



การหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตรง ด้วยวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ

Determination for the Heat Transfer Rates through a Straight Rectangular Fin by the Numerical Method in 3 Dimensions

อุทัย ประสพชิงชนะ¹

Uthai Prasopchingchana¹

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอการหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตรงด้วยวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ โดยใช้วิธีสมดุลพลังงานเพื่อหาสมการผลต่างอันดับสอง แล้วหาผลเฉลยของสมการผลต่างอันดับสองด้วยวิธีทำซ้ำของ เกาส์-ไซเดล ซึ่งการคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีปได้รวมผลของการแผ่รังสีความร้อนระหว่างผิวของแผ่นครีปกับสภาวะแวดล้อมและการพาความร้อนที่ผิวของแผ่นครีปสู่อากาศ ใช้ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉพาะจุด โดยการคำนวณกระทำที่สภาวะคงตัวและอุณหภูมิที่ฐานครีปมีค่าคงที่ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ มีค่ามากกว่าที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ใน 1 มิติ เนื่องจากผลของการแผ่รังสีความร้อน

คำสำคัญ: ครีป สมการผลต่างอันดับสอง วิธีทำซ้ำของ เกาส์-ไซเดล การถ่ายเทความร้อน วิธีเชิงตัวเลข

Abstract

The objective of this article is to present the determination of the heat transfer rates through a straight rectangular fin by the numerical method in 3 dimensions. The energy balance method is employed to determine the finite difference equations. The solutions of the equations are determined by the Gauss-Seidel iteration. Thermal radiation between the fin surfaces and the surrounding is concerned in the calculation and the local convection heat transfer coefficients are used in the calculation. The calculation is calculated under the steady-state condition and the constant temperature at the base of the fin condition. The results obtained from the calculation by the numerical method in 3 dimensions gained the values above the results from the calculation by the analytical method in 1 dimension because of the effect from thermal radiation.

¹ อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา Tel. 08-2211-5188, E-mail: uthai@buu.ac.th

Keywords: Fin, Finite Difference Equation, Gauss-Seidel Iteration, Heat Transfer, Numerical Method

1. บทนำ

การเพิ่มอัตราการระบายความร้อนของอุปกรณ์ไฟฟ้าและเครื่องจักรกลสู่อากาศ เช่น หม้อแปลงไฟฟ้า มอเตอร์ไฟฟ้า เป็นต้น นิยมใช้วิธีเพิ่มพื้นที่ผิวให้สัมผัสกับอากาศให้มากขึ้นซึ่งพื้นที่ผิวที่เพิ่มขึ้นเรียกว่าครีบก การศึกษาการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีบนั้นมีผู้ที่ทำการศึกษาค้นคว้าทดลอง ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์และใช้วิธีเชิงตัวเลข

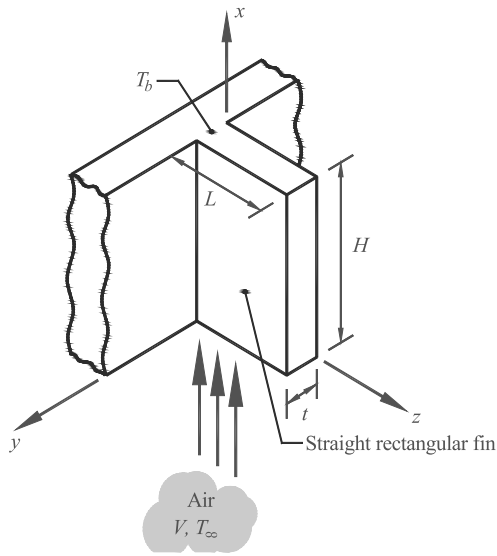
Malik และ Rafiq [1] ทำการศึกษาเปรียบเทียบการถ่ายเทความร้อนของแผ่นครีกระหว่าง 1 มิติกับ 2 มิติ โดยการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ซึ่งการถ่ายเทความร้อนจากผิวของแผ่นครีบลู่สิ่งแวดล้อมมีเฉพาะการพาความร้อนแบบธรรมชาติ Kziz และ Das [2] ได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับชุดแผ่นครีบด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ โดยมีการนำความร้อนในแผ่นครีบและการพาความร้อนที่ผิวครีบ ซึ่งการวิเคราะห์เป็นแบบ 2 มิติ Aziz และ Green [3] ทำการศึกษาถึงสมรรถนะและการออกแบบที่เหมาะสมของแผ่นครีบลูกเหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งเกิดการพาความร้อนและการแผ่รังสีความร้อนที่ผิวของแผ่นครีบ การศึกษาใช้วิธีเชิงตัวเลขแบบ 1 มิติ ซึ่งการนำความร้อนเกิดขึ้นเฉพาะในแนวความยาวของแผ่นครีบ โดยค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ผิวของครีบกคิดเป็นค่าเฉลี่ย Bouaziz [4] ทำการวิเคราะห์ให้เห็นถึงความแตกต่างของประสิทธิภาพของแผ่นครีบกที่คำนวณจากวิธีเชิงวิเคราะห์ใน 1 มิติกับการคำนวณจากวิธีเชิงตัวเลขใน 2 มิติ โดยที่ปลายแผ่นครีบกมีการพาความร้อน Dul'kin และ Garas'ko [5] ทำการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนใน 1 มิติ ในแผ่นครีบกตรงและทรงกระบอก โดยที่ปลายไม่มีการถ่ายเทความร้อน Sharqawy และ Zubair [6] ศึกษาและทำการวิเคราะห์หาจุดเหมาะสมของประสิทธิภาพของแผ่นครีบกตรง โดยการศึกษาได้พิจารณาถึงผลของความชื้นในอากาศที่มีผลต่อการพาความร้อน Sahin และ

