกำหนดให้อยู่บนโดเมน Γ_t ในรูปของสมการ $\sigma_n = \hat{t}$ โดย $\hat{t}$ หมายถึงแรงบนเงื่อนไขขอบที่กำหนดไว้ในรูปของแรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่และ σ_n คือเวกเตอร์ของความเค้นนั่นเอง สมการที่ 4 รวมกับเงื่อนไขขอบทั้งสองแบบที่ได้กล่าวมาแล้วนี้เป็นสมการที่เรียกว่า Strong Form ของปัญหาความเค้นในระนาบซึ่งไม่สะดวกสำหรับการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง นอกจากนี้ในกรณีที่ปัญหามีความสลับซับซ้อนหรือลำดับอนุพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามีลำดับสูงขึ้น การหาผลเฉลยดังกล่าวในรูปของ Closed Form อาจไม่สามารถทำได้ วิธีที่สะดวกกว่าและสามารถหาค่าได้คือการเปลี่ยนจากรูป Strong Form ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของ Weak Form ด้วยการแทนที่สมการอนุพันธ์ของ Strong Form ด้วยการอินทิเกรตหรือเป็นการเฉลี่ยค่าทั้งหมดที่อยู่ในช่วงโดเมนนั้นๆ



ภาพที่ 2 เงื่อนไขขอบของโดเมนของปัญหา [17]

วิธีการเปลี่ยนรูปของ Strong Form ไปเป็น Weak Form นั้นสามารถทำได้ 2 แบบด้วยกันคือ การใช้หลักการของพลังงาน (Energy Methods) หรือหลักการของการถ่วงเศษน้ำหนักตกค้าง (Weighted Residual Methods) ในที่นี้จะขอกล่าวถึงการเปลี่ยนรูปสมการด้วยวิธีแรก เริ่มจากการพิจารณาแบ่งโดเมนของปัญหออกเป็นส่วนเล็กๆ ด้วย

โครงตาข่าย (Mesh) เรียกว่าเอลิเมนต์ดังแสดงในภาพที่ 3 ใช้สัญลักษณ์ด้วยตัวเป็น e เอลิเมนต์ดังกล่าวใน 2 มิติ อาจเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมก็ได้ สมการพลังงานศักย์รวมทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันนอล (ฟังก์ชันของฟังก์ชัน) ของเอลิเมนต์สามารถเขียนได้ดังสมการที่ 5



ภาพที่ 3 การแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย [17]

$$\Pi^e = U^e - W^e \quad (5)$$

เรียกสมการนี้ว่า Total Potential Energy Functional (TPE) เมื่อพลังงานภายในที่เกิดขึ้นมาจากพลังงานความเครียดภายในของวัตถุซึ่งมีสมการคือ

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \sigma^T \varepsilon d\Omega^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon^T E \varepsilon d\Omega^e \quad (6)$$

และพลังงานภายนอกที่เกิดขึ้นเป็นผลรวมของแรงภายในที่ทราบค่าแล้วกับแรงภายนอกซึ่งกระทำบริเวณขอบของโดเมน Γ_e นั่นเองโดยมีสมการคือ

$$W^e = \int_{\Omega^e} u^T b d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} u^T \hat{t} d\Gamma^e \quad (7)$$

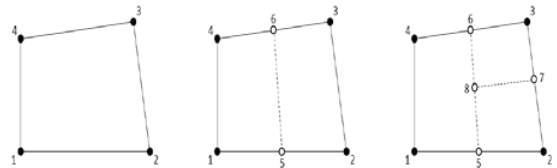
หลังจากการแทนค่าด้วย $u = \sum N u^e$, $\varepsilon = B u^e$, $\sigma = E \varepsilon$ กลับลงไปในสมการ TPE ของแต่ละเอลิเมนต์ร่วมกับหลักการของการแปรผัน (Variational Principle) ซึ่งกล่าวว่า $\delta \Pi = 0$ เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลง δu ที่เกิดขึ้นเพียงเล็กน้อย [18] จะได้สมการไฟไนท์เอลิเมนต์สุดท้ายในรูป

$$K u = F \quad (8)$$

เมื่อ K, u, F คือสตีเฟนสมเมทริกซ์ เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อและเวกเตอร์ของแรงภายในที่จุดต่อในระบบโคออร์ดิเนตหลักตามลำดับ

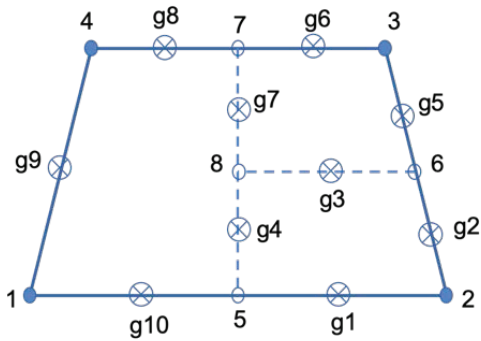
2.2 โดเมนสม่าเสมอทรงสี่เหลี่ยม (Quadrilateral Smoothing Domains)

งานวิจัยในครั้งนี้ ใช้การแบ่งโดเมนของทั้งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยโดยใช้เอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยม (Quadrilateral element) ดังแสดงในภาพที่ 4 เอลิเมนต์หลักดังกล่าวจะถูกนำมาแบ่งออกเป็นส่วยย่อยที่เรียกว่าโดเมนสม่าเสมอ (smoothing domain, SD) ด้วยการใช้อิเลเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมจำนวน 3 เอลิเมนต์ จำนวนน้อยที่สุดของโดเมนสม่าเสมอสำหรับปัญหาของของแข็งใน 2 มิติซึ่งเสนอโดย [19] มีค่าเท่ากับ $2n/3$ เมื่อ n คือจำนวนจุดต่อทั้งหมดของปัญหา การแบ่งโดเมนย่อยสม่าเสมอนี้ สามารถทำได้โดยการลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างกึ่งกลางด้านทั้งสองที่อยู่ตรงข้ามกันดังแสดงในภาพที่ 4



ภาพที่ 4 การแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 3 โดเมนสม่าเสมอ

