การเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์

พรรณนา เอี่ยมสุวรรณ์[1]* และ ทองคำ ไม้กลัด[2]

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อนำเสนอวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ โดยวิธีประมาณค่าการแจกแจง กับวิธีบูตสแตรป ใช้การจำลองข้อมูลจากประชากรที่มีการแจกแจงรูปแบบต่าง ๆ ด้วยขนาดตัวอย่าง $n = 5,10,20,25,50,75$ และ 100 ด้วยโปรแกรม R [1] ทำซ้ำ 5,000 ครั้งในแต่ละกรณีของขนาดตัวอย่างและการแจกแจง คำนวณช่วงความเชื่อมั่นของค่าพิสัยควอร์ไทล์ จาก 3 วิธี ได้แก่ 1) วิธีบูตสแตรปที 2) วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีเทคนิคบูตสแตรป และ 3) วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณการแจกแจง ผลการทดลองพบว่าวิธีบูตสแตรปทีและวิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีเทคนิคบูตสแตรป ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเข้าใกล้ 0.95 ที่กำหนดทุกการแจกแจงที่ศึกษา และทุกขนาดตัวอย่างที่กำหนด ยกเว้นการแจกแจง *Beta* (0.5,0.5) ที่เมื่อ $n \geq 50$ จึงจะทำให้วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีเทคนิคบูตสแตรป มีค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเข้าใกล้ 0.95 แต่วิธีบูตสแตรปทีให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมต่ำทุกขนาดตัวอย่างสำหรับวิธีประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณการแจกแจง ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเข้าใกล้ 0.95 ทุกการแจกแจงที่ทำการทดลองเมื่อตัวอย่างมีขนาดไม่เล็กมาก

คำสำคัญ: บูตสแตรปที การประมาณการแจกแจง

1 นักศึกษา ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

2 รองศาสตราจารย์ ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08-7672-3249 อีเมล: phannana_18@hotmail.com

รับเมื่อ 20 กันยายน 2555 ตอบรับเมื่อ 18 ธันวาคม 2555

A Comparison of Confidence Intervals for the Quartile Range

Phannana Aiemsuwan[1]* and Thongkam Maiklad[2]

Abstract

The purpose of this paper is to propose the quartile range confidence interval by using the distribution estimate for the quartile range standard error estimation and bootstrap methods. The study was carried out bygenerating random samples of size n = 5, 10, 20, 25, 50, 75 and 100 from various distributions. Each situation of sample size and distribution took 5,000 times the computing confidence intervals for the quartile range by using the R program [1]. The methods were: 1) the bootstrap-t; 2) the bootstrap estimate for the quartile range standard error; and 3) the distribution estimate for the quartile range standard error estimation. The results indicate that the bootstrap-t and the bootstrap estimate for the quartile range standard error method provided the coverage probability close to the pre-specified confidence coefficient for all sample sizes and all distributions, except the *Beta* (0.5,0.5). For this distribution, the bootstrap estimate for the quartile range standard error method provided the coverage probability close to the pre-specified confidence coefficient when $n \geq 50$; however, the bootstrap-t method provided the coverage probability rather poorly for all sample sizes. The distribution estimate for the quartile range standard error estimation method provided the coverage probability close to the pre-specified confidence coefficient for medium sample sizes and all distributions.

Keywords : Bootstrap-t, Distribution Estimate

1 Student, Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok.

2. Associate Professor, Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok.

* Corresponding Author, Tel. 08-7672-3249, E-mail: phannana_18@hotmail.com

Received 20 September 2012; Accepted 18 December 2012

1. บทนำ

การวัดการกระจาย (Measures of Dispersion) เป็นสถิติประเภทหนึ่งที่ใช้อธิบายลักษณะของข้อมูลที่ศึกษาบอกถึงการกระจายของกลุ่มข้อมูลว่า มีค่าแตกต่างกันมากน้อยเพียงใด ทำให้เห็นภาพรวมของข้อมูลชุดนั้นๆ ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น เช่น การวัดการกระจายของ คะแนนสอบของนักเรียนในรายวิชาหนึ่งๆ ปริมาณการส่งออกสินค้าในแต่ละวัน ปริมาณการผลิตในโรงงานอุตสาหกรรม เป็นต้น การวัดการกระจายของข้อมูลนั้น จะมีรูปแบบสำหรับการวัดการกระจายอยู่หลากหลายรูปแบบ โดยจะมีรูปแบบการวัดการกระจายอยู่ 2 ลักษณะ คือ การวัดการกระจายแบบสมบูรณ์ (Absolute) เป็นการวัดการกระจายของข้อมูลเพื่อดูว่าข้อมูลแต่ละค่ามีความแตกต่างกันมากหรือน้อยเพียงใด และการวัดการกระจายแบบสัมพัทธ์ (Relative) เป็นการเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลต่างกลุ่ม ในงานวิจัยนี้สนใจศึกษาค่าวัดการกระจายโดยใช้ค่าพิสัยควอร์ไทล์หรือค่าพิสัยระหว่างควอร์ไทล์ (Quartile Range or Interquartile Range) ซึ่งเป็นค่าวัดการกระจายแบบสมบูรณ์