คณะ [7] ศึกษาการถ่ายเทความร้อนและความดันลดของอากาศที่ไหลผ่านอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนใน 3 มิติ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ซึ่งการศึกษาได้พิจารณาถึงผลของมุมที่แผ่นครีบกกระทำกับทิศทางการไหลของอากาศ Didarul และคณะ [8] ทำการทดลองการถ่ายเทความร้อนและลักษณะการไหลของอากาศผ่านกลุ่มแผ่นครีบก Mueller และ Abu-Mulaweh [9] ใช้วิธีเชิงตัวเลขหาการกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นครีบกทรงกระบอกใน 1 มิติ โดยที่ผิวครีบกมีการพาความร้อนและการแผ่รังสีความร้อนและเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดลอง Kulkarni [10] ศึกษาด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาอัตราการถ่ายเทความร้อนจากตัวประมวลผลของคอมพิวเตอร์ผ่านชุดครีบก ซึ่งการศึกษาได้รวมถึงการแผ่รังสีของชุดครีบกใน 2 มิติ

จากรายละเอียดของงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น ยังไม่พบว่ามียานวิจัยที่ได้ศึกษาถึงการถ่ายเทความร้อนของแผ่นครีบลูกเหลี่ยมผืนผ้าตรงใน 3 มิติ ที่มีการพิจารณาถึงผลของการแผ่รังสีความร้อนและการคำนวณใช้สัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉพาะจุด สำหรับบทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเสนอแนวคิดในการหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีบลูกเหลี่ยมผืนผ้าตรงด้วยวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์ของการพาความร้อนเป็นแบบเฉพาะจุด (Local Convection Heat Transfer Coefficient) เพื่อหาอัตราการพาความร้อนที่ผิวของแผ่นครีบกและได้รวมผลของการแผ่รังสีความร้อนที่ผิวของแผ่นครีบกให้กับสิ่งแวดล้อมด้วย

2. การคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีบก

การคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีบลูกเหลี่ยมผืนผ้าตรงซึ่งมีอากาศไหลผ่านแผ่นครีบกในแนวตามความสูงของแผ่นครีบกดังแสดงในรูปที่ 1 ซึ่งครีบกมีความสูงเป็น H มีความหนาเป็น t และมีความยาวเป็น L สามารถทำได้ 2 วิธี คือ วิธีเชิงวิเคราะห์ใน 1 มิติ และวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ โดยมีสมมติฐานในการคำนวณดังนี้



รูปที่ 1 แผ่นครีปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตรงซึ่งมีอากาศไหลผ่านแผ่นครีปในแนวความสูง

1. สภาวะการถ่ายเทความร้อนอยู่ในสภาวะคงตัว (Steady-state Condition)
2. อุณหภูมิที่ฐานครีปมีค่าคงที่
3. อุณหภูมิของอากาศคงที่ และสมมุติให้อุณหภูมิของสภาวะแวดล้อมเท่ากับอุณหภูมิของอากาศ
4. ความเร็วของอากาศคงที่
5. คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ทำแผ่นครีปมีค่าคงที่

2.1 วิธีเชิงวิเคราะห์ใน 1 มิติ

การคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตรงโดยวิธีเชิงวิเคราะห์ใน 1 มิติ เป็นวิธีที่ใช้กันโดยทั่วไป โดยสมมุติให้เกิดการนำความร้อนจากบริเวณฐานครีปไปสู่บริเวณอื่นๆ ของแผ่นครีปตามแนวความยาวของแผ่นครีปในทิศทางเดียว สำหรับที่ผิวของแผ่นครีปเกิดการพาความร้อนซึ่งการคำนวณหาอัตราการพาความร้อนใช้ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเป็นแบบเฉลี่ยและไม่รวมการแผ่รังสีความร้อนที่ผิวของแผ่นครีป