เนื่องจากการเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของด้านที่อยู่บนโดเมนสม่าเสมอนี้ใช้การประมาณเป็นแบบเชิงเส้น เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งแบบสม่าเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก ที่สามารถคำนวณได้ด้วยการใช้ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) ของเกาส์ ณ จุดกึ่งกลางด้านเพียงจุดเดียวโดยไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ของมัน ในทางปฏิบัตินั้น นิยมใช้การประมาณเชิงเส้นสำหรับการหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างดังกล่าว



ภาพที่ 5 ตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss Points)

ภาพที่ 5 วงกลมทึบ 1-2-3-4 แสดงตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมหลัก วงกลม 5-6-7-8 แสดงตำแหน่งของจุดต่อของโดเมนย่อย สม่่าเสมอ 3 โดเมนที่ถูกสร้างขึ้นมา วงกลมกากบาท g1-g10 แสดงตำแหน่งจุดของเกาส์ทั้งหมด ค่าของฟังก์ชันรูปร่างสามารถหาได้โดยค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันรูปร่างของจุดต่อทั้งสองบนด้านที่กำลังพิจารณา เช่น

$$N_1(5) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_1(1) + N_1(2))/2 = (1 + 0)/2 = 0.5$$

$$\text{ในลักษณะเดียวกัน } N_2(5) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_2(1) + N_2(2))/2 = (0 + 1/2) = 0.5$$

$$N_1(8) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_1(1) + N_1(2) + N_1(3) + N_1(4))/4 = 1/4$$

$$\text{ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง } N_1(g_1) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_1(5) + N_1(2))/2 = (0.5 + 0)/2 = 1/4$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน ค่าฟังก์ชันรูปร่าง } N_2(g_1) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_2(2) + N_2(5))/2 = (1 + 0.5)/2 = 3/4 \text{ เป็นต้น}$$

2.3 สมการสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (Smoothed Finite Element Equation)

จากหลักการของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งหมดที่กล่าวมาเบื้องต้น สามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\bar{K}^{SFEM} \bar{u} = \bar{F} \quad (9)$$

สัญลักษณ์บาร์ด้านบนใช้เพื่อแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นั่นเอง ดังนั้น สถิติเนสเมทริกซ์สม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของสถิติเนส สม่ำเสมอย่อยได้เป็น

$$\bar{K}^{SFEM} = \sum \bar{K}^{SFEMe} = \sum_{k=1}^{n_T} \bar{B}^T D \bar{B} A_k^s \quad (10)$$

เมื่อ $\bar{B}$ คือ strain-displacement matrix ภายหลังการแก้ระบบสมการที่ 9 ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ก็สามารถหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายจุดต่อที่ต้องการได้และนำไปสู่การวิเคราะห์เพื่อหาค่าความเค้น ความเครียดภายในชิ้นส่วนได้ต่อไป

2.4 การสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field Construction)

ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์อยู่ที่ขั้นตอนของการสร้างสนามความเครียดแบบสม่ำเสมอ โดยอาศัยเทคนิคของ strain smoothing บนโดเมนสม่ำเสมอที่อยู่ภายในทุกเอลิเมนต์นั่นเอง ซึ่งไม่มีขั้นตอนนี้ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติ ขั้นตอนอื่นๆ นอกเหนือจากขั้นตอนนี้นั้นเหมือนกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทุกประการ ทำให้สามารถใช้ประโยชน์จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งมีใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งส่วนที่เป็น open source และ commercial software โดยไม่จำเป็นต้องสร้างขึ้นใหม่ทั้งหมด สนามหรือตัวแปรความเครียดสม่ำเสมอนี้ สามารถสร้างขึ้นได้ด้วยการปรับปรุงตัวแปรสนามความเครียดที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติโดยใช้ smoothing operation ขบวนการดังกล่าวเริ่มจากการสร้างโครงตาข่าย (Element mesh) แบบสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้วยวิธีปกติเหมือนกับในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แล้วหาค่าของตัวแปรความเครียดในรูปของ

$$\bar{\varepsilon} = D \left(\sum_{I=1}^N N_I(x) \bar{d}_I \right) = \sum_{I=1}^N \bar{B}_I \bar{d}_I = \bar{B} \bar{d} \quad (11)$$

การคำนวณค่าของตัวแปรความเครียด
สมมาตร $\bar{\varepsilon}$ ณ ตำแหน่ง x_k จะใช้เทคนิคการประมาณ
ของค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน [20] กล่าวคือ

$$\bar{\varepsilon}(x_k) = \int_{\Omega_k^s} L \bar{u}(x) W(x_k - x) d\Omega \quad (12)$$

เมื่อ Ω_k^s คือโดเมนสมมาตรสำหรับ
ตำแหน่ง x_k และ $W(x_k - x)$ คือฟังก์ชันน้ำหนัก
ที่สัมพันธ์กับค่า ณ ตำแหน่งดังกล่าว ตัวแปรความ
เครียดที่อยู่ภายในโดเมนสมมาตรนี้จะถูกคำนวณจาก
การกระจายตัวแปรความเครียดในสมการที่ 11 ตลอด
ทั่วทั้งโดเมน Ω_k^s และถูกสมมติให้มีค่าคงที่ ฟังก์ชัน
น้ำหนักที่ใช้กัน มีความสำคัญกับการทำให้ตัวแปร
ความเครียดที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เกิดการ
กระจายตัวอย่างสมมาตรตลอดทั่วทั้งโดเมน ซึ่ง
จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ [9] (1) ค่าของมัน
จะต้องไม่เป็นศูนย์และต้องมีค่าเป็นบวกภายใน
โดเมนสมมาตรที่พิจารณา (2) ต้องมีศูนย์กลางอยู่ที่
ตำแหน่ง x_k (3) ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของคุณสมบัติ
การมีค่าเป็น 1 (Unity property) เพื่อความง่าย
ของการคำนวณโดยที่ยังคงสอดคล้องตามเงื่อนไข
ดังกล่าวข้างต้น งานวิจัยนี้จะกำหนดให้ใช้ Heaviside
step function ซึ่งเป็นฟังก์ชันน้ำหนักอย่างง่ายและ
แสดงได้ดังสมการที่ 13

$$W(x_k - x) = \begin{cases} \frac{1}{A_k^s}, & x \in \Omega_k^s \\ 0, & x \notin \Omega_k^s \end{cases} \quad (13)$$