ค่าพิสัยควอร์ไทล์ (Quartile Range: I) เป็นค่าวัดการกระจายที่ไม่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงของค่าต่ำๆ หรือสูงๆ ของข้อมูล หรืออาจกล่าวว่าลักษณะของข้อมูลมีความเบ้นั่นเอง โดยเรียกค่าสถิติที่ไม่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงนี้ว่า ค่าสถิติที่มีความแกร่ง (Robust Statistic) โดยร้อยละ 50 ของค่าสังเกตทั้งหมด จะมีค่าตกอยู่ภายในค่าพิสัยควอร์ไทล์ ซึ่งค่าพิสัยควอร์ไทล์คำนวณได้จากช่วงห่างระหว่างค่าควอร์ไทล์ที่ 1 และค่าควอร์ไทล์ที่ 3 แสดงดังนี้

$$I = \left(Q_3 - Q_1\right)$$

Q_1 คือค่าควอร์ไทล์ที่ 1 หรือค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ของประชากร Q_3 คือค่าควอร์ไทล์ที่ 3 หรือค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ของประชากรในปี ค.ศ.1959 Wilks [2] ได้นำเสนอการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่น 95% ของค่าควอร์ไทล์ที่ 1 เป็น $(Y_{(a)}, Y_{(b)})$ และค่าควอร์ไทล์ที่ 3 เป็น $(Y_{(c)}, Y_{(d)})$ โดยที่ $Y_{(j)}$ เป็นค่าสถิติลำดับที่ $j, a=n/4-1.96(3n/16)^{1/2}, b=n/4+1.96(3n/16)^{1/2}, c=n+1-b$ และ $d=n+1-a$ เมื่อ $a \geq 1$ ต่อมาในปี ค.ศ.1994 Stuart and Ord [3] ได้นำเสนอค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 1 ตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 3 และความแปรปรวนร่วมของตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 1 กับตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 3 ดังนี้ $v(\hat{Q}_1) = 3/(n16 f_1^2)$, $v(\hat{Q}_3) = 3/(n16 f_3^2)$ และ $cov(\hat{Q}_1, \hat{Q}_3) = 1/(n16 f_1 f_3)$ โดยมี f_1 และ f_3 เป็นฟังก์ชันการแจกแจงของตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 1 และตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 3 ตามลำดับ ต่อมาได้มีการนำเสนอค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 1 กับตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ที่ 3 ซึ่งปราศจาก f_1 และ f_3 แต่จะใช้ช่วงความเชื่อมั่นของค่าควอร์ไทล์ที่ 1 และค่าควอร์ไทล์ที่ 3 ซึ่งนำมาเป็นสัดส่วนกับค่า $z_{1-\alpha^*/2}$ แสดงค่าความแปรปรวนได้ดังนี้ $v(\hat{Q}_1) = (Y_{(b)} - Y_{(a)})^2 / (2z_{1-\alpha^*/2})^2$ และ $v(\hat{Q}_3) = (Y_{(d)} - Y_{(c)})^2 / (2z_{1-\alpha^*/2})^2$ ซึ่งตัวประมาณค่านี้ถูกนำเสนอในปี ค.ศ.1998 โดย Hettmansperger and Mckean [4] ต่อมาในปี ค.ศ. 2001 วิธีการนี้ Price and Bonett [5] ได้นำไปประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่ามัธยฐานเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงต่างๆ ซึ่งกล่าวได้ว่าเป็นตัวประมาณค่าที่ง่ายต่อการคำนวณและให้ค่าความเอนเอียงและค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนต่ำ จากการประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าควอร์ไทล์ทั้งสองวิธี ในปี ค.ศ. 2006 Bonett [6] ได้ทำการประมาณค่า f_1 และ f_3 แสดงได้ดังนี้ $\hat{f}_1^2 = 3(z_{1-\alpha^*/2})^2 / \{4n((Y_{(b)} - Y_{(a)})^2)\}$ และ $\hat{f}_3^2 = 3(z_{1-\alpha^*/2})^2 / \{4n((Y_{(d)} - Y_{(c)})^2)\}$ เพื่อใช้ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์ ซึ่งช่วงความเชื่อมั่นของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันควอร์ไทล์ที่ถูกพัฒนาขึ้นนั้นจะมีประสิทธิภาพในกรณีที่นำไปใช้กับการแจกแจงที่ไม่ปกติ

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจหาวิธีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์ โดยอาศัยแนวคิดที่กล่าวมาข้างต้น เกณฑ์การวัดประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์ ผู้วิจัยจะพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม (Coverage Probability) และค่าความยาวเฉลี่ยของช่วง (Expected Length)

2. ช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์

กำหนดให้ประชากรมีการแจกแจงต่างๆ มีค่าพารามิเตอร์พิสัยควอร์ไทล์ $I=(Q_3-Q_1)$ในการหาตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ $\hat{I}$ หาได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำการจำลองตัวอย่างสุ่ม y_1 , y_2 , …, y_n ขนาด n ที่มีการแจกแจงที่กำหนด

