อิโต้สโตแคสติกอินทิกรัลและการประยุกต์
Itô Stochastic Integral and Their Application

อาทิตย์ อินทรสิทธิ์[1]
Arthit Intarasit[1]

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอความรู้เบื้องต้นของกระบวนการสโตแคสติกและบทนิยามของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ พร้อมด้วยสมบัติที่สำคัญ เพื่ออภิปรายถึงการนิยามอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัลที่ซับซ้อนได้ทบทวนรีมันน์อินทิกรัลและรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล ในบทการประยุกต์ทางการเงินได้อภิปรายถึงสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้และได้นำเสนอตัวแบบการเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเรขาคณิตซึ่งเป็นตัวแบบที่นิยมใช้อธิบายพฤติกรรมของราคาหุ้นในตลาดหลักทรัพย์

คำสำคัญ: การเคลื่อนที่แบบบราวน์ อิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล รีมันน์อินทิกรัล รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้

Abstract

This article introduces basic concepts of stochastic process and a definition of Brownian motion with its important properties. Definition of complicated Itô Stochastic Integral is discussed. Riemann integral and Riemann-Stieljes integral are reviewed. Regarding financial application, Itô stochastic differential equation is described and Geometric Brownian motions which are popularly used to describe behaviors of stock price in stock exchange market.

Keywords: Brownian Motion, Itô Stochastic Integral, Riemann Integral, Riemann-Stieljes Integral, Itô Stochastic Differential Equation

1. บทนำ

ปัจจุบันได้มีการศึกษาวิจัยและพัฒนาองค์ความรู้พื้นฐานสาขาวิศวกรรมการเงินหรือคณิตศาสตร์ประยุกต์ทางการเงินอย่างแพร่หลายและต่อเนื่องนับตั้งแต่ศาสตราจารย์ แบล๊ค โชล และเมอร์ตัน ได้รับรางวัลโนเบลสาขาเศรษฐศาสตร์ในปี ค.ศ. 1995 จากงานวิจัยในการสร้างสูตรการตั้งราคายูโรเปียนออปชัน [1], [2] งานวิจัยทางคณิตศาสตร์การเงินที่สำคัญอย่างยิ่งงานหนึ่งในช่วงแรก ๆ คือการนิยามอินทิกรัลของฟังก์ชันใด ๆ เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่แบบบราวน์ ในบทความนี้จะได้อภิปรายถึงความพยายามของนักคณิตศาสตร์ในการนิยามอินทิกรัลดังกล่าว ก่อนอื่นจะขอกล่าวถึงกระบวนสโตแคสติกที่มีบทบาทอย่างมากในทางคณิตศาสตร์การเงินและวิศวกรรมศาสตร์ กระบวนสโตแคสติกดังกล่าวคือการเคลื่อนที่แบบบราวน์และจะได้ทบทวนบทนิยามของรีมันน์อินทิกรัลพร้อมด้วยรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล ต่อจากนั้นจะได้อภิปรายถึงอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล และบทแทรกอิโต้

[1] ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี โทรศัพท์ 07-331-2179, E-mail: iarthit@bunga.pn.psu.ac.th

รับเมื่อ 23 พฤษภาคม 2554 ตอบรับเมื่อ 23 สิงหาคม 2554

พร้อมการประยุกต์ในทางการเงิน อันจะเป็นความรู้พื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์การเงินสำหรับผู้สนใจต่อไปนี้

2. กระบวนการสโตแคสติกและการเคลื่อนที่แบบบราวน์

ให้ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็นกระบวนการสโตแคสติก X คือหมู่ของตัวแปรสุ่ม

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega)$$

ที่นิยามบนปริภูมิความน่าจะเป็นข้างต้น ถ้า $T = [a,b], [a,b)$ หรือ $[a,\infty)$ สำหรับ $a < b$ เรียก X ว่ากระบวนการสโตแคสติกที่มีเวลาต่อเนื่อง ถ้า T เป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์นับได้ เรียก X ว่ากระบวนการสโตแคสติกที่มีเวลาดิสครีต (Discrete Times) ดัชนี t ของกระบวนการสโตแคสติก X นี้ คือ เวลา

กล่าวได้ว่า กระบวนการสโตแคสติก X คือฟังก์ชันสองตัวแปร เมื่อตรึงค่าเวลาขณะหนึ่ง $t \in T$ จะได้ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) $X_t = X_t(\omega) = X_t(\cdot)$ สำหรับ $\omega \in \Omega$ แต่เมื่อตรึงค่าผลลัพธ์อย่างสุ่ม (Random Outcome) $\omega \in \Omega$ จะได้ฟังก์ชันของเวลา $X_t = X_t(\omega)$ สำหรับ $t \in T$ เรียกฟังก์ชันนี้ว่าแนววิถีหรือวิถีตัวอย่าง (Realization, Trajectory or Sample Path) ของกระบวนการสโตแคสติก X