เมื่อ A_k^s คือพื้นที่ของโดเมนสมมาตร
ที่กำลังพิจารณาอยู่

ในกรณีทั่วไป การเปลี่ยนจากตัวแปร
ความเครียดซึ่งอาจไม่สามารถหาได้ง่าย มาเป็นตัวแปร
ของการเปลี่ยนตำแหน่งซึ่งหาได้ง่ายกว่านั้น เป็นสิ่งที่
หลีกเลี่ยงไม่ได้ นอกเหนือไปจากนั้น การที่ตัวแปร
ของการเปลี่ยนตำแหน่งถูกสมมติให้มีความต่อเนื่อง
ตลอดบนขอบเขตของโดเมนสมมาตร ทำให้สามารถ
เปลี่ยนรูปของสมการที่ 12 โดยใช้การอินทิเกรต
ทีละส่วน (Integration by part) กลายเป็น

$$\bar{\varepsilon}(x_k) = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) \bar{u}(x) d\Gamma \quad (14)$$

เมื่อ $L_n(x)$ คือเวกเตอร์องค์ประกอบ
ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทั้งสองทิศทางที่พุ่งออกจาก
ด้านหรือขอบเขตของโดเมนสมมาตรนั่นเอง

$$L_n(x) = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (15)$$

สตีเฟนสเมทริกซ์สมมาตรในระบบ
โคออร์ดิเนตหลักในสมการที่ 10 นั้น ขึ้นอยู่กับค่า
ของ strain-displacement matrix $\bar{B}$ หากทำการ
แทนค่า $\bar{u}(x) = \sum N_i \bar{u}_i$ ลงในสมการที่ 14
แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(x) &= \bar{B}(x) \bar{u}(x) \Rightarrow \bar{B}(x) \\ &= \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) N(x) d\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{b}_x & 0 \\ 0 & \bar{b}_y \\ \bar{b}_y & \bar{b}_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

เมื่อ

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma} n_i(x) N(x) d\Gamma, \quad i = x, y \quad (17)$$

สมการที่ 17 เป็นเพียงการอินทิเกรต
ตลอดความยาวของด้านที่อยู่บนโดเมนสมมาตร
ซึ่งถูกสมมติว่าตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งเป็น

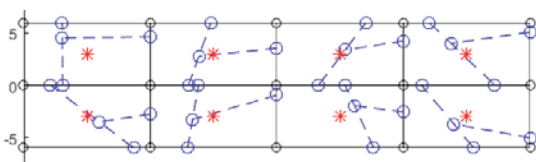
เส้นตรง เมื่อใช้กฎการอินทิเกรตของเกาส์ จำนวนของจุดที่ต้องการคือ 1 จุด ซึ่งโดยทั่วไปมักจะใช้จุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของด้านนั้นๆ เมื่อเป็นเช่นนั้นสามารถเปลี่ยนจากเครื่องหมายอินทิเกรตเป็นเครื่องหมายผลรวมได้เป็น

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k} \sum_{j=1}^{n_f} n_i^j N(x_j^G) L_j, \quad i = x, y \quad (18)$$

3. การโมเดลและวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Modeling and Simulation)

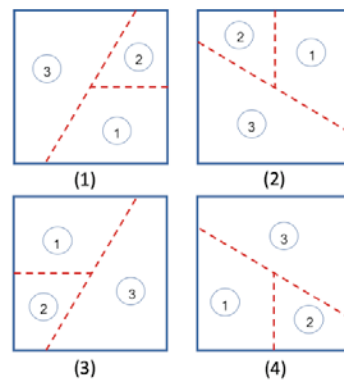
3.1 โดเมนสมำเสมอแบบ 3 ส่วนย่อย (Three Arbitrary Smoothing Domains)

การแบ่งโดเมนสมำเสมอแบบ 3 ส่วนย่อยสำหรับงานวิจัยนี้ เริ่มต้นจากการแบ่งโดเมนใหญ่ของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์หลักโดยใช้เอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยม (Quadrilateral element) จากนั้นจึงทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักดังกล่าวออกเป็นโดเมนสมำเสมอจำนวน 3 ส่วนย่อย โดยการสุ่มตำแหน่งบนด้านทั้งสามสอดคล้องกับค่า α ที่กำหนดไว้ ภาพที่ 6 เป็นการสร้าง smoothing domain ในลักษณะแบบอิสระจะพบว่าลักษณะรูปร่างของโดเมนสมำ่อยยที่ได้จะมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดและรูปร่างแตกต่างกันออกไปไม่มีทิศทางและสังเกตได้อย่างชัดเจนว่าการกระจายตัวของโดเมนเป็นไปอย่างไร้การควบคุม ซึ่งจะส่งผลให้การคำนวณหาค่าผลลัพธ์ของการวิจัยมีความไม่แน่นอนแตกต่างกันไปทุกครั้งที่มีการสุ่มเลือกค่าของ α ใหม่ การสร้างโดเมนย่อยสมำเสมอแบบนี้จึงไม่สามารถนำไปใช้ได้

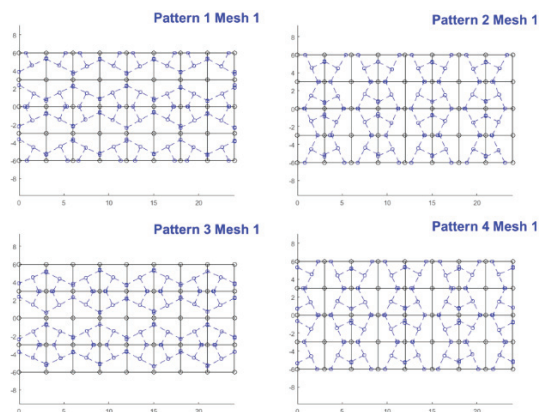


ภาพที่ 6 การสร้างโดเมนย่อยสมำเสมอแบบอิสระ

ถึงแม้ว่ารูปแบบของการสร้างโดเมนสมำ่อยย 3 โดเมน สามารถมีได้ 4 รูปแบบด้วยกัน ดังแสดงในภาพที่ 7 แต่ก็เป็นเพียงลักษณะของการหมุนเอลิเมนต์ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาเท่านั้น โดเมนสมำ่อยยแบบ 3 โดเมนดังกล่าวนี้ เมื่อมีการนำไปประยุกต์ใช้โดยอาศัยคุณสมบัติของการกระจายตัวและความสมมาตรแล้ว จึงมีรูปร่างเหมือนกันทุกประการดังแสดงในภาพที่ 8

