



การจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันและการบรรจุที่มีประสิทธิภาพ

ภาวัญ ธิยาพันธ์* และ อาทิตย์ อินทรสิทธิ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0-7331-2179 อีเมล: pakwan.r@psu.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2017.03.017

รับเมื่อ 28 มีนาคม 2559 ตอรับเมื่อ 3 สิงหาคม 2559 เผยแพร่ออนไลน์ 31 มีนาคม 2560

© 2017 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

บทคัดย่อ

บทความวิชาการฉบับนี้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับการก่อเกิดแบบรูปตามธรรมชาติและการก่อเกิดแบบรูปที่พบในห้องปฏิบัติการ การสร้างแบบรูปควอซี ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับฟีโบนัชชีและจำนวนทองคำ การจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันและประสิทธิภาพของการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันภายใต้เงื่อนไขบางประการ จะแสดงให้เห็นว่าการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันเป็นการจัดเรียงที่มีประสิทธิภาพในแง่ที่มีเมล็ดหนาแน่น และทำให้พื้นที่ว่างเหลือน้อยที่สุด

คำสำคัญ: แบบรูป, แบบรูปควอซี, เส้นเวียนกันหอย, ลำดับฟีโบนัชชี, อัตราส่วนของทองคำ, การบรรจุ



Arrangement of Sunflower Seeds and Efficient Packing

Pakwan Riyapan* and Arthit Intarasit

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science and Technology, Prince of Songkla University, Pattani Campus, Pattani, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0-7331-2179, E-mail: pakwan.r@psu.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2017.03.017

Received 28 March 2016; Accepted 3 August 2016; Published online: 31 March 2017

© 2017 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

Abstract

In this article, we propose ideas of pattern formation in nature and in laboratories, examples of quasipattern formation, relation between Fibonacci sequence and golden number, arrangement of sunflower seeds, and efficiency of arrangement of sunflower seeds. Under some conditions, such arrangement presents the dense packing of seeds and the least free space.

Keywords: Pattern, Quasipattern, Spiral, Fibonacci Sequence, Golden Ratio, Packing

1. บทนำ

มนุษย์พยายามอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติหรือเกิดขึ้นจากการทดลองด้วยการสร้างตัวแบบหรือแบบรูปที่เหมาะสมภายใต้ข้อจำกัดหรือสมมติฐานบางประการ

นักวิทยาศาสตร์ได้สังเกตการเจริญเติบโตของเมล็ดดอกทานตะวันและพบว่า การเรียงตัวของเมล็ดดอกทานตะวันมีแบบรูปเป็นเส้นเวียนกันหอย นอกจากนี้ยังค้นพบว่าจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดบนดอกทานตะวันมีความสัมพันธ์กับลำดับฟีโบนัชชี โดยจำนวนเส้นเวียนกันหอยของการจัดเรียงเมล็ดดอกทานตะวันทั้งในทิศทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกาจะเป็นจำนวนที่เรียงต่อกันในลำดับฟีโบนัชชีอีกด้วย [1]

นักคณิตศาสตร์พยายามสร้างตัวแบบของแบบรูปเพื่ออธิบายตำแหน่งและการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันในช่วงระยะการเจริญเติบโต ในบทความวิชาการฉบับนี้จะกล่าวถึงการศึกษาตัวแบบของการสร้างแบบรูปการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันของไวเกลซึ่งพบข้อเท็จจริงที่ว่าเมื่อเลือกให้อัตราส่วนระหว่างเมล็ดที่เกิดขึ้นใหม่สองเมล็ดใดๆ เป็นอัตราส่วนทองคำ แล้วตัวแบบของไวเกลจะสามารถสร้างแบบรูปของการจัดเรียงเมล็ดดอกทานตะวันที่คล้ายกับของจริงมากที่สุด [2] การศึกษาเรื่องนี้เป็นประโยชน์ในการศึกษาและวิจัยต่อยอดในเรื่องการบรรจุสิ่งของต่างๆ ลงในภาชนะให้มีประสิทธิภาพมากที่สุดอีกด้วย