กระบวนการสโตแคสติก X มีส่วนเพิ่มนิ่ง (Stationary Increments) ถ้า

$$X_t - X_s \overset{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$$

สำหรับทุก $t, s \in T$ และ h เมื่อ $t+h, s+h \in T$ สัญกรณ์ $\overset{d}{=}$ หมายถึง การมีสมบัติความมีเอกลักษณ์ของการแจกแจง

การที่กระบวนการสโตแคสติก X มีส่วนเพิ่มนิ่ง หมายถึง การแจกแจกของส่วนเพิ่ม $X_{t+h} - X_{s+h}$ ไม่ขึ้นกับเวลา s หรือ t แต่ขึ้นกับช่วงเวลา h หรืออาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของส่วนเพิ่มไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

กระบวนการสโตแคสติก X มีส่วนเพิ่มอิสระ (Independent Increments) ถ้าทุกๆ การเลือกค่า $t_i \in T$ เมื่อ $t_1 < \ldots < t_n$ และ $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนนับ

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ นั่นคือ

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_2} - X_{t_1} \cap X_{t_3} - X_{t_2} \cap \ldots \cap X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_2} - X_{t_1}) \cdot \mathbb{P}(X_{t_3} - X_{t_2}) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad \mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\end{aligned}$$

กระบวนการสโตแคสติก $(B_t)_{t \geq 0}$ เรียกว่า *การเคลื่อนที่แบบบราวน์ (มาตรฐาน)* ((Standard) Brownian Motion) หรือ*กระบวนการวีเนอร์* (Wiener Process) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

i) เริ่มต้นที่ศูนย์ กล่าวคือ $B_0(\cdot) = 0$ เกือบทุกแห่ง (Almost Everywhere) นั้นคือ

$$B_0(\omega_1) = 0 = B_0(\omega_2)$$

เกือบทุกแห่งสำหรับ $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

ii) กระบวนการ $B_t(\cdot)$ มีส่วนเพิ่มนิ่งและอิสระ

iii) สำหรับทุก $t > 0$, $B_t(\cdot)$ มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากับ 1 และ 0 ตามลำดับ (เขียนแทนด้วยสัญกรณ์ $N(0,t)$)

iv) เมื่อตรึงค่า $\omega \in \Omega$ ค่าหนึ่ง วิถีตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ต่อเนื่องไม่มีการกระโดด

มีข้อน่าสังเกตว่าในบางครั้งจะใช้สัญกรณ์ $B_t(\cdot)$ แทน B_t เพื่อเน้นว่าเป็นตัวแปรสุ่ม กล่าวคือ สำหรับค่า $t > 0$ ค่าหนึ่ง $B_t(\cdot): \Omega \to \mathfrak{R}$ เมื่อ $\mathfrak{R}$ คือเซตของจำนวนจริง

ในกรณีทั่วไปสามารถพิสูจน์ได้ว่า สำหรับ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} := \mathbb{N}^+$ เซตของจำนวนเต็มบวก (Øksendal [3])

$$EB_t^{2k} = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} t^k \qquad (2.1)$$

เมื่อ EX_t คือฟังก์ชันค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X_t พร้อมด้วยฟังก์ชันความหนาแน่น f_X ซึ่งนิยามโดย $EX_t = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$

เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบบราวน์ B_t มีส่วนเพิ่มนิ่ง จึงได้

$$B_t - B_s \overset{d}{=} B_{t-s} - B_0 \overset{d}{=} B_{t-s} \tag{2.2}$$

นั่นคือ สำหรับ $s < t$ ส่วนเพิ่ม $B_t - B_s$ และ B_{t-s} มีการแจกแจง $N(0, t-s)$ เช่นเดียวกัน

มีข้อน่าสังเกตว่า ในกรณีทั่วไปเอกลักษณ์การแจกแจงในสมการ (2.2) ไม่เป็นจริงสำหรับทุกวิถีตัวอย่าง นั่นคือ สำหรับบางค่า $\omega \in \Omega$ แล้ว

$$B_t(\omega) - B_s(\omega) \neq B_{t-s}(\omega)$$

วิถีตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบบราวน์มีสมบัติที่สำคัญอีกสองประการ ประการแรกวิถีตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ไม่มีจุดใดเลยที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ทั้งนี้เพราะว่าลิมิตของ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \operatorname{var}\left(\frac{B_{t_0+\Delta t}(\cdot) - B_{t_0}(\cdot)}{\Delta t}\right)$$

ไม่มีอยู่จริง เมื่อ $\operatorname{var}(X_t)$ คือฟังก์ชันความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม ซึ่งนิยามดังนี้

$$\operatorname{var}(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{X_t})^2 f_X(x)dx$$

เมื่อ $\mu_{X_t} = EX_t$

สมบัติประการที่สอง คือวิถีตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบบราวน์มีการแปรผันอย่างไม่มีขอบเขต (Unbounded Variation) บนช่วงจำกัดใดๆ กล่าวคือ