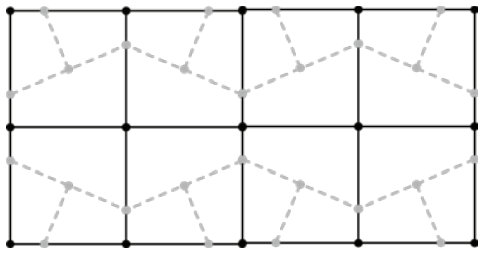


ภาพที่ 7 โดเมนย่อยสมำเสมอ



ภาพที่ 8 โดเมนสมำ่อยย 3 ส่วนที่เป็นไปได้

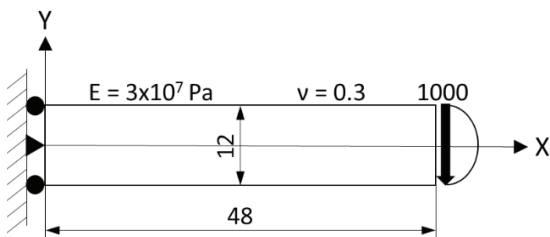
สำหรับงานวิจัยนี้ จะใช้รูปแบบของการสร้างโดเมนสมำ่อยย 3 โดเมนย่อย ตามแบบที่ (4) ของภาพที่ 7 สำหรับการวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขต่อไป เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วยโดเมนสมำ่อยย 3 โดเมนย่อยสำหรับงานวิจัยครั้งนี้ แสดงได้ดังภาพที่ 9



ภาพที่ 9 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 ส่วน

3.2 คานยื่น (Cantilever Beam)

ตัวอย่างคานปลายยื่นที่มีความยาว 48 หน่วย ความสูง 12 หน่วย และมีความหนา 1 หน่วย เพื่อกำหนดให้เป็นปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ สำหรับทดสอบขบวนการและผลของการวิเคราะห์ ดังแสดงในภาพที่ 9 ปลายคานด้านขวามือ มีแรงกระทำในแนวตั้งโดยมีการกระจายตัวของแรงเป็นรูปพาราโบลา เท่ากับ 1000 หน่วย ปลายคานด้านซ้ายมือมีสภาพเป็นแบบยึดหมุน (Hinge support) ที่ระยะกึ่งกลางของความลึก ($D/2$) โดยที่ขอบด้านบนและด้านล่าง มีสภาพเป็นที่รองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวตั้ง (Roller support) ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและอัตราส่วนปัวซองมีค่าเท่ากับ $3 \times 10^7 \text{ Pa}$ และ 0.3 ตามลำดับ



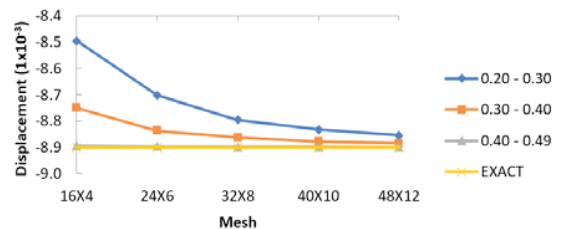
ภาพที่ 10 คานยื่นปลายรับแรงเฉือนที่ปลายคาน

โปรแกรมการวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาใน 2 มิติด้วยโปรแกรม MATLAB [9] ถูกนำมาปรับปรุงในส่วนของการสร้างโดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 โดเมนย่อย ซึ่งด้านแต่ละด้านมีความยาวเป็นสัดส่วน α ของความยาวด้านเดิม ผลเฉลยแม่นยำนั้นได้มาจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี [21]

4. ผลการวิเคราะห์

จากการทดสอบคานตัวอย่างด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งพัฒนาโดย [9] แล้วนำมาปรับปรุงในส่วนของการสร้างโดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 โดเมน แล้วนำผลที่ได้มาวิเคราะห์ โดยการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) กำหนดให้โครงตาข่ายที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์คือ 16×4 24×6 32×8 40×10 และ 48×12 ตามลำดับ ค่า α ที่ใช้แบ่งออกเป็น 3 ช่วงคือ 0.2-0.3 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ

4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (Displacement)



ภาพที่ 11 ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน (Tip Displacements)

ผลการทดสอบเห็นได้อย่างชัดเจนว่า จำนวนของการแบ่งโครงตาข่ายและค่า α ที่ใช้กำหนดระยะการแบ่งโดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 โดเมนย่อยนั้น มีผลต่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ โดยที่ใช้ผลเฉลยแม่นยำตรงเป็นตัววัดค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ ซึ่งผลเฉลยแม่นยำตรงค่าของการโก่งตัวที่ปลายคานเท่ากับ -8.9×10^{-3} จากภาพที่ 11 จะเห็นว่า จำนวนการแบ่ง Mesh ที่มากขึ้นส่งผลให้ค่าความแม่นยำเพิ่มมากขึ้นด้วยตามลำดับ อย่างในกรณีที่มีจำนวน Mesh เท่ากับ 16×4 ได้ผลจากการวิเคราะห์คือ -8.4955×10^{-3} ซึ่งมีค่าต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรงเท่ากับ 4.045×10^{-2} หรือคิดเป็นร้อยละ 4.55 แต่ที่

จำนวน Mesh เท่ากับ 48×12 ค่าที่ได้คือ -8.8537×10^{-3} ซึ่งมีค่าต่างจากผลเฉลยแม่นยำเพียง 4.63×10^{-1} หรือ ร้อยละ 0.52 เท่านั้น และในกรณีของค่า α ก็แสดงผลไปในทิศทางเดียวกัน กล่าวคือค่า α ยังมีค่าเข้าใกล้ 0.5 ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะยังมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมากขึ้น

4.2 ความเค้นตึงฉาก (Normal Stress)