2. การก่อเกิดแบบรูป

การก่อเกิดแบบรูป (Pattern Formation) หมายถึง การศึกษาหรืออธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างที่ทำให้เกิดการจัดเรียงตัวของแบบรูป (Pattern) ในธรรมชาติ และในห้องปฏิบัติการ ตัวอย่างการก่อเกิดแบบรูปในธรรมชาติ เช่น ระลอกทราย (Sand Ripples) ที่เกิดจากลมพัดหรือคลื่นทะเลซัดเข้าฝั่ง รูปหกเหลี่ยมของรังผึ้ง การจัดเรียงแบบเส้นเวียนกันหอย (Spiral) ของเมล็ดดอกทานตะวัน ลายเป็นทางยาวบนผิวหนังของมัลลาย เป็นต้น

ส่วนตัวอย่างแบบรูปในห้องปฏิบัติการ ได้แก่ เส้น



(ก)

(ข)



(ค)

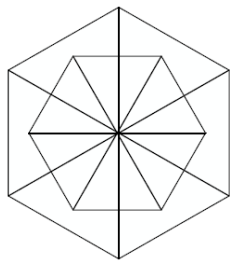
รูปที่ 1 ตัวอย่างของแบบรูป

เวียนกันหอยที่เกิดจากปฏิกิริยาทางเคมี ทัศนศาสตร์แบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Optics) ออสซิลลอนส์ (Os-Cillons) ชั้นซึ่งประกอบด้วยเม็ดเล็กๆ ที่มีการสั่น (Vi-Brated Granular Layers) หรือแบบรูปควอซี (Quasi Pattern) ในการทดลองคลื่นของฟาราเดย์ เป็นต้น ในรูปที่ 1 ได้แสดงตัวอย่างแบบรูป (ก) ออสซิลลอนส์ [3] (ข) ระลอกทราย [4] และ (ค) รูปหกเหลี่ยมของรังผึ้ง [5]

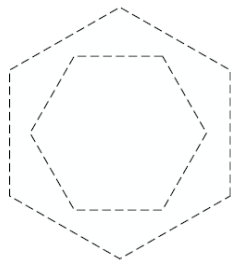
ในหัวข้อถัดไปจะยกตัวอย่างการสร้างแบบรูปควอซี ซึ่งเป็นแบบรูปที่เกิดขึ้นในการทดลองคลื่นของฟาราเดย์

3. ตัวอย่างการสร้างแบบรูปควอซี

แบบรูปควอซี หมายถึง แบบรูปที่มีลักษณะเช่นเดียวกันซ้อนทับกัน 2 ชั้น ด้วยมุมต่างๆ โดยที่แบบรูปแต่ละชั้นอาจจะมีขนาดเท่ากันหรือต่างกันได้ ในที่นี้จะกล่าวถึงแบบรูปควอซีแบบรูปหกเหลี่ยมที่ซ้อนกัน 2 ชั้น โดยเมื่อลากเส้นตรงระหว่างจุดยอดตรงกันข้ามของรูปหกเหลี่ยมแต่ละรูปแล้วจะตัดกันที่จุดเดียวกัน ดังรูป 2 (ก) เรียกรูปหกเหลี่ยมที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า 6-โฟลด์ (6-folds) ดังรูปที่ 2 (ข)

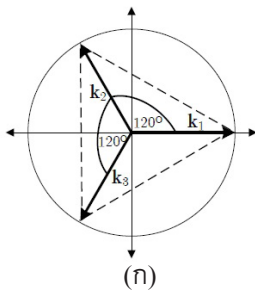


(ก)

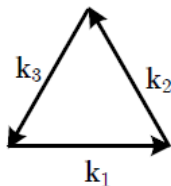


(ข)

รูปที่ 2 รูปหกเหลี่ยมซ้อนกัน 2 ชั้น



(ก)



(ข)

รูปที่ 3 เวกเตอร์ k_1, k_2 และ k_3 ที่ทำมุมต่อกันเท่ากับ 120°

ในการสร้างรูปหกเหลี่ยมซ้อนกัน 2 ชั้น ดังรูปที่ 2 มีขั้นตอนในการสร้าง 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 การสร้างรูปหกเหลี่ยมรูปภายใน