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)| = \infty$$

เมื่อพิจารณาซูพรีมัมข้างต้นนี้บนทุกการแบ่งกั้น (Partition) $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ บนช่วง $[0,T]$ ที่จะเป็นไปได้

ด้วยสมบัติทั้งสองประการนี้จึงไม่สามารถนิยามอินทิกรัลของฟังก์ชันใดๆ เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่แบบบราวน์โดยใช้วิธีอินทิกรัลแบบดั้งเดิม (รีมันน์อินทิกรัลหรือรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล) ได้ ดังจะได้อภิปรายในหัวข้อถัดไป

3. รีมันน์อินทิกรัล

รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัลและอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัลมีแนวคิดมาจากการศึกษารีมันน์อินทิกรัล ในหัวข้อนี้จึงได้ทบทวนแนวคิดเบื้องต้นเรื่องรีมันน์อินทิกรัล

พิจารณาฟังก์ชันค่าจริง f ที่นิยามบนช่วงปิด [0,1] เราสามารถพิจารณาฟังก์ชันค่าจริง f ที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ ได้ในทำนองเดียวกัน

พิจารณาการแบ่งกั้นบนช่วงปิด [0,1] ดังนี้

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$$

เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และนิยาม

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1},\ i = 1, \ldots, n$$

ให้การแบ่งกั้นระหว่างกลาง (Intermediate Partition) σ_n บนการแบ่งกั้น τ_n คือ ค่าใดๆ y_i ซึ่ง $t_{i-1} \le y_i \le t_i$ สำหรับ $i = 1, \ldots, n$

ผลบวกรีมันน์ (Riemann Sum) สำหรับผลแบ่งกั้น τ_n และการแบ่งกั้นระหว่างกลาง σ_n นิยามดังนี้

$$\begin{aligned} S_n = S_n(\tau_n, \sigma_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

กล่าวได้ว่า ผลบวกรีมันน์เป็นค่าเฉลี่ยน้ำหนักของค่า $f(y_i)$ ที่สอดคล้องกับความยาว Δ_i ในแต่ละช่วงเวลา $[t_{i-1}, t_i]$

ให้ mesh ของการแบ่งกั้น τ_n ลู่เข้าสู่ศูนย์ นั่นคือ

$$\operatorname{mesh}(\tau_n) = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta_i = \max_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$$

สังเกตว่า $t_i = t_i^{(n)}$ ขึ้นกับค่าของ n

ถ้าลิมิต $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta_i$

มีอยู่จริงเมื่อ $\mathrm{mesh}(\tau_n) \to 0$ และ S ไม่ขึ้นกับการแบ่งกั้นใดๆ τ_n และการแบ่งกั้นระหว่างกลาง σ_n แล้วเรียก S ว่า*รีมันน์อินทิกรัล* (Riemann Integral) ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[0,1]$ และเขียนแทนด้วย

$$S = \int_0^1 f(t)dt$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่เรียบ (Smooth) เพียงพอ กล่าวคือ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ทุกจุดบนช่วงปิด $[0,1]$ และอนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,1]$

4. รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล

ในหัวข้อนี้จะได้ให้นิยามที่เที่ยงตรงของรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล ในทำนองเดียวกันกับรีมันน์อินทิกรัล พิจารณาการแบ่งกั้นบนช่วงปิด $[0,1]$ ดังนี้

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$$

เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และนิยามการแบ่งกั้นระหว่างกลาง σ_n บนการแบ่งกั้น τ_n คือ

$$\sigma_n : t_{i-1} \le y_i \le t_i \text{ สำหรับ } i = 1,\ldots,n$$

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วงปิด $[0,1]$ และนิยาม

$$\Delta_i g = g(t_i) - g(t_{i-1}),\ i = 1,\ldots,n$$

ผลบวกรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล (Riemann-Stieltjes Sum) สำหรับผลแบ่งกั้น τ_n และการแบ่งกั้นระหว่างกลาง σ_n นิยามดังนี้

$$S_n = S_n(\tau_n,\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta_i g = \sum_{i\ 1}^{n} f(y_i)\left[g(t_i) - g(t_{i-1})\right]$$

นั่นคือ ผลบวกรีมันน์เป็นค่าเฉลี่ยน้ำหนักของค่า $f(y_i)$ ที่สอดคล้องกับส่วนเพิ่ม $\Delta_i g$ ของฟังก์ชัน g ในแต่ละช่วงเวลา $[t_{i-1}, t_i]$