ในส่วนของการวิเคราะห์ค่าของความเค้นตึงฉากในแนวราบ σ_{xx} นั้น จะทำการวิเคราะห์โดยใช้ขนาดของโครงตาข่ายและค่า α เป็นตัวควบคุม เหมือนกับการวิเคราะห์ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน คือ จะแบ่งโครงตาข่ายออกเป็น 5 กลุ่ม ในแต่ละกลุ่มจะแบ่ง α ออกเป็น 3 ช่วง และนำค่าที่ได้ไปเทียบกับผลเฉลยแม่นยำต่อไป สำหรับความเค้นตึงฉากในแนวตั้งนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์

จากตารางที่ 1 พบว่า จำนวนจุดต่อของหน้าตัดคาน ณ ตำแหน่งกึ่งกลางความยาว ($L/2$) มีจำนวนไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับจำนวนของการแบ่งโครงตาข่าย เพื่อความสะดวก ผู้เขียนจะใช้จุดต่อ 2 จุด (หมายเลขอ้างอิงของจุดต่อ มาจากตารางที่ 1) ซึ่งอยู่ถัดจากตำแหน่งผิวบนและผิวล่างเข้ามาตามลำดับ สำหรับการเปรียบเทียบกับค่าของความเค้นตึงฉากที่ได้จากทฤษฎี กล่าวคือ จุดต่อ 2, 4 (โครงตาข่าย 16×4) จุดต่อ 2, 6 (โครงตาข่าย 24×6) จุดต่อ 2, 8 (โครงตาข่าย 32×8) จุดต่อ 2, 10 (โครงตาข่าย 40×10) และ จุดต่อ 2, 12 (โครงตาข่าย 48×12) ตามลำดับ ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่างๆ เหล่านั้น ในกรณีที่ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 8.75, 3.88, 2.23, 1.62

และ 1.41 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 6.13, 3.01, 1.93, 1.45 และ 1.24 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 และในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 5.86, 2.75, 1.70, 1.16 และ 0.82 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 ตามลำดับ

ค่าต่างๆ ในตารางที่ 1 สามารถนำไปวาดกราฟความเค้นตึงฉาก ณ ตำแหน่งจุดต่อต่างๆ แยกตามจำนวนของโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นมาบนกราฟเดียวกันกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีแสดงได้ดังภาพที่ 12 ส่วนภาพที่ 13 แสดงถึงร้อยละความแตกต่างระหว่างค่าดังกล่าวที่แปรผันไปตามขนาดของโครงตาข่ายซึ่งพบว่า ค่าของ α ในช่วงของโครงตาข่ายหยาบ ส่งผลต่อร้อยละความแตกต่างอย่างชัดเจน จนกระทั่งไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญเมื่อเพิ่มขนาดของโครงตาข่ายให้ละเอียดขึ้น

4.3 ความเค้นเฉือน (Shear Stress)

ในส่วนของการวิเคราะห์ค่าของความเค้นเฉือน σ_{xy} นั้น จะใช้การวิเคราะห์ในลักษณะเดียวกันกับการวิเคราะห์ความเค้นตึงฉากที่ผ่านมา ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2 ภาพที่ 14 และ ภาพที่ 15 ตามลำดับ

จากตารางที่ 2 พบว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่างๆ ซึ่งอาศัยหลักการเดียวกันกับความเค้นตึงฉากในหัวข้อที่ผ่านมา ในกรณีที่ α มีค่าอยู่ระหว่าง

0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 12.08, 7.40, 3.43, 2.09 และ 2.24 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 11.13, 6.25, 3.35, 2.32 และ 1.88 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 และในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 9.80, 6.09, 2.80, 2.25 และ 1.71 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ตามลำดับ ค่าต่างๆ ในตารางที่ 2 สามารถนำไปวาดกราฟความเค้นเฉือน ณ ตำแหน่งจุดต่อต่างๆ แยกตามจำนวนของโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นมาบนกราฟเดียวกันกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎี แสดงได้ดังภาพที่ 14 เช่นเดียวกับในกรณีของความเค้นดัดฉาก ภาพที่ 15 แสดงถึงร้อยละความแตกต่างระหว่างค่าดังกล่าวที่แปรผันไปตามขนาดของโครงตาข่าย ซึ่งพบว่าการเพิ่มขนาดของโครงตาข่าย ให้มีความละเอียดมากขึ้นส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณมากกว่าการเพิ่มค่าของ α

5. อภิปรายผลและสรุป (Discussion and Conclusion)

ผลที่ได้จากการวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อยทรงสี่เหลี่ยมแบบ 3 ส่วนภายในเอลิเมนต์หลักซึ่งอาศัยหลักความสมมาตรของ Unit cell เข้ามาช่วยเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องของโดเมนสม่ำเสมอที่สร้างขึ้นตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติของคานซึ่งรับแรงเฉือนในรูปฟังก์ชันพาราโบลาที่ปลายอิสระนี้ มีลักษณะการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรง

หรือค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีในสองรูปแบบด้วยกัน โดยมีความแตกต่างเพียงร้อยละ 1-2 สำหรับความเค้นทั้งสองแบบ กล่าวคือ แบบที่หนึ่งคือขนาดของโครงตาข่าย เมื่อมีการเพิ่มจำนวนของโครงตาข่ายให้มากขึ้น ซึ่งเป็นที่คาดการณ์ได้ สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขที่ว่า ยิ่งความละเอียดของโครงตาข่ายมากขึ้น ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ก็สูงตามไปด้วย หากแต่ต้องแลกมาด้วยการประมวลผลทางคอมพิวเตอร์ที่นานขึ้นและใช้ทรัพยากรของเครื่องที่มากขึ้น สำหรับรูปแบบที่สองซึ่งเป็นค่าของ α นั้น ก็เป็นไปในทิศทางเดียวกัน ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้แปรผันโดยตรงกับค่า α ที่เข้าใกล้ 0.5 เนื่องจากงานวิจัยในครั้งนี้ มีการประยุกต์ใช้หลักความสมมาตรของ Unit cell เพื่อกระจายรูปแบบความต่อเนื่องของโดเมนสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งขอบเขตของปัญหาที่กำลังพิจารณาร่วมด้วยความไม่ต่อเนื่องของขอบเขตของปัญหา (Discontinuity) หรือปัญหากลศาสตร์การแตกหัก (Fracture Mechanics) ซึ่งมักจะพบการเปลี่ยนแปลงความเค้นสูง (Stress Concentration) ณ บริเวณปลายรอยแตก (Crack tips) ดังนั้น โดยการพิจารณาใช้ทั้งค่า α และจำนวนของโครงตาข่ายที่เหมาะสมร่วมกับการจัดรูปแบบสมมาตรในบริเวณดังกล่าวเพื่อให้เกิดความแม่นยำในการคำนวณสูง ในขณะที่บริเวณที่ไกลออกไปซึ่งได้รับอิทธิพลจากการเปลี่ยนแปลงความเค้นสูงดังกล่าวก็น้อยนั้น อาจพิจารณาใช้ค่า α และขนาดโครงตาข่ายที่น้อยลงมา แต่ยังคงให้ค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ในระดับที่ยอมรับได้ อันจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณให้ดีขึ้น