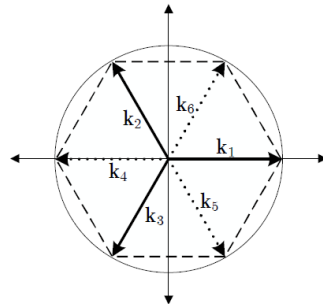
พิจารณาวงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งหมายถึงวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

ในการสร้างรูปหกเหลี่ยมจะสร้างเวกเตอร์จำนวน 3 เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วยดังนี้

กำหนดให้ k_1 ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น ณ จุดกำเนิดและมีจุดปลายอยู่ที่จุด $(1,0)$ โดยมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย

จากนั้นสร้าง k_2 ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น ณ จุดกำเนิดและทำมุม 120° กับ k_1 โดยที่ k_2 มีจุดปลายคือ $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ และสร้าง k_3 ซึ่งมีจุดเริ่มต้น ณ จุดกำเนิดเช่นเดียวกันโดยทำมุม 120° กับ k_2 และจะทำมุม 120° กับ k_1 ด้วยโดยที่ k_3 มีจุดปลาย คือ $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ ดังรูปที่ 3 (ก) แสดงตำแหน่งที่อยู่ของเวกเตอร์ k_1, k_2 และ k_3

เมื่อลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดปลายของเวกเตอร์ทั้งสามจะเกิดเป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 3 (ข) นอกจากนี้ยังได้ว่า $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ ดังรูปที่ 3 (ข)



รูปที่ 4 เวกเตอร์ $k_1, \dots, k_5$ และ k_6 ที่ก่อเกิดรูปหกเหลี่ยม

ถ้า k เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้วสังยุค (Conjugate) ของ k หมายถึงเวกเตอร์ที่มีขนาดเดียวกันกับ k แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ k

สร้าง k_4 โดยกำหนดให้เป็นสังยุคของ k_1 โดยจุดปลายของ k_4 คือ $(-1,0)$

สร้าง k_5 โดยกำหนดให้เป็นสังยุคของ k_2 โดยจุดปลายของ k_5 คือ $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$

สร้าง k_6 โดยกำหนดให้เป็นสังยุคของ k_3 โดยจุดปลายของ k_6 คือ $(1/2, -\sqrt{3}/2)$

เมื่อลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดปลายของเวกเตอร์ทั้งหมดจะได้เป็นรูปหกเหลี่ยมภายในวงกลม ดังรูปที่ 4

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างรูปหกเหลี่ยมภายนอก

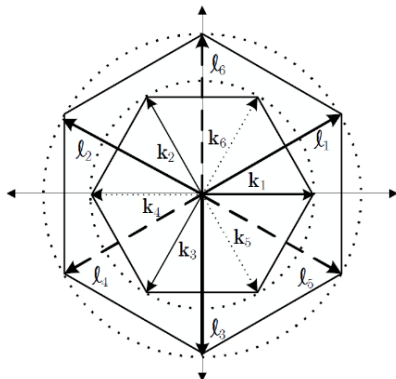
ขั้นตอนในการสร้างรูปหกเหลี่ยมซ้อนทับรูปหกเหลี่ยมที่ได้สร้างมาก่อนหน้านี้ เป็นดังนี้

พิจารณาวงกลมที่มีรัศมี q หน่วยโดยที่ $q > 1$ ซึ่งหมายถึง วงกลมซ้อนทับนอกวงกลมรัศมี 1 หน่วยก่อนหน้านี้

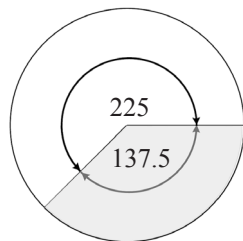
กำหนดให้ l_1 เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด q หน่วย โดยมีจุดเริ่มต้น ณ จุดกำเนิดและทำมุมกับเวกเตอร์ k_1 เท่ากับ 30° ซึ่งมีจุดปลายอยู่ที่ $(\sqrt{3}q/2, q/2)$

ต่อไปสร้างเวกเตอร์ l_2 เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด q หน่วย โดยมีจุดเริ่มต้น ณ จุดกำเนิด และทำมุม 120° กับเวกเตอร์ l_1 ซึ่งมีจุดปลายอยู่ที่ $(\sqrt{3}q/2, q/2)$