อุณหภูมิของแผ่นครีปตามแนวความยาวของแผ่นครีปมีค่าเป็น [11]

$$T(z) = T_{\infty} + (T_b - T_{\infty}) \left[\frac{\cosh m(L-z) + (\bar{h} / mk) \sinh m(L-z)}{\cosh mL + (\bar{h} / mk) \sinh mL} \right]$$

$$m = \sqrt{\bar{h} P / k A_c} \quad (1)$$

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu} k_f}{H} \quad (2)$$

เมื่อ T_{∞} คืออุณหภูมิของอากาศ T_b คืออุณหภูมิที่ฐานของแผ่นครีป L คือความยาวของแผ่นครีป $\bar{h}$ คือค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉลี่ย k คือค่าสภาพนำความร้อนของแผ่นครีป P คือเส้นรอบรูปของหน้าตัดของแผ่นครีป A_c คือพื้นที่หน้าตัดของแผ่นครีป $\overline{Nu}$ คือเลขนัสเซิลด์ (Nusselt Number) เฉลี่ย k_f คือค่าสภาพนำความร้อนของอากาศ และ H คือความสูงของแผ่นครีป กรณีอากาศนิ่งเกิดการพาความร้อนแบบธรรมชาติที่ผิวของแผ่นครีป เลขนัสเซิลด์เฉลี่ยมีค่าเป็น [11]

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} \left(\frac{Gr}{4} \right)^{1/4} f(Pr) \quad (3)$$

$$Gr = \frac{g \beta (T_b - T_{\infty}) H^3}{\nu^2}$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

$$f(Pr) = \frac{0.75 Pr^{1/2}}{(0.609 + 1.221 Pr^{1/2} + 1.238 Pr)^{1/4}} \quad (4)$$

เมื่อ Gr คือเลขกราสโฮฟ (Grashof Number) Pr คือเลขพรันดท์เกิล (Prandtl Number) g คือค่าความเร่งโน้มถ่วงของโลก β คือค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัว (Volumetric Thermal Expansion Coefficient) ν คือค่าความหนืดกินเนมาติกส์ (Kinematics Viscosity) และ ρ คือความหนาแน่นของอากาศ

กรณีอากาศมีความเร็วเกิดการพาความร้อนแบบบังคับที่ผิวของแผ่นครีป เลขนัสเซิลด์เฉลี่ยมีค่าเป็น [11]

$$\overline{Nu} = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$Re = \frac{VH}{\nu} \quad (5)$$

เมื่อ Re คือเลขเรย์โนลด์ส (Reynolds Number) และ V คือค่าความเร็วของอากาศ

ค่าอัตราการถ่ายเทความร้อนของแผ่นครีบกำนวนจาก [11]

$$q_{f,1D} = M \frac{\sinh mL + (\bar{h} / mk) \cosh mL}{\cosh mL + (\bar{h} / mk) \sinh mL} \quad (6)$$

$$M = (T_b - T_\infty) \sqrt{h P k A_c}$$

2.2 วิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ

การคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีบลีเหลี่ยมผืนผ้าตรงโดยวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ ใช้วิธีสมดุลพลังงาน (Energy Balance Method) เพื่อหาสมการผลต่างอันตะ (Finite Difference Equations) แล้วหาผลเฉลยของสมการผลต่างอันตะด้วยวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel Iteration) โดยภายในเนื้อแผ่นครีบกเกิดการนำความร้อนจากฐานครีบลู่บริเวณอื่นๆ ที่ผิวด้านข้างของแผ่นครีบกเกิดการพาความร้อนจากผิวครีบลู่สู่อากาศ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ใช้คำนวณเป็นแบบเฉพาะจุด สำหรับบริเวณผิวด้านล่างและด้านบนของแผ่นครีบลีเหลี่ยมผืนผ้าให้ไม่เกิดการพาความร้อนเนื่องจากเป็นบริเวณชะงักการไหล (Stagnation Area) ซึ่งความเร็วของอากาศมีค่าเป็นศูนย์ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนบริเวณดังกล่าวมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับบริเวณอื่นๆ และพื้นที่บริเวณนี้มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับพื้นที่ผิวด้านข้างของแผ่นครีบลีเหลี่ยมผืนผ้า สำหรับการแผ่รังสีความร้อนจากผิวของแผ่นครีบลีเหลี่ยมผืนผ้าเกิดที่ผิวของแผ่นครีบลีเหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด หากกำหนดให้โหนด (Node) ในแนวแกน x มีค่าเป็น i จาก 1 ถึง im แนวแกน y มีค่าเป็น j จาก 1 ถึง jm และ แกน z มีค่าเป็น k จาก 1 ถึง km จะได้ว่า