ตารางที่ 1 ความเค้นตึงฉาก σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายต่างๆ

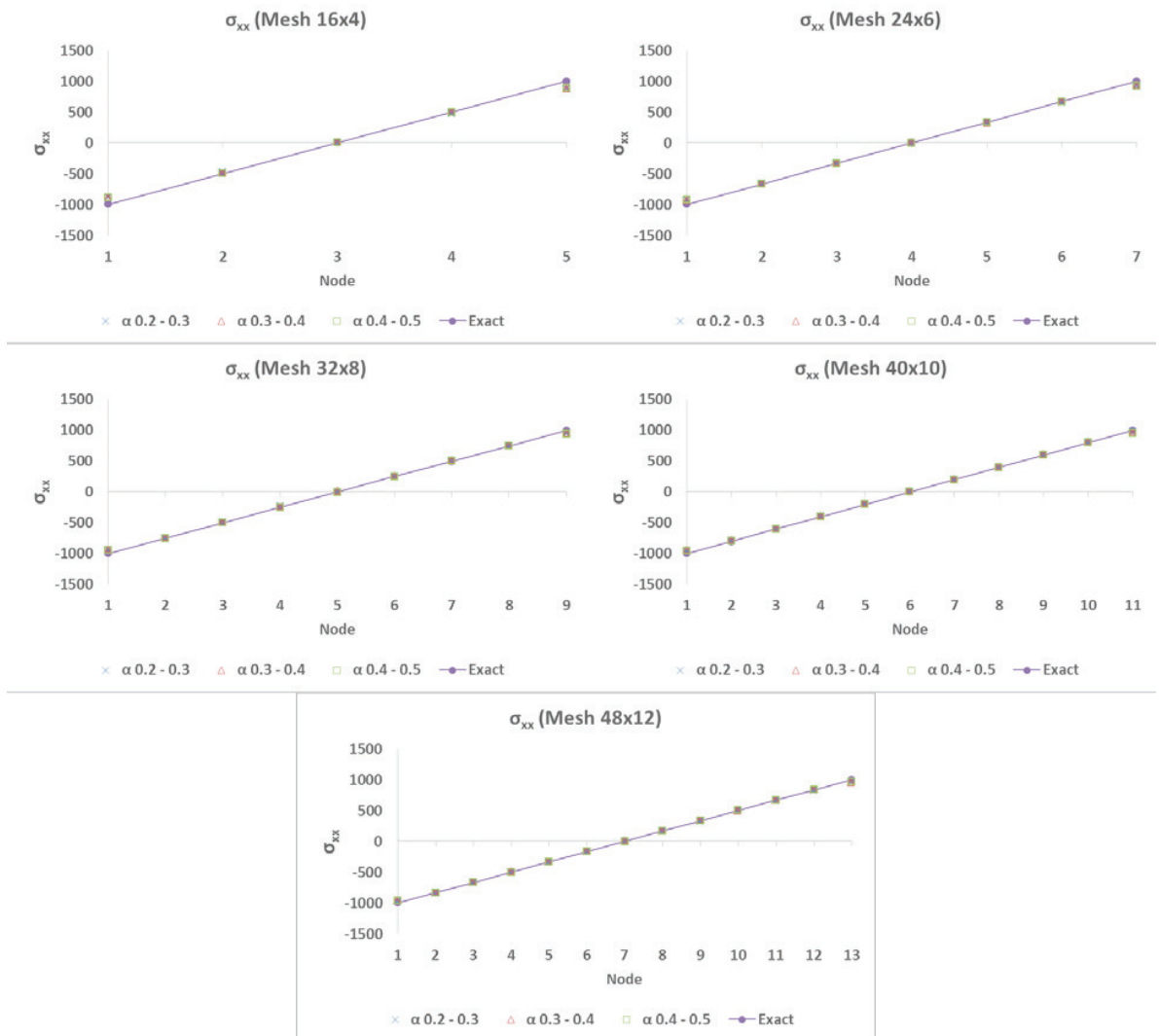
Mesh 16x4						Mesh 24x6								Mesh 32x8									
α	node					α	node							α	node								
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2-0.3	-874.83	-472.79	3.23	477.07	875.56	0.2-0.3	-920.09	-653.91	-328.83	1.88	324.43	654.23	925.29	0.2-0.3	-943.76	-745.81	-495.13	-244.90	-2.20	247.53	500.94	740.80	937.97
0.3-0.4	-890.39	-496.60	-0.23	497.64	876.07	0.3-0.4	-932.82	-660.99	-330.14	-4.47	327.23	663.29	928.34	0.3-0.4	-940.80	-747.95	-501.10	-252.01	0.70	253.67	502.38	744.04	945.35
0.4-0.5	-887.19	-499.09	0.22	496.51	887.26	0.4-0.5	-925.45	-668.94	-332.70	-0.85	330.84	666.06	923.24	0.4-0.5	-943.80	-746.51	-496.99	-250.71	-4.36	247.82	501.10	749.77	945.14
Exact	-1000.00	-500.00	0.00	500.00	1000.00	Exact	-1000.00	-666.67	-333.33	0.00	333.33	666.67	1000.00	Exact	-1000.00	-750.00	-500.00	-250.00	0.00	250.00	500.00	750.00	1000.00