2. เรียงข้อมูลที่จำลองได้จากน้อยไปหามาก จากนั้นหาค่า $\hat{Q}_1$ และ $\hat{Q}_3$ ดังนี้

$$\hat{Q}_1 = y_{\frac{1}{4}(n+1)} \tag{1}$$

$$\hat{Q}_3 = y_{\frac{3}{4}(n+1)} \tag{2}$$

3. หาตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ $\hat{I}$ ดังนี้

$$\hat{I} = \hat{Q}_3 - \hat{Q}_1 \tag{3}$$

ในการวิจัยนี้ทำการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์ที่สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $1-\alpha$ ด้วยวิธีต่างๆ ดังนี้

2.1 วิธีบูตสแตรปที (Bootstrap-t: Bt)

ในปี ค.ศ.1993 Efron และ Tibshirani [7] ได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้เทคนิคการสุ่มซ้ำ (Resampling) เรียกว่าวิธีบูตสแตรปที (Bootstrap-t)

ในงานวิจัยนี้ทำการประมาณช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของค่าพิสัยควอร์ไทล์ $I=(Q_3-Q_1)$ ดังนี้

1. ทำการสุ่มตัวอย่างขนาด n แบบใส่คืนจากตัวอย่างสุ่ม $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ที่ทำการจำลองไว้ในข้อ 1 ข้างต้น

2. คำนวณค่าประมาณของค่าพิสัยควอร์ไทล์ $\hat{I}_1$ จากสมการที่ 3

3. ทำขั้นตอนที่ 1 และ 2 ซ้ำจนครบ B ครั้ง จะได้ตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ที่ได้ในแต่ละรอบโดยวิธีบูตสแตรป แทนด้วย $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \ldots, \hat{I}_B$ กำหนดให้ B คือจำนวนครั้งของการสุ่มตัวอย่างซ้ำ

$$\bar{I}^{(B)} = \sum_{i=1}^{B} \hat{I}_i \Big/ B$$

4. คำนวณค่าของ

$$s_I^{(B)} = \left[\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{I}_i - \bar{I}^{(B)}\right)^2\right]^{1/2}$$

และ

$$z_i^* = \frac{\hat{I}_i - \bar{I}^{(B)}}{s_I^{(B)}}$$

5. ทำการเรียงลำดับค่า $z_i^*,\ i=1,2,\ldots,B$ จากน้อยไปมากหาค่า $z^*_{1-\alpha/2}$ และ $z^*_{\alpha/2}$ ซึ่งเป็นค่าควอร์ไทล์ที่ $1-\alpha/2$ และ $\alpha/2$ ของ z_i^* ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของค่าพิสัยควอร์ไทล์ ดังนี้

$$CI_{Bt} \in \left(\hat{I} - z^*_{1-\alpha/2}\, s_I^{(B)}, \hat{I} - z^*_{\alpha/2}\, s_I^{(B)}\right) \tag{4}$$

2.2 วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีเทคนิคบูตสแตรป (Bootstrap Estimating for Standard Error: BS)

งานวิจัยนี้จะนำวิธีบูตสแตรปของ Efron และ Tibshirani [7] มาทำการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานการแจกแจงของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ เรียกว่าวิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีเทคนิคบูตสแตรป (Bootstrap Estimating of Standard Error) ด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ทำการสุ่มตัวอย่างขนาด n แบบใส่คืนจากตัวอย่างสุ่ม $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ที่ทำการจำลองไว้ในข้อ 1 ข้างต้น

2. คำนวณค่าประมาณของค่าพิสัยควอร์ไทล์ $\hat{I}_1$ จากสมการที่ 3

3. ทำขั้นตอนที่ 1 และ 2 ซ้ำจนครบ B ครั้ง จะได้ตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ที่ได้ในแต่ละรอบโดยวิธีบูตสแตรป แทนด้วย $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \ldots, \hat{I}_B$ กำหนดให้ B คือจำนวนครั้งของการสุ่มตัวอย่างซ้ำ

4. คำนวณค่าของ $\bar{I}^{(B)} = \sum_{i=1}^{B} \hat{I}_i \Big/ B$

และ

$$s_I^{(B)} = \left[\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{I}_i - \bar{I}^{(B)}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5}$$

ตั้งสมมติฐานว่าตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์มีการแจกแจงประมาณการแจกแจงแบบปกติช่วงความเชื่อมั่น (1- α) 100 % ของค่าพิสัยควอร์ไทล์ จึงเป็นดังนี้

$$CI_{BS} \in \left(\hat{I} - z_{1-\alpha/2} s_I^{(B)}, \hat{I} + z_{1-\alpha/2} s_I^{(B)} \right) \tag{6}$$

โดยที่ $z_{1-\alpha/2}$ คือค่าควอนไทล์ $1-\alpha/2$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

2.3 วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณการแจกแจง (Distribution Estimate for Quartile Range Standard Error: SOB)

ทำการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ $\hat{I}$ ดังนี้

$$v(\hat{I}) = v(\hat{Q}_1) + v(\hat{Q}_3) - 2\operatorname{cov}(\hat{Q}_1, \hat{Q}_3)$$

โดย $v(\hat{Q}_i)$; $i = 1, 3$ เป็นไปตาม Stuard & Ord [2] ในปี ค.ศ. 1994 และประมาณค่า $\hat{f}_i$; $i = 1, 3$ ด้วยวิธีของ Bonett [6] ที่เสนอในปี ค.ศ. 2006 จึงได้ว่า

$$v(\hat{I}) = \frac{3}{n16\hat{f}_1^2} + \frac{3}{n16\hat{f}_3^2} - \frac{2}{n16\hat{f}_1\hat{f}_3} \tag{7}$$

โดยที่ $\hat{f}_1^2 = \frac{3\left(z_{1-\alpha^*/2}\right)^2}{4n(y_{(b)} - y_{(a)})^2}$ และ $\hat{f}_3^2 = \frac{3\left(z_{1-\alpha^*/2}\right)^2}{4n(y_{(d)} - y_{(c)})^2}$

$y_{(a)}$ คือสถิติลำดับที่ a , $a = y_{\frac{n}{4} - 1.96\sqrt{\frac{3n}{16}}}$

$y_{(b)}$ คือสถิติลำดับที่ b , $b = y_{\frac{n}{4} + 1.96\sqrt{\frac{3n}{16}}}$

$y_{(c)}$ คือสถิติลำดับที่ c , $c = y_{\frac{3n}{4} - 1.96\sqrt{\frac{3n}{16}}}$

และ $y_{(d)}$ คือสถิติลำดับที่ d , $d = y_{\frac{3n}{4} + 1.96\sqrt{\frac{3n}{16}}}$

โดยอาศัยทฤษฎี Asymptotic Normal Distribution จึงได้ว่าช่วงความเชื่อมั่น (1-α) 100% ของค่าพิสัยควอร์ไทล์เป็นดังนี้

$$CI_{SOB} \in \left(\hat{I} - z_{1-\alpha^*/2}\sqrt{v(\hat{I})}, \hat{I} + z_{1-\alpha^*/2}\sqrt{v(\hat{I})} \right) \tag{8}$$

โดยที่ $z_{1-\alpha^*/2}$ คือ ค่าควอนไทล์ $1 - \alpha^*/2$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน ซึ่ง α * ขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างคือ

1. ถ้าขนาดตัวอย่าง $n \geq 30; \alpha^* = 0.05$
2. ถ้าขนาดตัวอย่าง

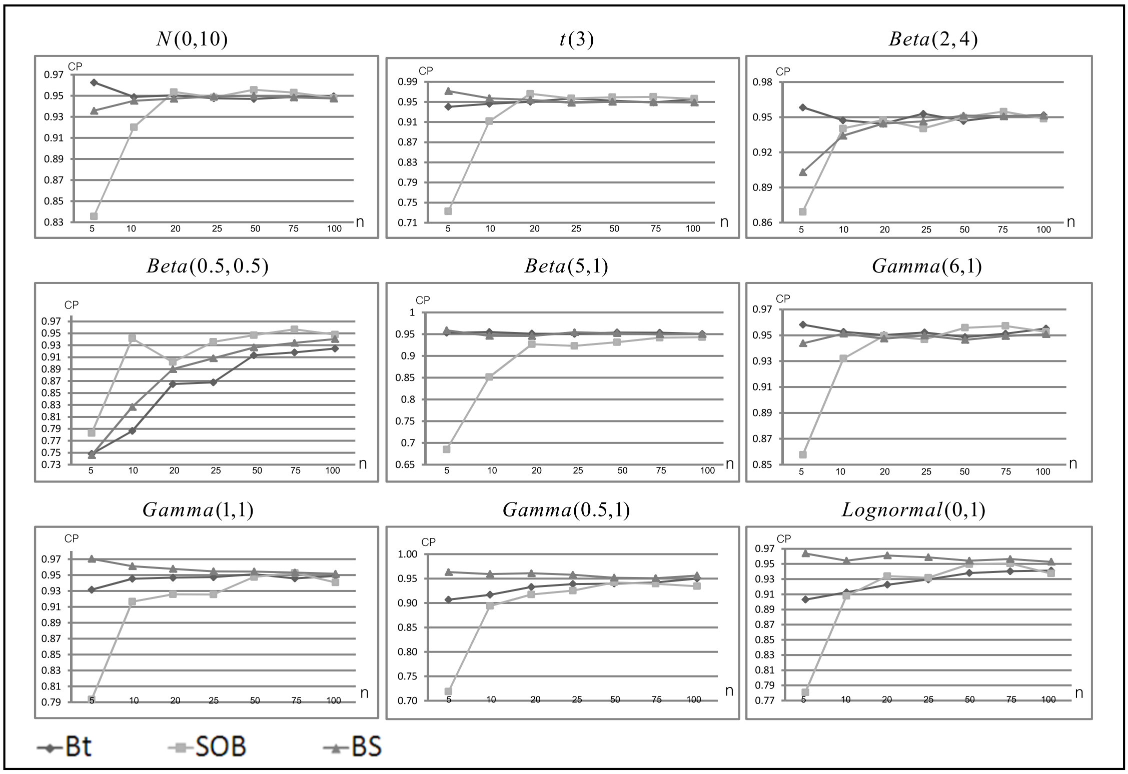
$$n < 30; \alpha^* = 1 - \sum_{i=a}^{b-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{n-i}$$