อุณหภูมิที่จุดต่างๆ ของแผ่นครีบลีเหลี่ยมผืนผ้ามีค่าดังนี้

- ที่ $k=1$

$$T(i, j, k) = T_b \quad (7)$$

- ที่ $1 < k < km, j = 1, i = 1$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} + \frac{T_\infty}{RHY} \right] \quad (8)$$

$$+ \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \Bigg] \\ \Bigg/ \left[\frac{1}{RX} + \frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRX} + \frac{2}{RZ} \right]$$

$$RZ = \frac{dz}{k \left(\frac{dx}{2} \right) \left(\frac{dy}{2} \right)} \quad (9)$$

$$RX = \frac{dx}{k \left(\frac{dy}{2} \right) dz} \quad (10)$$

$$RY = \frac{dy}{k \left(\frac{dx}{2} \right) dz} \quad (11)$$

$$RHY = \frac{1}{h \left(\frac{dx}{2} \right) dz} \quad (12)$$

$$RHRX = \frac{1}{\varepsilon \sigma \left(\frac{dy}{2} \right) dz (T(i, j, k) + T_{sur}) (T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (13)$$

$$RHRX = \frac{1}{\varepsilon \sigma \left(\frac{dx}{2} \right) dz (T(i, j, k) + T_{sur}) (T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (14)$$

- ที่ $1 < k < km, j = 1, i = im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} + \frac{T_\infty}{RHY} \right] \\ + \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \Bigg] \\ \Bigg/ \left[\frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RX} + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRX} + \frac{2}{RZ} \right] \quad (15)$$

สมการของ $RX, RY, RZ, RHY, RHRX$ และ $RHRX$ เหมือนกับสมการ (9), (10), (11), (12), (13) และ (14) ตามลำดับ

- ที่ $1 < k < km, j = 1, 1 < i < im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} \right] \\ + \frac{T_\infty}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \Bigg] \\ \Bigg/ \left[\frac{2}{RX} + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRX} + \frac{2}{RZ} \right] \quad (16)$$

$$RY = \frac{dy}{kdx dz} \quad (17)$$

$$RZ = \frac{dz}{kdx \left(\frac{dy}{2} \right)} \quad (18)$$

$$RHY = \frac{1}{hdx dz} \quad (19)$$

$$RHRX = \frac{1}{\varepsilon \sigma k dx dz (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (20)$$

สมการของ RX เหมือนกับสมการ (9)

- ที่ $1 < k < km, j = jm, i = 1$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T_{\infty}}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRX} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{1}{RX} + \frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RY} + \frac{2}{RZ} \right] \right. \quad (21)$$

สมการของ RX, RY, RZ, RHY, RHRX และ RHRX เหมือนกับสมการ (9), (10), (11), (12), (13) และ (14) ตามลำดับ

- ที่ $1 < k < km, j = jm, i = im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T_{\infty}}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRX} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RX} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RY} + \frac{2}{RZ} \right] \right. \quad (22)$$

สมการของ RX, RY, RZ, RHY, RHRX และ RHRX เหมือนกับสมการ (9), (10), (11), (12), (13) และ (14) ตามลำดับ

- ที่ $1 < k < km, j = jm, 1 < i < im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T_{\infty}}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRX} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{2}{RX} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RY} + \frac{2}{RZ} \right] \right. \quad (23)$$

สมการของ RX, RY, RZ, RHY และ RHRX เหมือนกับสมการ (9), (17), (18), (19) และ (20) ตามลำดับ

- ที่ $1 < k < km, 1 < j < jm, i = 1$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{1}{RX} + \frac{1}{RHRX} + \frac{2}{RY} + \frac{2}{RZ} \right] \right. \quad (24)$$

$$RX = \frac{dx}{k dy dz} \quad (25)$$

$$RZ = \frac{dz}{k \left(\frac{dx}{2} \right) dy} \quad (26)$$

$$RHRX = \frac{1}{\varepsilon \sigma dy dz (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (27)$$

สมการของ RY เหมือนกับสมการ (10)

- ที่ $1 < k < km, 1 < j < jm, i = im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RX} + \frac{2}{RY} + \frac{2}{RZ} \right] \right. \quad (28)$$