Mesh 40x10											Mesh 48x12														
α	node										α	node													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.2-0.3	-959.28	-789.18	-597.61	-395.64	-197.61	1.80	196.09	397.57	592.08	791.52	968.94	0.2-0.3	-970.10	-820.89	-669.83	-493.36	-332.99	-163.41	0.25	163.66	328.34	497.70	663.46	829.16	961.25
0.3-0.4	-950.38	-796.58	-598.57	-396.96	-195.79	2.92	201.83	399.13	598.36	800.00	954.12	0.3-0.4	-965.70	-833.43	-662.44	-496.25	-331.93	-162.15	2.30	168.21	331.58	497.48	663.48	835.56	957.73
0.4-0.5	-957.89	-797.69	-601.99	-400.56	-198.94	0.50	198.37	398.17	598.14	799.06	956.32	0.4-0.5	-964.38	-836.20	-665.12	-500.95	-333.29	-165.45	-0.42	166.88	334.32	500.75	667.63	831.56	961.53
Exact	-1000.00	-800.00	-600.00	-400.00	-200.00	0.00	200.00	400.00	600.00	800.00	1000.00	Exact	-1000.00	-833.33	-666.67	-500.00	-333.33	-166.67	0.00	166.67	333.33	500.00	666.67	833.33	1000.00

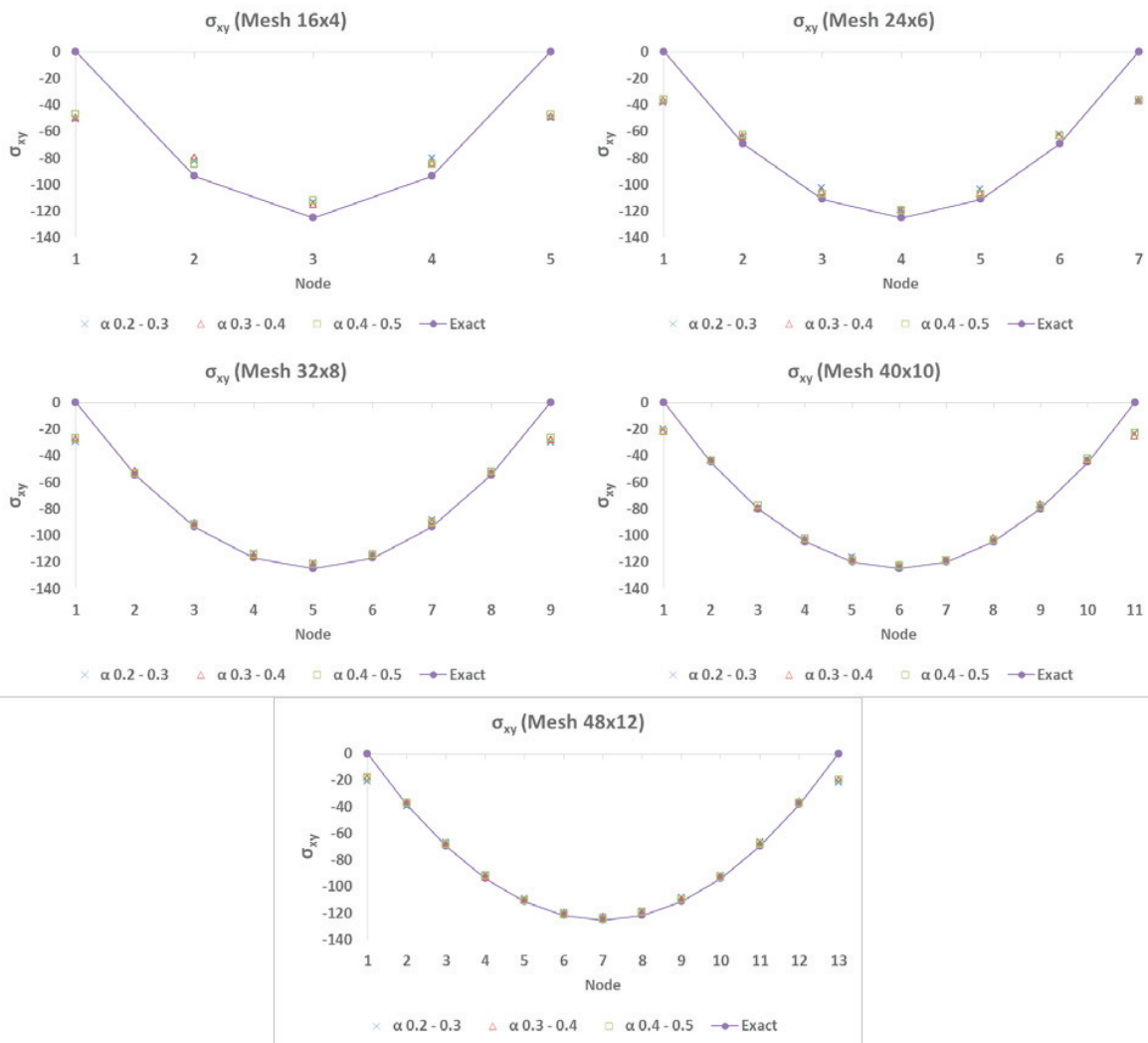
ตารางที่ 2 ค่าความเค้นเฉือน σ_{xy} ที่โครงตาข่ายขนาดต่างๆ

Mesh 16x4						Mesh 24x6								Mesh 32x8									
α	node					α	node							α	node								
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2-0.3	-51.08	-82.16	-113.40	-80.05	-49.73	0.2-0.3	-38.27	-64.17	-102.72	-119.26	-103.67	-62.11	-37.45	0.2-0.3	-29.36	-52.82	-91.01	-113.36	-120.73	-114.87	-88.66	-52.75	-29.87
0.3-0.4	-49.65	-79.81	-115.23	-83.71	-48.94	0.3-0.4	-37.02	-63.62	-105.68	-118.91	-106.43	-63.26	-36.82	0.3-0.4	-27.56	-51.30	-90.47	-115.48	-121.48	-114.78	-89.54	-53.08	-27.94
0.4-0.5	-46.95	-84.79	-112.01	-84.90	-47.59	0.4-0.5	-36.10	-62.75	-106.89	-119.68	-106.85	-63.24	-36.23	0.4-0.5	-27.19	-53.46	-92.27	-114.55	-121.90	-114.59	-90.64	-51.65	-26.40
Exact	0.00	-93.75	-125.00	-93.75	0.00	Exact	0.00	-69.44	-111.11	-125.00	-111.11	-69.44	0.00	Exact	0.00	-54.69	-93.75	-117.19	-125.00	-117.19	-93.75	-54.69	0.00