สร้างเวกเตอร์ l_3 เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด q หน่วย โดยมีจุดเริ่มต้น ณ จุดกำเนิด และทำมุม 120° กับเวกเตอร์ l_2 หรือ l_1 ซึ่งจะได้ $(0, -q)$ เป็นจุดปลายของ l_3 ต่อจากนั้นสร้างเวกเตอร์ l_4 โดยกำหนดให้เป็นสังยุคของเวกเตอร์ l_1 จึงได้ $(-\sqrt{3}q/2, -q/2)$ เป็นจุดปลาย



รูปที่ 5 รูปหกเหลี่ยม 2 รูปที่ซ้อนทับกันซึ่งก่อเกิดจาก
เวกเตอร์ทั้ง 12 เวกเตอร์



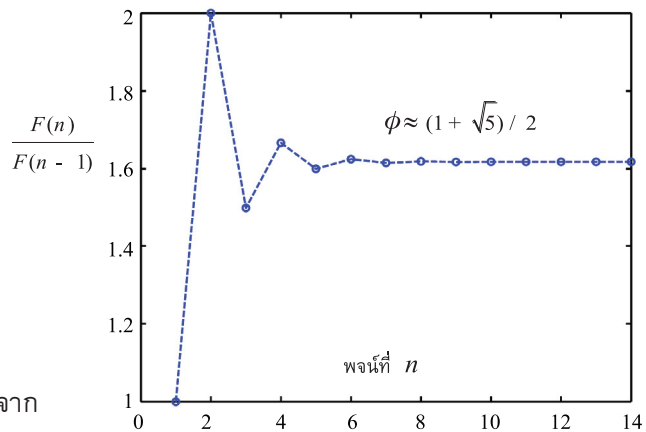
รูปที่ 6 มุมทองคำและส่วนโค้งของรูปวงกลม

ของ l_4 และสร้างเวกเตอร์ l_5 โดยกำหนดให้เป็นสังยุคของ
เวกเตอร์ l_2 ซึ่งจะได้ $(\sqrt{3}q/2, q/2)$ เป็นจุดปลายของ l_5
ท้ายสุดสร้างเวกเตอร์ l_6 โดยกำหนดให้เป็นสังยุค
ของเวกเตอร์ l_3 ซึ่งจะได้ $(0, q)$ เป็นจุดปลายของ l_6

เมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดปลายของเวกเตอร์
ทั้ง 6 นี้ ดังรูปที่ 5 จะเกิดเป็นรูปหกเหลี่ยมรูปใหม่ซ้อน
ทับรูปหกเหลี่ยมรูปแรก ซึ่งรูปที่แสดงในรูปที่ 5 คือ รูปที่
ได้กล่าวไปแล้วในรูปที่ 2 (ก)

4. ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับฟีโบนัชชีและจำนวน ทองคำ

เลโอนาร์โด ฟีโบนัชชี (Leonardo Fibonacci)
นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีในยุคกลางที่รู้จักในชื่อว่า
ฟีโบนัชชีได้ศึกษาการเพิ่มขึ้นของจำนวนของกระต่าย
ภายใต้สมมติฐานเชิงอุดมคติบางประการ พบว่าจำนวน
กระต่ายรุ่นต่อรุ่นอยู่ในรูปของลำดับที่รู้จักกันในเวลา
ต่อมาว่า ลำดับฟีโบนัชชี โดยจะเรียกตัวเลขในลำดับ
ฟีโบนัชชีว่า จำนวนฟีโบนัชชี



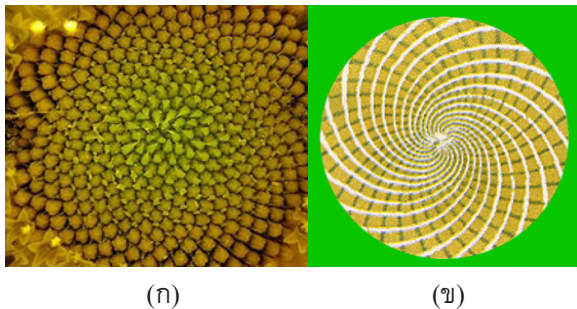
รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของจำนวน
ฟีโบนัชชีและอัตราส่วนทองคำ

จำนวนฟีโบนัชชีในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด
นิยามดังนี้ จำนวนฟีโบนัชชีตัวใหม่เกิดจากผลรวม
ของสองพจน์ก่อนหน้า เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $F(0) = 0$,
 $F(1) = 1$ และ $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ เมื่อ $n = 2, 3, 4, \dots$

ลำดับฟีโบนัชชีที่ประกอบด้วยจำนวนฟีโบนัชชี 14
ตัวแรกเป็นดังนี้ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144
และ 233

เมื่อสร้างลำดับใหม่ที่เกิดจากเศษส่วนของจำนวน
ฟีโบนัชชีที่อยู่ในรูปของ ผลหารของจำนวนฟีโบนัชชี
ใดๆ กับพจน์ก่อนหน้า เช่น $8/5$, $13/8$ และ $21/13$ แล้ว
จะมีแนวโน้มเข้าใกล้ลิมิตจำกัด เมื่อจำนวนฟีโบนัชชีมีอยู่
เป็นจำนวนมาก นั่นคือเมื่อกำหนดให้ $\phi_n = F(n)/F(n-1)$
แล้ว $\phi_n \rightarrow \phi$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ โดยที่ $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$
เรียกจำนวนนี้ว่าจำนวนทองคำ (Golden Number) ซึ่ง
รู้จักกันในการศึกษาของชาวกรีกในเรื่องสัดส่วนและ
เรขาคณิตของรูปห้าเหลี่ยมปกติ

ถ้าแบ่งส่วนโค้งของรูปวงกลมออกเป็น 2 ส่วนโค้ง
โดยให้ความยาวของส่วนโค้งทั้งสองเป็นสัดส่วนของ
จำนวนทองคำ แล้วมุมในส่วนโค้งที่มีความยาวที่สั้นกว่า
เป็น 137.5° ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(3 - \sqrt{5})\pi$ เรเดียน มุมดังกล่าวนี้
รู้จักและเรียกกันว่า มุมทองคำ (Golden Angle) รูปที่ 6
แสดงมุมทองคำและส่วนโค้งของรูปวงกลม รูปที่ 7
แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของจำนวนฟีโบนัชชี
และอัตราส่วนทองคำ



(ก)

(ข)

รูปที่ 8 (ก) เส้นเวียนกันหอยแบบฟีโบนัชชีของการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวัน [6] (ข) รูปเส้นเวียนกันหอย เส้นที่บิดามีทิศตามเข็มนาฬิกา ส่วนเส้นโปร่งขาวมีทิศตามเข็มนาฬิกา [7]

5. แบบรูปการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวัน

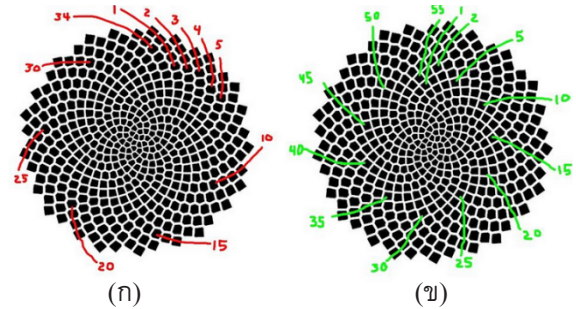
ฟีลโลแทกซิส (Phyllotaxis) หมายถึง การจัดเรียงสลับใบ เป็นการศึกษาทฤษฎีการศาสตร์ของการจัดเรียงตัวของ Phylla ซึ่งได้แก่ ใบ กลีบดอก และเมล็ด เป็นต้น เมื่อย้อนกลับไปราวสี่ร้อยปีก่อน นักดาราศาสตร์ชาวเยอรมันนาม โยฮันเนส เคปเลอร์ (Johannes Kepler) ได้สังเกตแบบรูปแบบเส้นเวียนกันหอย (Spiral Pattern) ในพืช แต่ไม่ได้ให้คำอธิบายแบบรูปดังกล่าวนี้เป็นที่น่าพอใจจนถึงในปัจจุบัน

เส้นเวียนกันหอยที่เกิดจากการเรียงตัวของ Phylla ก่อให้เกิดแบบรูปที่โดดเด่นในพืช ตัวอย่างเช่น แบบรูปแบบเกลียว (Helical Pattern) ซึ่งสามารถพบได้จากการเรียงตัวของใบซึ่งพันและม้วนรอบลำต้น