ถ้าลิมิต

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta_i g$$

มีอยู่จริง เมื่อ $\mathrm{mesh}(\tau_n) \to 0$ และ S ไม่ขึ้นกับการแบ่งกั้นใดๆ τ_n และการแบ่งกั้นระหว่างกลาง σ_n แล้วเรียก S ว่า*รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล* (Riemann-Stieltjes Integral) ของฟังก์ชัน f เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน g บนช่วงปิด $[0,1]$ และเขียนแทนด้วย

$$S = \int_0^1 f(t)dg(t) \tag{4.1}$$

ต่อไปนี้เป็นเงื่อนไขอย่างเข้มที่ทำให้รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัลมีอยู่จริง

i) ถ้าฟังก์ชัน f และ g ไม่มีภาวะไม่ต่อเนื่องที่จุดเดียวกัน $t \in [0,1]$

ii) สมมุติฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและสมมุติฟังก์ชัน g มีการแปรผันแบบมีขอบเขต กล่าวคือ

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} | g(t_i) - g(t_{i-1}) | < \infty$$

เมื่อพิจารณาซูพรีมัมข้างต้นนี้บนทุกผลแบ่งกั้น τ บนช่วงปิด $[0,1]$

ถ้าเงื่อนไข i) และ ii) เป็นจริงแล้วรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล (4.1) มีอยู่จริง

อย่างไรก็ตามเราทราบแล้วว่าวิถีตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบบราวน์มีการแปรผันอย่างไม่มีขอบเขต ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัลเพื่อนิยามอินทิกรัล $\int_0^1 f(t)dB_t(\omega)$ ได้ ทั้งนี้เพราะเงื่อนไข ii) ไม่เป็นจริง

อย่างไรก็ตามการแปรผันอย่างมีขอบเขตของฟังก์ชัน g ไม่เป็นเงื่อนไขจำเป็นที่จะทำให้รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล (4.1) มีอยู่จริง

ก่อนที่จะให้กล่าวถึงเงื่อนไขอย่างอ่อนที่ทำให้รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัลมีอยู่จริงจะขอกล่าวถึงบทนิยามของฟังก์ชันที่มีการแปรผัน p แบบมีขอบเขต

ฟังก์ชันค่าจริง h บนช่วงปิด $[0,1]$ เป็นฟังก์ชันที่มีการแปรผัน p แบบมีขอบเขต (Bounded p-variation สำหรับค่า $p > 0$ บางค่าถ้า

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} | h(t_i) - h(t_{i-1}) |^p < \infty$$

เมื่อพิจารณาซูพรีมัมข้างต้นนี้บนทุกผลแบ่งกั้น τ บนช่วงปิด $[0,1]$

เงื่อนไขอย่างอ่อนที่ทำให้รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัลมีอยู่จริงมีดังต่อไปนี้

i') ถ้าฟังก์ชัน f และ g ไม่มีภาวะไม่ต่อเนื่องที่จุดเดียวกัน $t \in [0,1]$

ii') ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีการแปรผัน p แบบมีขอบเขตและ g เป็นฟังก์ชันที่มีการแปรผัน q แบบมีขอบเขตสำหรับ $p > 0$ และ $q > 0$ บางจำนวนที่ทำให้ $p^{-1} + q^{-1} > 1$

ถ้าเงื่อนไข i') และ ii') เป็นจริงแล้วรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล (4.1) มีอยู่จริง

การเคลื่อนที่แบบบราวน์ $(B_t)_{t\geq 0}$ มีการแปรผัน p แบบมีขอบเขตบนช่วงจำกัดใด ๆ ช่วงหนึ่งสำหรับค่า $p > 2$ และเป็นการแปรผัน p แบบไม่มีขอบเขตสำหรับค่า $p \leq 2$ [4] ดังนั้นสำหรับฟังก์ชันเชิงกำหนด f(t) บนช่วงปิด $[0,1]$ หรือวิถีตัวอย่างของกระบวนการสโตแคสติก $f(t,\omega)$ เมื่อ $\omega \in \Omega$ สามารถนิยามอินทิกรัลของฟังก์ชัน f เมื่อเทียบกับวิถีตัวอย่างหนึ่งของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ $B_t(\omega)$ โดยใช้รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล (Riemann-Stieltjes Integral) ได้ นั้นคือ

$$\int_0^1 f(t) dB_t(\omega) \tag{4.2}$$

มีอยู่จริง เมื่อให้ฟังก์ชัน f มีการแปรผัน q แบบมีขอบเขตสำหรับค่า $q < 2$

ในกรณี $q = 1$ ฟังก์ชัน f มีการแปรผันแบบมีขอบเขต ดังนั้นจึงสามารถนิยามรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล (4.1) ได้เช่นกัน ดังนี้จึงกล่าวได้ว่าในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันเชิงกำหนดหรือเป็นวิถีตัวอย่างหนึ่งของกระบวนการสโตแคสติก ถ้า f หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์มีขอบเขตบนช่วงปิด $[0,1]$ แล้ว รีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล (4.2) มีอยู่จริงสำหรับทุกวิถีตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ $B_t(w)$ ด้วยเหตุนี้เราจึงสามารถนิยามรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัลต่อไปนี้ได้

$$\int_0^1 e^t dB_t(\omega) , \int_0^1 \sin(t) dB_t(\omega) , \int_0^1 t^p dB_t(\omega)$$