3. ขอบเขตการจำลอง

ในงานวิจัยนี้ใช้ข้อมูลที่ได้จากการจำลองด้วยโปรแกรม R โดยกำหนดให้ข้อมูลมีการแจกแจง $Normal(0,10)$, $t(3)$, $Beta(2,4)$, $Beta(0.5,0.5)$, $Beta(5,1)$, $Gamma(6,1)$, *Gamma (1,1), Gamma (0.5,1)* และ $Lognormal(0,1)$ และขนาดตัวอย่าง 5, 10, 20, 25, 50, 75 และ 100 ทำซ้ำ 5,000 ครั้ง ในแต่ละกรณี ใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ทำการหาวิธีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์ โดยอาศัยแนวคิดที่กล่าวมาข้างต้นในการหาตัวสถิติ วิธีที่นำเสนอทั้ง 3 วิธี ได้แก่ 1) วิธีบูตสแตรปที 2) วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธี เทคนิคบูตสแตรป และ 3) วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณการแจกแจง ในแต่ละครั้งของการจำลองจะทำการหาค่าสถิติ Bt_j, SOB_j และ BS_j โดยที่ $j = 1, 2, ..., 5000$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นแต่ละวิธีจำนวน 5,000 ช่วง แล้วจึงหาค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม (Coverage Probability: CP) และค่าความยาวเฉลี่ยของช่วง (Expected Length: EL) ซึ่งคำนวณค่าดังนี้

$$CP = \Pr(I \in CI) \tag{9}$$

$$Length_j = Upper_j - Lower_j \quad ; j = 1, 2, ..., 5000$$



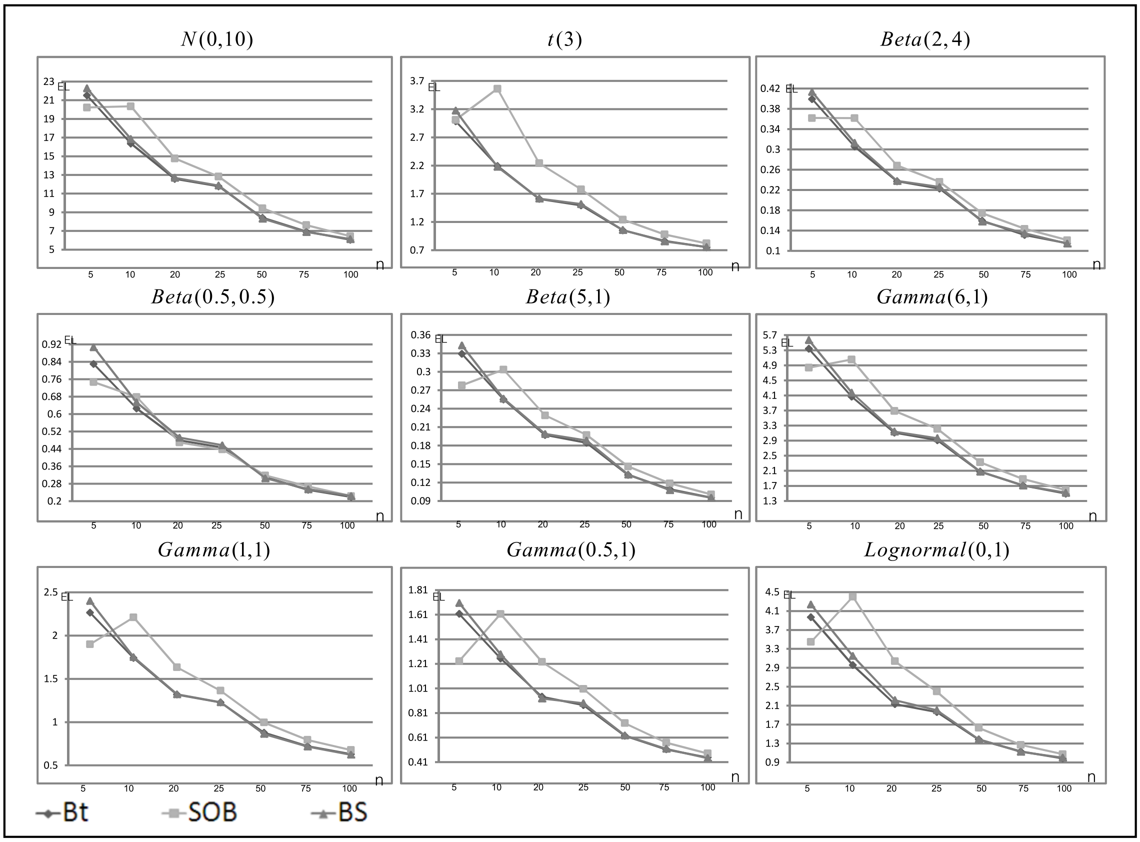
รูปที่ 1 ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม (CP) ของช่วงความเชื่อมั่นจากวิธีการประมาณค่า 3 วิธี