สมการของ RX, RY, RZ และ RHRX เหมือนกับสมการ (25), (10), (26) และ (27) ตามลำดับ

- ที่ $1 < k < km, 1 < j < jm, 1 < i < im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T(i, j, k+1)}{RZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{2}{RX} + \frac{2}{RY} + \frac{2}{RZ} \right] \right. \quad (29)$$

$$RZ = \frac{dz}{k dx dy} \quad (30)$$

สมการของ RX และ RY เหมือนกับสมการ (25) และ (17) ตามลำดับ

- ที่ $k = km, j = 1, i = 1$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} + \frac{T_{\infty}}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T_{\infty}}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] / \left[\frac{1}{RX} + \frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \quad (31)$$

$$RX = \frac{dx}{k \left(\frac{dy}{2} \right) \left(\frac{dz}{2} \right)} \quad (32)$$

$$RY = \frac{dy}{k \left(\frac{dx}{2} \right) \left(\frac{dz}{2} \right)} \quad (33)$$

$$RHY = \frac{1}{h \left(\frac{dx}{2} \right) \left(\frac{dz}{2} \right)} \quad (34)$$

$$RHZ = \frac{1}{h \left(\frac{dx}{2} \right) \left(\frac{dy}{2} \right)} \quad (35)$$

$$RHRX = \frac{1}{\varepsilon \sigma \left(\frac{dy}{2} \right) \left(\frac{dz}{2} \right) (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (36)$$

$$RHRZ = \frac{1}{\varepsilon \sigma \left(\frac{dx}{2} \right) \left(\frac{dz}{2} \right) (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (37)$$

$$RHRZ = \frac{1}{\varepsilon \sigma \left(\frac{dx}{2} \right) \left(\frac{dy}{2} \right) (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (38)$$

สมการของ RZ เหมือนกับสมการ (11)

- ที่ $k = km, j = 1, 1 < i < im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} + \frac{T_{\infty}}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T_{\infty}}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] / \left[\frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RX} + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \quad (39)$$

สมการของ $RX, RY, RZ, RHY, RHZ, RHRX, RHRZ$ และ $RHRZ$ เหมือนกับสมการ (32), (33), (11), (34), (35), (36), (37) และ (38) ตามลำดับ

- ที่ $k = km, j = 1, 1 < i < im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} + \frac{T_{\infty}}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T_{\infty}}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] / \left[\frac{2}{RX} + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \quad (40)$$

$$RY = \frac{dy}{k dx \left(\frac{dz}{2} \right)} \quad (41)$$

$$RHY = \frac{1}{h dx \left(\frac{dz}{2} \right)} \quad (42)$$

$$RHZ = \frac{1}{h dx \left(\frac{dy}{2} \right)} \quad (43)$$

$$RHRZ = \frac{1}{\varepsilon \sigma dx \left(\frac{dz}{2} \right) (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (44)$$

$$RHRZ = \frac{1}{\varepsilon \sigma dx \left(\frac{dy}{2} \right) (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (45)$$

สมการของ RX และ RZ เหมือนกับสมการ (32) และ (18) ตามลำดับ

- ที่ $k = km, j = jm, i = 1$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T_{\infty}}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T_{\infty}}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] / \left[\frac{1}{RHRX} + \frac{1}{RX} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \quad (46)$$

สมการของ $RX, RY, RZ, RHY, RHZ, RHRX, RHRZ$ และ $RHRZ$ เหมือนกับสมการ (32), (33), (11), (34), (35), (36), (37) และ (38) ตามลำดับ

- ที่ $k = km, j = jm, 1 < j < im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T_\infty}{RHY} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T_\infty}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{2}{RX} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRZ} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \right] \quad (47)$$

สมการของ $RX, RY, RZ, RHY, RHZ, RHRX, RHRZ$ และ $RHRZ$ เหมือนกับสมการ (32), (33), (11), (34), (35), (36), (37) และ (38) ตามลำดับ

- ที่ $k = km, j = jm, 1 < i < im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T_\infty}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{1}{RX} + \frac{1}{RHRX} + \frac{2}{RY} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \right. \\ \left/ \left[\frac{2}{RX} + \frac{1}{RHY} + \frac{1}{RHRZ} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{RY} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \right] \quad (48)$$

สมการของ $RX, RY, RZ, RHY, RHZ, RHRZ$ และ $RHRZ$ เหมือนกับสมการ (32), (41), (18), (42), (43), (44) และ (45) ตามลำดับ

- ที่ $k = km, 1 < j < jm, i = im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T_{sur}}{RHRX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T_\infty}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right]$$

$$\left/ \left[\frac{1}{RX} + \frac{1}{RHRX} + \frac{2}{RY} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \right] \quad (49)$$

$$RX = \frac{dx}{kdy \left(\frac{dz}{2} \right)} \quad (50)$$

$$RHZ = \frac{1}{h \left(\frac{dx}{2} \right) dy} \quad (51)$$

$$RHRX = \frac{1}{\epsilon \alpha dy \left(\frac{dz}{2} \right) (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (52)$$

$$RHRZ = \frac{1}{\epsilon \sigma \left(\frac{dx}{2} \right) dy (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (53)$$