เมื่อ $p \geq 0$

กล่าวคือเราสามารถนิยาม $\int_0^1 f(t) dB_t(\omega)$ สำหรับปริพัทธ์ใด ๆ f เป็นรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัลเมื่อเทียบกับวิถีตัวอย่างหนึ่งของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ แต่ไม่เป็นจริงสำหรับในกรณีของอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัลที่มีรูปแบบดังนี้

$$I(B)(\omega) = \int_0^1 B_t(\omega) dB_t(\omega)$$

เงื่อนไขที่เพียงพอที่ทำให้ $I(B)$ มีอยู่จริงคือ $2p^{-1} > 1$ แต่เพราะว่าการเคลื่อนที่แบบบราวน์มีการแปรผัน p แบบมีขอบเขตเมื่อ $p > 2$ และมีการแปรผัน p แบบไม่มีขอบเขตเมื่อ $p \leq 2$ ตามที่ทราบแล้ว ดังนั้นเงื่อนไขที่เพียงพอ $2p^{-1} > 1$ สำหรับการมีจริงของ $I(B)$ ไม่เป็นจริง

5. อิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล

ให้ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น กระบวนการสโตแคสติกที่จะศึกษาต่อไปนี้เป็นกระบวนการสโตแคสติกที่นิยามบนปริภูมิความน่าจะเป็นนี้

ในหัวข้อนี้จะได้ศึกษาการนิยามอินทิกรัลของการเคลื่อนที่แบบบราวน์เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่แบบบราวน์ด้วยเช่นกัน เรียกว่า *อิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล* (Itô Stochastic Integral) เขียนได้ดังนี้

$$\int_0^t B_s dB_s \tag{5.1}$$

ในหัวข้อที่แล้วเราทราบแล้วว่า สำหรับ $\omega \in \Omega$ และการแบ่งกั้น τ_n ที่เหมาะสมการแบ่งกั้นหนึ่ง วิถีตัวอย่างแบบบราวน์วิถีตัวอย่างหนึ่งไม่สามารถนิยาม $\int_0^t B_s(\omega)dB_s(\omega)$ ได้โดยใช้วิธีการอินทิเกรตแบบรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัลได้ อย่างไรก็ตามเราสามารถนิยามอินทิกรัล (5.1) เป็นลิมิตของการลู่เข้าในค่ากำลังสองเฉลี่ยได้

เราจะกล่าวว่า ลำดับของตัวแปรสุ่ม (A_n) ลู่เข้าใน L^2 หรือลู่เข้าในค่ากำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Convergence) สู่ A ถ้า

$$E[|A_n|^2 + |A|^2] < \infty$$

สำหรับ $n \in \mathrm{N}^+$ และ

$$E\,|A_n - A|^2 \to 0$$

เมื่อ $n \to \infty$

เพื่อนิยามอินทิกรัล (5.1) เป็นลิมิตของการลู่เข้าในค่ากำลังสองเฉลี่ย พิจารณาฟังก์ชันค่าจริงใดๆ f บนช่วงปิด $[a,b]$ โดยไม่เป็นการเสียนัยทั่วไปเราสามารถพิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[0,1]$ ได้เช่นกัน พิจารณาการแบ่งกั้นบนช่วงปิด $[0,1]$ เป็นดังนี้

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$$

เมื่อ $n \in \mathbb{N}^+$ และนิยามส่วนเพิ่มของฟังก์ชัน f บนช่วงปิดที่มีการแบ่งกั้นนี้คือ

$$\Delta f : \Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1}),\ i = 1,\ldots,n$$

และนิยาม

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1},\ i = 1,\ldots,n$$

ให้การแบ่งกั้นระหว่างกลาง σ_n บนการแบ่งกั้น τ_n คือ ค่าใดๆ y_i มีค่าเท่ากับจุดปลายซ้ายของช่วง $[t_{i-1}, t_i]$ นั่นคือ $y_i = t_{i-1}$ สำหรับ $i = 1,\ldots,n$

ผลบวกรีมันน์-สตีลต์เชส (Riemann-Stieltjes Integral) สำหรับการแบ่งกั้น τ_n และการแบ่งกั้นระหว่างกลาง τ_n นิยามดังนี้

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}} \Delta_i B, \tag{5.2}$$

มีข้อสังเกตว่าการแบ่งกั้นระหว่างกลาง σ_n ของอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัลนั้น ค่า y_i คือ จุดปลายซ้ายของช่วง $[t_{i-1}, t_i]$ จึงกล่าวได้ว่าค่า y_i ในการแบ่งกั้นระหว่างกลาง σ_n ที่แตกต่างกันจะก่อให้เกิดสโตแคสติกอินทิกรัลต่างชนิดกัน