$$EL = \frac{\sum_{j=1}^{5000} Length_j}{5000} \qquad (10)$$

วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมตรงตามเกณฑ์ที่กำหนดซึ่งคำนวณจาก $|CP - 0.95| \leq 0.025$ กล่าวได้ว่าวิธีการประมาณค่านั้นให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมใกล้เคียงสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและหากวิธีการประมาณค่าวิธีใดให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมใกล้เคียงสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงสั้นที่สุดแล้ว วิธีการประมาณค่านั้นจะเป็นวิธีที่ดีที่สุด

4. ผลการจำลอง

พิจารณารูปที่ 1 แสดงค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม พบว่า การประมาณช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์โดยวิธีบูตสแตรปทีให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเข้าใกล้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกการแจกแจงและทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นกรณีประชากรมีการแจกแจง *Beta*(0.5,0.5) วิธีนี้จะให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมต่ำทุกขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีเทคนิคบูตสแตรปให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเข้าใกล้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกการแจกแจงและทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นกรณีประชากรมีการแจกแจง *Beta* (0.5,0.5) วิธีนี้จะให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเข้าใกล้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n \geq 50$ การแจกแจงประชากรที่นำเสนอมามีการแจกแจง *Beta* (0.5,0.5) ที่มีรูปแบบแตกต่างจากการแจกแจงอื่นคือมีลักษณะรูปตัวยู (U-Shepe) พบว่าถ้าประชากรแจกแจง *Beta* (0.5,0.5) แล้ว วิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่น 95% ของค่าพิสัย *Beta* (0.5,0.5) ควอร์ไทล์



รูปที่ 2 ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วง (EL) ของช่วงความเชื่อมั่นจากวิธีการประมาณค่า 3 วิธี

โดยวิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณการแจกแจงจะเป็นวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเข้าใกล้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n \geq 10$

พิจารณารูปที่ 2 แสดงค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงพบว่า การประมาณช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์โดยวิธีบูตสแตรปทีให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงสั้นที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n = 10,\ 20$ และ 25 และประชากรมีการแจกแจง $Normal(0,10)$, $t(3)$, $Beta(2,4)$, $Beta(0.5,0.5)$, $Beta(5,1)$, $Gamma(6,1)$ และ $Gamma(1,1)$ แต่ถ้าประชากรมีการแจกแจง $Gamma(0.5,1)$ และ $Lognormal(0,1)$ วิธีนี้จะให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงสั้นที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n \geq 10$ สำหรับวิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีเทคนิคบูตสแตรปให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงสั้นที่สุดเมื่อประชากรมีการแจกแจง $Normal(0,10)$, $t(3)$, $Beta(2,4)$, $Beta(0.5,0.5)$, $Beta(5,1)$, $Gamma(6,1)$ และ $Gamma(1,1)$ และตัวอย่างมีขนาด $n = 50,\ 75$ และ 100 ในขณะที่วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณการแจกแจง ให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงสั้นที่สุดทุกการแจกแจงเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n = 5$ แม้เมื่อขนาดตัวอย่าง $n > 5$ ก็มีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงใกล้เคียงกับอีก 2 วิธีที่เหลือ

อนึ่งผลการพิจารณาประสิทธิภาพที่ชัดเจนยิ่งขึ้นของช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์ทั้ง 3 วิธี แสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าความยาวเฉลี่ยของช่วง (ค่าในวงเล็บ) จากวิธีการประมาณค่า 3 วิธี