สมการของ RY และ RZ เหมือนกับสมการ (33) และ (26) ตามลำดับ

- ที่ $k = km, 1 < j < jm, i = im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T_\infty}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{2}{RX} + \frac{2}{RY} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \right] \quad (54)$$

สมการของ $RX, RY, RZ, RHZ, RHRX$ และ $RHRZ$ เหมือนกับสมการ (50), (33), (26), (51), (52) และ (53) ตามลำดับ

- ที่ $k = km, 1 < j < jm, i = im$

$$T(i, j, k) = \left[\frac{T(i+1, j, k)}{RX} + \frac{T(i-1, j, k)}{RX} + \frac{T(i, j+1, k)}{RY} \right. \\ \left. + \frac{T(i, j-1, k)}{RY} + \frac{T_\infty}{RHZ} + \frac{T_{sur}}{RHRZ} + \frac{T(i, j, k-1)}{RZ} \right] \\ \left/ \left[\frac{2}{RX} + \frac{2}{RY} + \frac{1}{RHZ} + \frac{1}{RHRZ} + \frac{1}{RZ} \right] \right] \quad (55)$$

$$RHZ = \frac{1}{h dx dy} \quad (56)$$

$$RHRZ = \frac{1}{\varepsilon \sigma dy (T(i, j, k) + T_{sur})(T^2(i, j, k) + T_{sur}^2)} \quad (57)$$

สมการของ RX , RY , และ R เหมือนกับสมการ (50), (33) และ (3) ตามลำดับ

เมื่อ T_{sur} คืออุณหภูมิสิ่งแวดล้อม h คือค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉพาะจุด ε คือค่าสภาพเปล่งรังสีความร้อน (Emissivity) ที่ผิวของแผ่นครีป และ σ คือค่าคงที่ของสเตฟาน-โบลท์ซมานน์ (Stefan-Boltzmann Constant)

ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉพาะจุดเป็น

$$h = \frac{Nu_x k_f}{x} \quad (58)$$

กรณีอากาศนิ่งไม่มีความเร็วเกิดการพาความร้อนแบบธรรมชาติที่ผิวของแผ่นครีป เลขนัสเซลต์คือ [11]

$$Nu_x = \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} f(Pr) \quad (59)$$

$$Gr_x = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) x^3}{\nu^2}$$

เมื่อสมการของ $f(Pr)$ เหมือนกับสมการ (4) และ T_s คืออุณหภูมิที่ผิวของแผ่นครีป

กรณีอากาศมีความเร็วเกิดการพาความร้อนแบบบังคับที่ผิวของแผ่นครีป เลขนัสเซลต์คือ [11]

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (60)$$

$$Re_x = \frac{Vx}{\nu}$$

อัตราการถ่ายเทความร้อนจากฐานของแผ่นครีปสู่บริเวณอื่นๆ ด้วยการนำความร้อนและการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาและการแผ่รังสีความร้อนบริเวณขอบของฐานครีปมีค่าดังนี้

$$q_b = q_{b,1} + q_{b,2} + q_{b,3} + q_{b,4} + q_{b,5} \quad (61)$$

$$q_{b,1} = \sum_{j=1}^{jm} \sum_{i=1}^{im} k dA_c \frac{(T(i, j, 1) - T(i, j, 2))}{dz}$$

$$q_{b,2} = \sum_{i=1}^{im} dA_s [h(T(i, 1, 1) - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T(i, 1, 1)^4 - T_{sur}^4)]$$

$$q_{b,3} = \sum_{i=1}^{im} dA_s [h(T(i, jm, 1) - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T(i, jm, 1)^4 - T_{sur}^4)]$$

$$q_{b,4} = \sum_{j=1}^{jm} \varepsilon \sigma dA_s (T(1, j, 1)^4 - T_{sur}^4)$$

$$q_{b,5} = \sum_{j=1}^{jm} \varepsilon \sigma dA_s (T(im, j, 1)^4 - T_{sur}^4)$$

อัตราการถ่ายเทความร้อนจากผิวครีปสู่อากาศและสิ่งแวดล้อมด้วยการพาและการแผ่รังสีความร้อนมีค่าดังนี้

$$q_s = q_{s,1} + q_{s,2} + q_{s,3} + q_{s,4} + q_{s,5} \quad (62)$$

$$q_{s,1} = \sum_{k=1}^{km} \sum_{i=1}^{im} dA_s [h(T(i, 1, k) - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T(i, 1, k)^4 - T_{sur}^4)]$$

$$q_{s,2} = \sum_{k=1}^{km} \sum_{i=1}^{im} dA_s [h(T(i, jm, k) - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T(i, jm, k)^4 - T_{sur}^4)]$$

$$q_{s,3} = \sum_{j=1}^{jm} \sum_{i=1}^{im} dA_s [h(T(i, j, km) - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T(i, j, km)^4 - T_{sur}^4)]$$

$$q_{s,4} = \sum_{k=1}^{km} \sum_{j=1}^{jm} \varepsilon \sigma dA_s (T(1, j, k)^4 - T_{sur}^4)$$