จากสูตรทวินาม

$$(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 = B_{t_i}^2 + B_{t_{i-1}}^2 - 2B_{t_i}B_{t_{i-1}}$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} (B_{t_i}B_{t_{i-1}} - B_{t_{i-1}}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}B_{t_i}^2 + B_{t_i}B_{t_{i-1}} - \frac{1}{2}B_{t_{i-1}}^2) \\ +\frac{1}{2}(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \\ &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i B)^2 := \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}Q_n(t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า S_n ลู่เข้าในลู่เข้าในค่ากำลังสองเฉลี่ยสู่ $0.5(B_t^2 - t)$ เมื่อ $n \to \infty$ ทั้งนี้โดยบทนิยามการลู่เข้ากำลังสองเฉลี่ยเราจะต้องแสดงให้ได้ว่า

$$E\left|S_n - \frac{1}{2}(B_t^2 - t)\right|^2 \to 0 \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

เมื่อแทน S_n ด้วยสมการ (5.3) ดังนั้นเราจะต้องแสดงให้ได้ว่า $E\left|Q\ (t) - t\right|^2 \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ จากความสัมพันธ์ที่ว่า

$$\mathrm{var}(Q_n(t)) = E(Q_n(t) - t)^2$$

ถ้าสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\mathrm{var}(Q_n(t)) \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ ก็เป็นการพิสูจน์ว่า $E\left|Q_n(t) - t\right|^2 \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

เพื่อคำนวณค่า $\mathrm{var}(Q_n(t))$ จึงคำนวณ $EQ_n(t)$

ซึ่งทำได้ดังนี้

เพราะว่าการเคลื่อนที่เชิงบราวน์มีส่วนเพิ่มนิ่งและอิสระจึงได้ว่า

$$E(\Delta_i B \Delta_j B) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \mathrm{var}(\Delta_i B) = t_i - t_{i-1} & , i = j \\ \quad = \Delta_i & \end{cases}$$

ดังนั้น

$$EQ_n(t) = \sum_{i=1}^{n} E(\Delta_i B)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = t$$

จากความสัมพันธ์ที่ว่า

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

จึงได้

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Q_n(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}((\Delta_i B)^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[E(\Delta_i B)^4 - \Delta_i^2 \right]\end{aligned}$$

และการเคลื่อนที่แบบบราวน์มีส่วนเพิ่มนิ่งและสมการ (2.1) จึงได้

$$E(\Delta_i B)^4 = E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4 = EB^4_{t_i - t_{i-1}} = 3\Delta_i^2$$

ดังนั้น

$$\mathrm{var}(Q_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} 2\Delta_i^2$$

ให้

$$\mathrm{mesh}(\tau_n) = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta_i \to 0$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Q_n(t)) &\le 2\sum_{i=1}^{n} \left(\max_{i=1,\ldots,n} \Delta_i \right) \Delta_i \\ &= 2t \ \mathrm{mesh}(\tau_n) \to 0\end{aligned}$$

สรุปจึงได้ว่า $E \left| Q_n(t) - t \right|^2 \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

ถ้าลำดับของตัวแปรสุ่ม (A_n) ลู่เข้าในค่ากำลังสองเฉลี่ยแล้วลำดับของตัวแปรสุ่มนี้จะลู่เข้าในความน่าจะเป็น (Converge in Probability) ด้วย [5]

จึงกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันลิมิต $f(t) = t$ เป็นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ และเรียกว่า *การแปรผันกำลังสอง* (Quadratic Variation) ของการเคลื่อนที่แบบบราวน์บนช่วงปิด $[0,1]$

จากการพิสูจน์ข้างต้นได้ว่า $S_n = 0.5(B_t^2 - Q_n(t))$ ลู่เข้ากำลังสองเฉลี่ยสู่ $0.5(B_t^2 - t)$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้นเราควรใช้ค่าลิมิตนี้เป็นค่าของอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล (5.1) อย่างไรก็ตามสามารถแสดงได้ว่าอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล (5.1) มีค่าเท่ากับ $0.5(B_t^2 - t)$ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

บทแทรกอิโต้อย่างง่าย

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับสองอย่างต่อเนื่อง (Twice Continuously Differentiable) สูตรอิโต้รูปแบบอย่างง่ายคือ เมื่อ $s < t$

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x) dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x) dx \tag{5.4}$$

อินทิกรัลพจน์แรกทางขวามือของสมการ (5.4) คืออิโต้สโตแคสติกอินทิกรัลของฟังก์ชัน $f'(B)$ ส่วนอินทิกรัลพจน์ที่สองทางขวามือของสมการ (5.4) คือรีมันน์อินทิกรัลของฟังก์ชัน $f''(B)$

เลือก $f(t) = t^2$ ได้ว่า $f'(t) = 2t$ และ $f''(t) = 2$ โดยบทแทรกอิโต้อย่างง่ายได้ว่า สำหรับ $s < t$ จึงได้

$$B_t^2 - B_s^2 = 2\int_s^t B_x dB_x + \int_s^t dx$$

เมื่อ $s = 0$ จึงได้

$$\int_0^t B_x dB_x = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

การนิยามอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัลให้เป็นลิมิตของการลู่เข้ากำลังสองเฉลี่ยสำหรับผลบวกรีมันน์-สตีลต์เชส