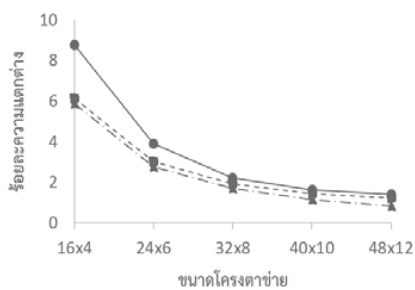
Mesh 40x10											Mesh 48x12														
α	node										α	node													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.2-0.3	-20.19	-43.25	-79.82	-103.52	-116.68	-123.79	-118.22	-104.40	-77.86	-42.81	-23.78	0.2-0.3	-20.95	-39.89	-67.44	-91.50	-109.47	-119.82	-123.68	-119.52	-108.45	-92.37	-66.85	-37.54	-22.11
0.3-0.4	-21.36	-43.31	-79.34	-103.08	-117.39	-122.35	-118.90	-102.13	-76.50	-44.02	-24.99	0.3-0.4	-18.74	-36.72	-67.99	-93.08	-110.35	-119.99	-123.15	-120.06	-109.96	-92.69	-67.79	-36.35	-20.28
0.4-0.5	-22.30	-43.87	-77.52	-102.64	-118.80	-122.85	-119.02	-103.38	-78.50	-42.57	-23.04	0.4-0.5	-18.10	-37.02	-68.18	-91.61	-110.59	-120.72	-124.37	-119.16	-109.64	-92.49	-67.88	-36.99	-19.64
Exact	0.00	-45.00	-80.00	-105.00	-120.00	-125.00	-120.00	-105.00	-80.00	-45.00	0.00	Exact	0.00	-38.19	-69.44	-93.75	-111.11	-121.53	-125.00	-121.53	-111.11	-93.75	-69.44	-38.19	0.00



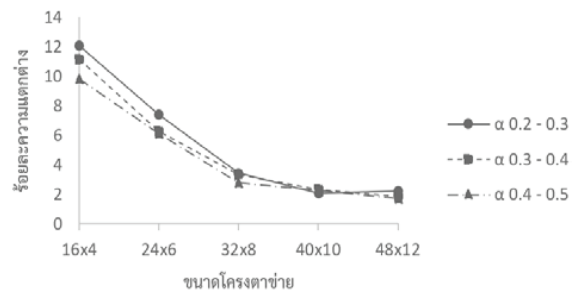
ภาพที่ 12 σ_{xx} vs. Exact solutions



ภาพที่ 13 σ_{xy} vs. Exact solutions



ภาพที่ 14 ความแตกต่างของ σ_{xx} กับค่าทางทฤษฎี



ภาพที่ 15 ความแตกต่างของ σ_{xy} กับค่าทางทฤษฎี

6. กิตติกรรมประกาศ



คณะผู้เขียนใคร่ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรีที่สนับสนุนเวลาในการทำวิจัยครั้งนี้

7. เอกสารอ้างอิง



[1] Lee NS and Bathe KJ (1993). Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. *International Journal for numerical Methods in engineering*, 36(20): 3553-76.

[2] Belytschko T, Lu YY and Gu L (1994). Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2): 229-56.

[3] Babuška I, Banerjee U and Osborn JE (2004). Generalized finite element methods—main ideas, results and perspective. *International Journal of Computational Methods*, 1(01): 67-103.

[4] Beirão da Veiga L, Brezzi F, Cangiani A, Manzini G, Marini LD and Russo A (2013). Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(01): 199-214.

[5] Francis A, Ortiz-Bernardin A, Bordas SP and Natarajan S (2017). Linear smoothed polygonal and polyhedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(9): 1263-88.

[6] Sukumar N and Tabarraei A (2004). Conforming polygonal finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(12): 2045-66.

[7] Talischi C, Paulino GH, Pereira A and Menezes IF (2012). PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 45(3): 309-28.

[8] Liu G, Dai K and Nguyen TT (2007). A smoothed finite element method for mechanics problems. *Computational Mechanics*, 39(6): 859-77.

[9] Liu G-R and Trung N (2016). *Smoothed finite element methods*. CRC press.

[10] Liu G, Nguyen-Xuan H and Nguyen-Thoi T (2010). A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: Properties, accuracy and convergence rates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(10): 1222-56.

[11] Lee C-K (2016). *Gradient smoothing in finite elasticity: near-incompressibility*. Cardiff University.

[12] Dai K and Liu G (2007). Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SFEM). *Journal of Sound and Vibration*, 301(3-5): 803-20.

[13] Nguyen-Xuan H and Nguyen-Thoi T (2009). A stabilized smoothed finite element method for free vibration analysis of Mindlin-Reissner plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25(8): 882-906.

[14] Bordas SP, Rabczuk T, Hung N-X, Nguyen VP, Natarajan S, Bog T et al. (2010). Strain smoothing in FEM and XFEM. *Computers & structures*, 88(23-24): 1419-43.

- [15] Dai K, Liu G and Nguyen T (2007). An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics. *Finite elements in analysis and design*, 43(11-12): 847-60.
- [16] MATLAB. 9.7.0.1190202 (R2019b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.; 2018.
- [17] Felippa CA (2004). *Introduction to finite element methods*. University of Colorado.
- [18] Hildebrand FB (2012). *Methods of applied mathematics*. New York: Dover Publications.
- [19] Liu G (2008). A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for Galerkin formulation of a wide class of computational methods. *International Journal of Computational Methods*, 5(02): 199-236.
- [20] Liu G-R (2009). *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. Taylor & Francis.
- [21] Timoshenko SP and Goodier JN (1970). *Theory of Elasticity* (3rd edition). New York: McGraw-Hill.