การแจกแจง	n	n=5	n=10	n=20	n=25	n=50	n=75	n=100
Normal(0,10) *I*=13.4898	Bt	**0.9626* (21.5186)**	**0.9488* (16.3646)**	**0.9504* (12.5757)**	**0.9476* (11.7857)**	0.9470* (8.4086)	0.9488* (6.9269)	0.9496* (6.0533)
	BS	0.9358* (22.2810)	0.9452* (16.8516)	0.9472* (12.6969)	0.9494* (11.8610)	**0.9500* (8.3195)**	**0.9484* (6.8923)**	**0.9474* (6.0291)**
	SOB	0.8356 (20.2216)	0.9202 (20.3539)	0.9536* (14.7736)	0.9484* (12.8230)	0.9556* (9.4236)	0.9530* (7.6265)	0.9480* (6.4376)
t(3) *I*=1.5297	Bt	**0.9404* (2.9866)**	**0.9464* (2.1725)**	**0.9504* (1.6087)**	**0.9570* (1.4950)**	0.9526* (1.0534)	0.9490* (0.8636)	0.9556* (0.7528)
	BS	0.9716* (3.1753)	0.9574* (2.1786)	0.9544* (1.6148)	0.9484* (1.5176)	**0.9504* (1.0526)**	**0.9496* (0.8571)**	**0.9490* (0.7525)**
	SOB	0.7326 (3.0114)	0.9118 (3.5618)	0.9662* (2.2417)	0.9570* (1.7779)	0.9594* (1.2412)	0.9600* (0.9795)	0.9564* (0.8210)
Beta(2,4) *I*=0.2604	Bt	**0.9584* (0.3994)**	**0.9474* (0.3058)**	**0.9444* (0.2374)**	**0.953* (0.2229)**	0.9468* (0.1596)	0.9510* (0.1346)	0.9518* (0.1151)
	BS	0.9030 (0.4136)	0.9342* (0.3132)	0.9446* (0.2380)	0.9464* (0.2260)	**0.9514* (0.1580)**	**0.9508* (0.1345)**	**0.9514* (0.1145)**
	SOB	0.8692 (0.3621)	0.9404* (0.3618)	0.9476* (0.2683)	0.9404* (0.2362)	0.9498* (0.1746)	0.9548* (0.1437)	0.9488* (0.1214)
Beta(0.5,0.5) *I*=0.7071	Bt	0.748 (0.8303)	0.7864 (0.6257)	0.8650 (0.4795)	0.8678 (0.4457)	0.9132 (0.3092)	0.918 (0.2519)	0.9244 (0.2188)
	BS	0.7460 (0.9074)	0.8266 (0.6536)	0.8900 (0.4915)	0.9082 (0.4566)	**0.9262* (0.3051)**	**0.9340* (0.2548)**	**0.9404* (0.2236)**
	SOB	**0.7828 (0.7469)**	**0.9414* (0.6786)**	**0.9018 (0.4697)**	**0.9356* (0.4378)**	0.9468* (0.3182)	0.9566* (0.2675)	0.9478* (0.2237)
Beta(5,1) *I*=0.1862	Bt	**0.9532* (0.3292)**	**0.9550* (0.2552)**	**0.9514* (0.1973)**	**0.9508* (0.1845)**	0.9540* (0.1324)	0.9534* (0.1092)	0.9508* (0.0955)
	BS	0.9590* (0.3429)	0.9462* (0.2565)	0.9458* (0.1990)	0.9546* (0.1883)	**0.9522* (0.1320)**	**0.9498* (0.1077)**	**0.9504* (0.0952)**
	SOB	0.6850 (0.2781)	0.8514 (0.3037)	0.9270* (0.2292)	0.9230 (0.1974)	0.9316* (0.1462)	0.9420* (0.1188)	0.9430* (0.1007)
Gramma (6,1) *I*=3.2034	Bt	**0.9582* (5.3400)**	**0.9526* (4.0681)**	**0.9502* (3.1125)**	**0.9522* (2.9133)**	0.9486* (2.0776)	0.9512* (1.7112)	0.9552* (1.5170)
	BS	0.9438* (5.5711)	0.9512* (4.1755)	0.9474* (3.1393)	0.9498* (2.9647)	**0.9464* (2.0768)**	**0.9494* (1.7106)**	**0.9508* (1.5168)**
	SOB	0.8576 (4.8358)	0.9320* (5.0551)	0.9496* (3.6906)	0.9468* (3.2142)	0.9558* (2.3266)	0.9572* (1.8817)	0.9526* (1.5879)
Gamma(1,1) *I*=1.0986	Bt	**0.9316* (2.2640)**	**0.9454* (1.7404)**	**0.9468* (1.3185)**	**0.9474* (1.2277)**	0.9510* (0.8771)	0.9458* (0.7212)	0.9490* (0.6295)
	BS	0.9704* (2.3984)	0.9612* (1.7512)	0.9578* (1.3213)	0.9546* (1.2297)	**0.9544* (0.8631)**	**0.9532* (0.7174)**	**0.9516* (0.6224)**
	SOB	0.7936 (1.8990)	0.9166 (2.2100)	0.9258* (1.6329)	0.9256* (1.3626)	0.9476* (0.9960)	0.9526* (0.7945)	0.9408* (0.6768)
Gamma(0.5,1) *I*=0.6108	Bt	0.9068 (1.6159)	0.9170 (1.2533)	0.9328* (0.9418)	0.9388* (0.8736)	**0.9398* (0.6250)**	**0.9422* (0.5141)**	**0.9502* (0.4423)**
	BS	**0.9634* (1.7047)**	**0.9594* (1.2874)**	**0.9610* (0.9272)**	**0.9578* (0.8893)**	0.9518* (0.6276)	0.9508* (0.5183)	0.9564* (0.4427)
	SOB	0.7186 (1.2313)	0.8940 (1.6153)	0.9174 (1.2254)	0.9254* (1.0052)	0.9422* (0.7269)	0.9396* (0.5683)	0.9344* (0.4808)
Lognormal(0,1) *I*=1.4536	Bt	0.9030 (3.9696)	0.9126 (2.9554)	0.9226 (2.1319)	0.9296* (1.9633)	**0.9380* (1.3831)**	**0.9404* (1.1315)**	**0.9412* (0.9840)**
	BS	**0.9638* (4.2374)**	**0.9542* (3.1485)**	**0.9612* (2.2156)**	**0.9588* (2.0024)**	0.9542* (1.3880)	0.9564* (1.1231)	0.9528* (1.0007)
	SOB	0.7808 (3.4448)	0.9078 (4.4013)	0.9340* (3.0375)	0.9318* (2.3971)	**0.9496* (1.6285)**	**0.9506* (1.2699)**	**0.9374* (1.0732)**

* ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่เข้าใกล้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95

(แถบสีเทา) ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงที่สั้นที่สุดในกลุ่มที่ให้ค่าค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่เข้าใกล้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

5. อภิปรายผลและสรุป

จากผลการวิจัยนี้พบว่า การประมาณช่วงความเชื่อมั่นค่าพิสัยควอร์ไทล์โดยวิธีบูตสแตรปทีเป็นวิธีที่ดีที่สุด คือมีค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเข้าใกล้ 0.95 และมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสั้นที่สุดที่ขนาดตัวอย่าง $n \le 25$ เมื่อประชากรมีการแจกแจง $Normal(0,10)$, $t(3)$, $Beta(2,4)$, $Beta(5,1)$, $Gamma(6,1)$ และ $Gamma(1,1)$ แต่ถ้าประชากรมีการแจกแจง $Gamma(0.5,1)$ และ $Lognormal(0,1)$ วิธีนี้จะเป็นวิธีที่เหมาะสมเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n \ge 25$ สำหรับวิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยวิธีเทคนิคบูตสแตรปเป็นวิธีที่ดีที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n \le 20$ และประชากรมีการแจกแจง $Gamma\,(0.5,1)$ และ $Lognormal\,(0,1)$ แต่ถ้าประชากรมีการแจกแจง $Normal(0,10)$, $t(3)$, $Beta(2,4)$, $Beta(0.5,0.5)$, $Beta(5,1)$, $Gamma(6,1)$ และ $Gamma(1,1)$ วิธีนี้จะเป็นวิธีที่เหมาะสมเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n \ge 50$ ในขณะที่วิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณการแจกแจงเป็นวิธีที่ดีที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาด $n \le 25$ และประชากรมีการแจกแจง $Beta(0.5,0.5)$

ตารางที่ 2 สรุปวิธีการประมาณค่าที่เหมาะสมในแต่ละกรณีของขนาดตัวอย่างและการแจกแจง

<table>
<tr><th>n / การแจกแจง</th><th>5</th><th>10</th><th>20</th><th>25</th><th>50</th><th>75</th><th>100</th></tr>
<tr><td>Normal(0,10)</td><td colspan="4" rowspan="3">Bt</td><td colspan="3" rowspan="7">BS</td></tr>
<tr><td>t(3)</td></tr>
<tr><td>Beta(2,4)</td></tr>
<tr><td>Beta(0.5,0.5)</td><td colspan="4">SOB</td></tr>
<tr><td>Beta(5,1)</td><td colspan="4" rowspan="3">Bt</td></tr>
<tr><td>Gamma(6,1)</td></tr>
<tr><td>Gamma(1,1)</td></tr>
<tr><td>Gamma(0.5,1)</td><td colspan="3" rowspan="2">BS</td><td colspan="4" rowspan="2">Bt</td></tr>
<tr><td>Lognormal(0,1)</td></tr>
</table>

เนื่องจากคุณสมบัติของบูตสแตรปนั้น เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา (Consistency) อยู่แล้ว ดังนั้นเมื่อขนาดตัวอย่าง n ลู่เข้าสู่ ∞ แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานลู่เข้าสู่ 0 ซึ่งจะส่งผลให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงสั้นเสมอ แต่มีข้อเสียคือการคำนวณที่ค่อนข้างยุ่งยากและไม่มีรูปแบบที่ชัดเจน (Implicit Formula) ในขณะที่วิธีของวิธีการประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่าพิสัยควอร์ไทล์ด้วยการประมาณการแจกแจง ไม่ยุ่งยากนัก อีกทั้งมีรูปแบบการคำนวณที่ชัดเจน (Explicit Formula) และง่ายกว่า

เอกสารอ้างอิง

[1] R Development Core Team (2012). *R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/.

[2] S.S. Wilks, *Nonparametric Statistical Inference,* New York: Wiley, 1959.

[3] A. Stuart and D.G. Ord, *Ke.ndalls' Advanced Theory of Statistics,* Volume I: Distribution Theory. Sixth ed., London: Edward Arnold, 1994.

[4] T.P. Hettmansperger and J.W. McKean, *Robust Nonparametric Statistical Methods,* London: Wiley, 1998.

[5] R.M. Price and D.G. Bontt, "Estimating the variance of the sample median," *J. Statist. Comput. Simulation*, vol.68, pp. 295-305, 2001.

[6] D.G. Bonett, "Confidence interval for a coefficient of quartile variation," *Comput. Statist. Data Anal*, pp.2953-2957, 2006.

[7] B. Efron, and R.J. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*, U.K.: Chapman & Hall, 1993.