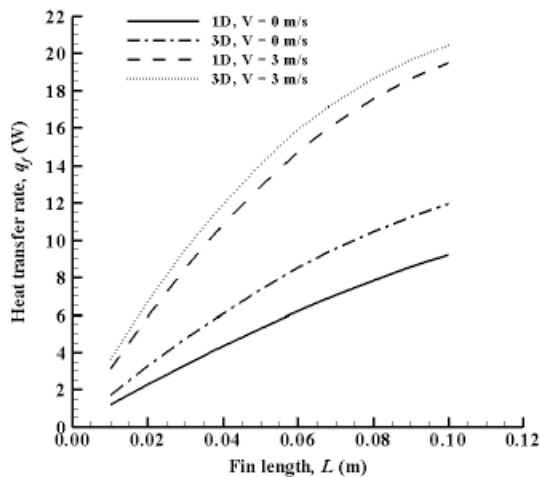
$$q_{s,5} = \sum_{k=1}^{km} \sum_{j=1}^{jm} \varepsilon \sigma dA_s (T(im, j, k)^4 - T_{sur}^4)$$

ค่าอัตราการถ่ายเทความร้อนของแผ่นครีปมีค่าเป็น

$$q_{f,3D} = q_b = q_s \quad (63)$$

3. ผลลัพธ์จากการคำนวณ

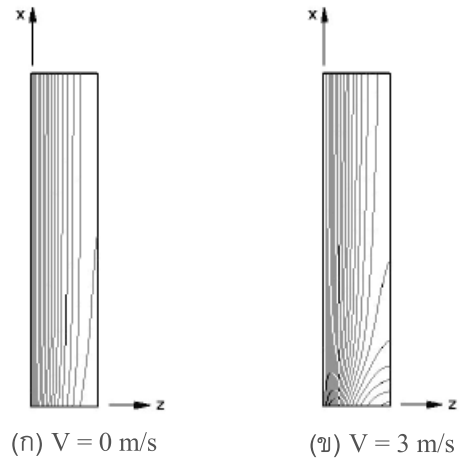
การคำนวณกระทำกับแผ่นครีปของหม้อแปลงไฟฟ้า โดยไม่คิดผลของรังสีความร้อนจากแสงแดดที่กระทำกับแผ่นครีปและการคำนวณกระทำที่สภาวะคงตัว โดยแผ่นครีปมีขนาดสูง $H = 0.500$ m หนา $t = 0.002$ m ทำจากเหล็กกล้าผสมคาร์บอนมีค่าสภาพนำความร้อน [11] เป็น $k = 60.5$ W/m·K และมีค่าสภาพเปล่งรังสี



รูปที่ 2 อัตราการถ่ายเทความร้อนความร้อนของแผ่นครีป

ความร้อน [11] เป็น $\varepsilon = 0.22$ อุณหภูมิที่ฐานครีปเป็น $T_b = 60^\circ\text{C}$ อุณหภูมิของอากาศเป็น $T_\infty = 30^\circ\text{C}$ และอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมสมมุติให้เท่ากับอุณหภูมิของอากาศ $T_{sur} = 30^\circ\text{C}$ โดยที่คุณสมบัติต่างๆ ของอากาศที่ใช้ในการคำนวณที่ความดันบรรยากาศซึ่งเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิหาได้จาก NIST (National Institute of Standards and Technology) Standard Reference Database 23, Version 7.0

รูปที่ 2 แสดงอัตราการถ่ายเทความร้อนของแผ่นครีปที่ความยาวของแผ่นครีปต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ที่อากาศนิ่ง (1D, $V = 0$ m/s) กับแบบ 3 มิติ ด้วยวิธีเชิงตัวเลขที่อากาศนิ่ง (3D, $V = 0$ m/s) และแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ที่ความเร็วอากาศเป็น 3 m/s (1D, $V = 3$ m/s) กับแบบ 3 มิติ ด้วยวิธีเชิงตัวเลขที่ความเร็วอากาศเป็น 3 m/s (3D, $V = 3$ m/s) พบว่าการคำนวณแบบ 3 มิติ ด้วยวิธีเชิงตัวเลขมีค่าอัตราการถ่ายเทความร้อนของแผ่นครีปมากกว่าการคำนวณแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์เนื่องจากการคำนวณแบบ 3 มิติ ด้วยวิธีเชิงตัวเลขได้รวมผลของการแผ่รังสีความร้อนจากผิวของแผ่นครีปสู่สิ่งแวดล้อมซึ่งการคำนวณแบบ 1 มิติ ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ไม่ได้คิดในส่วนนี้