ที่เหมาะสมนั้นเป็นแนวความคิดที่ใช้ในการนิยามอินทิกรัลของฟังก์ชันใดๆ เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่แบบบราวน์ด้วย ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือของ Thomas [5]

7. การประยุกต์ทางการเงิน

ตัวแบบการเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเรขาคณิต (Geometric Brownian Motion Model) เป็นตัวแบบที่ใช้อธิบายพฤติกรรมราคาหุ้นที่ได้รับความนิยมอย่างมากตัวแบบหนึ่งในทางคณิตศาสตร์การเงินและวิศวกรรมการเงิน ตัวแบบการเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเรขาคณิตเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกชนิดหนึ่ง ดังนั้นในหัวข้อนี้จะได้นำเสนอแนวความคิดเบื้องต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกและการประยุกต์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีรูปแบบดังนี้

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t \qquad (7.1)$$

พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น $X_0(\omega) = X_0$ เมื่อ $B = (B_t)_{t\geq 0}$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวน์ $a(t,x)$ และ $b(t,x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงกำหนด สังเกตว่าพจน์ที่สองทางขวามือของสมการ (7.1) คือพจน์ที่แสดงถึงสัญญาณรบกวนอย่างสุ่ม (Random Noise)

สมการ (7.1) มีความหมายว่าการเปลี่ยนแปลง $dX_t = X_{t+dt} - X_t$ เกิดจากผลคูณของการเปลี่ยนแปลงของเวลากับตัวประกอบ $a(t,X_t)$ รวมกับผลคูณของการเปลี่ยนแปลงของ $dB_t = B_{t+dt} - B_t$ กับตัวประกอบ $b(t,X_t)$ อย่างไรก็ตามเราทราบแล้วว่าไม่มีวิถีตัวอย่างใดๆ ของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ที่หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นสมการ (7.1) ควรจะมีความหมายอย่างไร

โดยใช้ความรู้ด้านอิโต้แคลคูลัส (Itô Calculus) เรากำหนดให้สมการ (7.1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของสมการเชิงอินทิกรัลสโตแคสติก (Stochastic Integral Equation) ต่อไปนี้

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dB_s \qquad (7.2)$$

เมื่ออินทิกรัลพจน์แรกทางขวามือคือรีมันน์อินทิกรัลและพจน์ที่สองทางขวามือคืออิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล เรียกสมการ (7.2) ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้* (Itô Stochastic Differential Equation) การที่เรียกสมการ (7.2) ว่าสมการเชิงอนุพันธ์นั้นเนื่องมาจากสัญลักษณ์ในสมการ (7.1) อย่างไรก็ตามเราทราบแล้วว่าสมการ (7.1) เป็นรูปแบบเชิงอนุพันธ์ของอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล ซึ่งไม่มีความหมายเช่นเดียวกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ศึกษาในทางคณิตศาสตร์แต่อย่างใด นอกจากนี้เราเรียกการเคลื่อนที่แบบบราวน์ ซึ่งในพจน์ทางขวามือของสมการ (7.2) ว่า*กระบวนการขับเคลื่อน* (Driving Process) ของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้ (7.2)

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้ (7.2) มีอยู่สองชนิด ได้แก่ ผลเฉลยอย่างอ่อน (Weak Solution) และผลเฉลยอย่างเข้ม (Strong Solution) ผลเฉลยที่จะกล่าวถึงในที่นี้คือผลเฉลยอย่างเข้ม

กระบวนการสโตแคสติก $X = (X_t)_{t\geq 0}$ จะเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้ (7.2) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- ผลเฉลย X กลมกลืน (Adapted) กับการเคลื่อนที่แบบบราวน์ ซึ่งหมายถึง X_l เป็นฟังก์ชันของ B_S เมื่อ $s \leq t$
- อินทิกรัลพจน์แรกและพจน์ที่สองทางขวามือของสมการ (7.2) ต้องนิยามโดยรีมันน์อินทิกรัลและอิโต้สโตแคสติกอินทิกรัลตามลำดับ
- ผลเฉลย X เป็นฟังก์ชันที่มีวิถีตัวอย่างการเคลื่อนที่แบบบราวน์แฝงอยู่และมีฟังก์ชันสัมประสิทธิ์คือ $a(t,x)$ และ $b(t,x)$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้ (7.2) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นทั้ง 3 ประการนี้ว่า *กระบวนการแพร่กระจาย* (Diffusion Process) และเมื่อแทนค่า $a(t,x) = 0$ และ $b(t,x) = 1$ ในสมการ (7.2) จะได้การเคลื่อนที่แบบบราวน์ นั่นคือการเคลื่อนที่แบบบราวน์ก็เป็นกระบวนการแพร่กระจายเช่นกัน