รูปที่ 3 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของแผ่นครีป โดยคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ

รูปที่ 3 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวของแผ่นครีป โดยคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ สำหรับรูป (ก) เป็นสภาวะที่อากาศนิ่ง ($V = 0$ m/s) ซึ่งการกระจายตัวของอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเฉพาะในแนวแกน z ตลอดทั้งผิวของแผ่นครีป ขณะที่รูป (ข) เป็นสภาวะที่อากาศมีความเร็วเป็น 3 m/s ซึ่งการกระจายตัวของอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเฉพาะในแนวแกน z เฉพาะบริเวณใกล้ฐานครีป ส่วนบริเวณไกลปลายแผ่นครีปการกระจายตัวของอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงทั้งในแนวแกน x และ z ทั้งนี้เนื่องมาจากความแตกต่างของค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉพาะจุดที่มีค่าแตกต่างกันในแต่ละบริเวณ

4. สรุป

การคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตรงสามารถทำได้ 2 วิธี คือ วิธีเชิงวิเคราะห์ใน 1 มิติ และวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติ โดยวิธีเชิงวิเคราะห์ใน 1 มิติใช้ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนแบบเฉลี่ยและไม่คิดผลของการแผ่รังสีความร้อน ขณะที่วิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติใช้ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉพาะจุดและรวมผลของการแผ่รังสีความร้อนไว้ใน การคำนวณด้วย โดยการคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นครีปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตรงใน 3 มิติ ใช้

วิธีสมมูลพลังงานเพื่อหาสมการผลต่างอันดับแล้วหาผลเฉลยของสมการผลต่างอันดับด้วยวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล ซึ่งการคำนวณกระทำที่สภาวะการถ่ายเทความร้อนอยู่ในสภาวะคงตัว อุณหภูมิของอากาศคงที่และอุณหภูมิที่ฐานครีบกongที่ ผลลัพธ์ที่ได้นั้นค่าอัตราการถ่ายเทความร้อนที่คำนวณได้ด้วยวิธีเชิงตัวเลขใน 3 มิติมีค่ามากกว่าการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ใน 1 มิติ เนื่องจากรวมผลของการแผ่รังสีความร้อนจากผิวของแผ่นครีบลู่สิ่งแวดล้อม

เอกสารอ้างอิง

- [1] M. Y. Malik and A. Rafiq, "Two-dimensional fin with convective base condition," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 11, pp. 147-154, 2010.
- [2] B. Kundu and P. K. Das, "Performance and optimum design analysis of convective fin arrays attached to flat and curved primary surfaces," *International Journal of Refrigeration*, vol. 32, pp. 430-443, 2009.
- [3] A. Aziz and A. B. Beers-Green, "Performance and optimum design of convective-radiative rectangular fin with convective base heating, wall conduction resistance and contact resistance between the wall and the fin base," *Energy Conversion and Management*, vol. 50, pp. 2622-2631, 2009.
- [4] N. Bouaziz, "Fin efficiency in 2D with convection at the tip and dissymmetry of exchange," *Energy Conversion and Management*, vol. 50, pp. 1618-1624, 2009.
- [5] I. N. Dul'kin and G. I. Garas'ko, "Analysis of the 1-D heat conduction problem for a single fin with temperature dependent heat transfer coefficient: Part I – Extended inverse and direct solutions," *International Heat and Mass Transfer*, vol. 51, pp. 3309-3324, 2008.
- [6] M. H. Sharqawy and S. M. Zubair, "Efficiency and optimization of straight fins with combined heat and mass transfer – An analytical solution," *Applied Thermal Engineering*, vol. 28, pp. 2279-2288, 2008.
- [7] H. M. Sahin, A. R. Dal, and E. Baysal, "3 – D Numerical study on the correlation between variable inclined fin angles and thermal behavior in plate fin-tube heat exchanger," *Applied Thermal Engineering*, vol. 27, pp. 1806-1816, 2007.
- [8] I. M. Didarul, O. Kenyu, Y. Minoru, and S. Izuru, "Study on heat transfer and fluid flow characteristics with short rectangular plate fin of different pattern," *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 31, pp. 367-379, 2007.
- [9] D. W. Mueller Jr. and H. I. Abu-Mulaweh, "Prediction of the temperature in a fin cooled by natural convection and radiation," *Applied Thermal Engineering*, vol. 26, pp. 1662-1668, 2006.
- [10] D. P. Kulkarni and D. K. Das, "Analytical and numerical studies on microscale heat sinks for electronic applications," *Applied Thermal Engineering*, vol. 25, pp. 2432-2449, 2005.
- [11] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, and A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6 ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 2007.