เงื่อนไขเพียงพอในการมีอยู่จริงและความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลย X ของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

อิโต้ (7.2) เป็นดังนี้

สมมุติว่าเงื่อนไขเริ่มต้น X_0 สอดคล้อง $EX_0^2 < \infty$ และเป็นอิสระจาก $(B_t)_{t\geq 0}$ และสมมุติอีกด้วยว่าสำหรับ $t \in [0,T]$ และ $x, y \in \mathcal{R}$ ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $a(t,x)$ และ $b(t,x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

- เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- สอดคล้องกับเงื่อนไขลิพชิทซ์ (Lipschitz Condition) ดังนี้

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K\,|x - y|$$

แล้วสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้ (7.2) จะมีผลเฉลย X บนช่วง $[0,T]$ ได้เพียงหนึ่งเดียว (Unique) (Øksendal [5])

บทแทรกอิโต้ภาคขยาย

ให้ $f(t,x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ถึงอันดับสองอย่างต่อเนื่อง แล้วสำหรับ $s < t$

$$f(t,B_t) - f(s,B_s) = \int_s^t \left[f_1(x,B_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x,B_x) \right] dx + \int_s^t f_2(x,B_x) dB_x \quad (7.3)$$

เมื่อ f_i คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อเทียบกับตัวแปรที่ i

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาการเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเรขาคณิตที่มีรูปแบบดังนี้

$$X_t = f(t,B_t) = e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma B_t} \quad (7.4)$$

สำหรับค่าคงตัว μ และ $\sigma > 0$

เพื่อประยุกต์ใช้บทแทรกอิโต้ภาคขยายจึงให้

$$f(t,x) = e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma x}$$

และคำนวณ

$$f_1(t,x) = (\mu - 0.5\sigma^2) f(t,x)$$

$$f_2(t,x) = \sigma f(t,x) \text{ และ } f_{22}(t,x) = \sigma^2 f(t,x)$$

โดยบทแทรกอิโต้ภาคขยายได้ว่ากระบวนการ (7.4) สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้ที่มีรูปแบบดังนี้

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

เรียกสมการนี้ว่า *กระบวนการอิโต้* (Itô Process)

การเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเรขาคณิต (7.4) เป็นตัวแบบอย่างง่ายที่นิยมใช้ในการอธิบายพฤติกรรมราคาหุ้นในตลาดหลักทรัพย์

8. สรุป

บทความวิชาการฉบับนี้ได้กล่าวถึงความรู้เบื้องต้นของกระบวนการสโตแคสติก การเคลื่อนที่แบบบราวน์เป็นกระบวนการสโตแคสติกอย่างหนึ่งซึ่งมีบทบาทสำคัญทางวิศวกรรมการเงินและทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ วิถีตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบบราวน์ไม่มีจุดใดเลยที่สามารถหาอนุพันธ์ได้และมีการแปรผันอย่างไม่มีขอบเขต ด้วยสมบัติทั้งสองประการนี้จึงไม่สามารถนิยามอินทิกรัลของฟังก์ชันใดๆ เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่แบบบราวน์โดยใช้วิธีอินทิกรัลแบบดั้งเดิม (รีมันน์อินทิกรัลหรือรีมันน์-สตีลต์เชสอินทิกรัล) อย่างไรก็ตามเรานิยามอินทิกรัลของการเคลื่อนที่แบบบราวน์เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่แบบบราวน์เป็นลิมิตของการลู่เข้ากำลังสองเฉลี่ยสำหรับผลบวกรีมันน์-สตีลต์เชสและเรียกอินทิกรัลดังกล่าวนี้ว่า อิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล ทั้งนี้โดยบทแทรกอิโต้อย่างง่ายสามารถแสดงได้ว่า อิโต้สโตแคสติกอินทิกรัล $\int_0^t B_s dB_s$ มีค่าเท่ากับ $0.5(B_t^2 - t)$ ในบทการประยุกต์ทางการเงินได้อภิปรายถึงสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกอิโต้และได้นำเสนอตัวแบบการเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเรขาคณิตซึ่งเป็นตัวแบบที่นิยมใช้อธิบายพฤติกรรมของราคาหุ้นในตลาดหลักทรัพย์

เอกสารอ้างอิง

[1] F. Black and S. Myron, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp.637–654, 1973.

[2] R. C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Mana- gement Science (The RAND Corporation),* vol. 4, no. 1, pp. 141–183, 1973.

[3] B. K. Øksendal, *Stochastic differential equations: an introduction with application*, 6th, New York: Springer-Verlin, 2003.

[4] S. J. Taylor, "Exact asymptotic estimates of Brownian path variation," *Duke Mathematics Journal*, vol 39, pp. 219-241, 1972.

[5] M. Thomas, *Elementary stochastic calculus with finance in view*, Singapore: World Scientific, 1998.