จำนวนเส้นเวียนกันหอยแบบเกลียว (Helical Spiral) บนเปลือกสับประรดในทิศตามเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกาจะเป็นจำนวนที่อยู่ในลำดับฟีโบนัชชีที่เรียงต่อกัน

นอกจากนี้จะสามารถพบแบบรูปแบบเส้นเวียนกันหอยได้บนกลีบดอกและเมล็ดดอกทานตะวัน ดังเช่นรูปที่ 8 (ก) ซึ่งจำนวนเส้นเวียนกันหอยทั้งแบบทวนและตามเข็มนาฬิกาจะเป็นจำนวนที่เรียงต่อกันในลำดับฟีโบนัชชีด้วยเช่นกัน ดังรูปที่ 8 (ข)

ในรูปที่ 9 แสดงตัวอย่างจำนวนเส้นเวียนกันหอยของเมล็ดดอกทานตะวันในทิศตามเข็มนาฬิกา (ก) เท่ากับ



(ก)

(ข)

รูปที่ 9 (ก) เส้นเวียนกันหอยในทิศตามเข็มนาฬิกา (ข) เส้นเวียนกันหอยในทิศตามเข็มนาฬิกา [8]

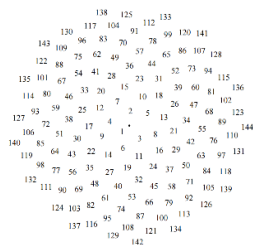
34 เส้น และในทิศตามเข็มนาฬิกา (ข) เท่ากับ 55 เส้น จะเห็นว่าตัวเลขสองตัวนี้เป็นจำนวนในลำดับฟีโบนัชชี โดยที่ตัวเลขทั้งสองนี้จะเรียงต่อกันเสมอ

เป็นเวลานานมาแล้วที่นักชีววิทยาได้อธิบายถึงการจัดเรียงตัวของ Phylla แต่ในช่วงเวลานั้นก็ยังเป็นการยากที่จะอธิบายถึงเหตุผลของการเกิดแบบรูปเหล่านั้น ความก้าวหน้าในปัจจุบันทำให้สามารถอธิบายถึงเหตุผล

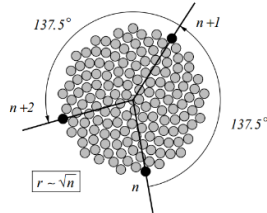
ดังกล่าวได้แล้ว เช่น การอธิบายฟีลโลแทกซิสแบบคลาสสิก (Classical Explanation) โดยอาศัยหลักการของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization Principle) เพื่อให้คำอธิบายของฟีลโลแทกซิส แต่ไม่ได้หาค่าที่เหมาะสมที่สุดแต่อย่างใด หลักการดังกล่าวจะขออธิบายด้วยตัวอย่างการจัดเรียงเมล็ดดอกทานตะวัน ดังนี้

ในระยะเริ่มต้นเมล็ดของดอกทานตะวันจะกระจุกตัวอยู่ที่ยอดดอก (Capitulum) เมื่อเมล็ดเจริญเติบโตจะขยายออกจากศูนย์กลางของยอดดอก เมล็ดที่เกิดขึ้นใหม่จะเกิดขึ้น ณ ตำแหน่งศูนย์กลางของยอดดอกด้วยมุมเดียวกันกับเมล็ดที่เจริญก่อนหน้านี้ ซึ่งจะถูกผลักออกไปจากศูนย์กลางของยอดดอก กลไกของการเจริญเติบโตดังกล่าวนี้เป็นการจัดเรียงเมล็ดซึ่งเป็นตัวอย่างหนึ่งในการบรรจุสิ่งของ (Packing) ที่มีประสิทธิภาพในสองประการดังนี้ สามารถบรรจุสิ่งของได้จำนวนมากอย่างมีนัยสำคัญและเหลือพื้นที่เมื่อได้บรรจุสิ่งของอยู่น้อย

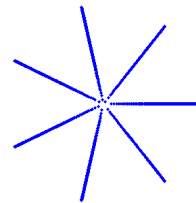
ในปี ค.ศ. 1979 เฮลมุท ว็อลเกิล (Helmut Vogel) [9] ได้อธิบายการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวัน



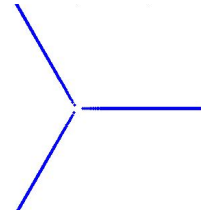
(ก)



(ข)



(ก)



(ข)

รูปที่ 10 (ก) ตำแหน่งของเมล็ดดอกทานตะวันจำนวน

รูปที่ 11 เมล็ดของดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นใหม่ เมื่อจัดเรียงด้วยมุม (ก) $\varphi = 360^\circ/7$ และ (ข) $\varphi = 360^\circ/3$ ตามลำดับ

โตเต็มที่โดยใช้หลักการคณิตศาสตร์อย่างง่าย เขาได้หาตำแหน่งของเมล็ดดอกทานตะวันเมล็ดที่ n โดยใช้พิกัดเชิงขั้ว (r, θ) โดยที่

$$r(n) = c\sqrt{n} \text{ และ } \theta(n) = n\varphi \quad (1)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ n หมายถึงลำดับการเจริญเติบโตของเมล็ดโดยเริ่มนับลำดับจากจุดศูนย์กลางขยายออกไป r เป็นระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลาง θ เป็นมุมระหว่างเมล็ดดอกทานตะวันกับแกนเชิงขั้วที่เริ่มต้น ณ ศูนย์องศา c เป็นสเกลที่เป็นค่าคงที่ และ φ เป็นมุมระหว่างเมล็ดที่เกิดขึ้นใหม่และเมล็ดที่ใกล้เคียงกับเมล็ดที่เกิดขึ้นใหม่นั้น

ในกรณีที่ $\varphi = 137.5^\circ$ ซึ่งคือมุมทองคำแล้วในรูปที่ 10 (ก) จะแสดงลำดับของตัวเลขการเจริญเติบโตของเมล็ดดอกทานตะวันโดยที่เมล็ดสองเมล็ดใดๆ ที่เจริญเติบโตตามลำดับจะทำมุม 137.5° ดังรูปที่ 10 (ข)

สมมติให้เมล็ดดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นใหม่ขยายออกจากศูนย์กลางของยอดดอก โดยหมุนด้วยมุมเท่ากับผลคูณของ $1/7$ กับ 360° นั่นคือ เมื่อแทนค่า $\varphi = 360^\circ/7$ ใน (1) ตามข้อสมมตินี้ เมล็ดดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นใหม่จะเรียงตัวในแนวเส้นตรงจำนวน 7 เส้น ดังรูปที่ 11 (ก)

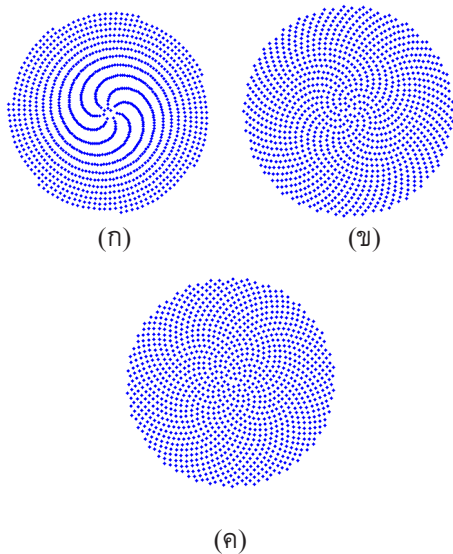
ทำนองเดียวกัน ถ้าสมมติให้เมล็ดของดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นใหม่ขยายออกจากศูนย์กลางของยอดดอก โดย

หมุนด้วยมุมเท่ากับจำนวนตรรกยะคูณกับ 360° แล้วเมล็ดของดอกทานตะวันจะถูกบรรจุในแนวเส้นตรงเช่นกัน ตัวอย่างเช่น เมื่อเลือกให้ φ ใน (1) เท่ากับผลคูณ $1/3$ กับ 360° แล้วเมล็ดดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นใหม่จะถูกบรรจุในแนวเส้นตรงจำนวน 3 เส้น ดังรูปที่ 11 (ข)

ทำนองเดียวกัน ถ้าสมมติให้เมล็ดของดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นใหม่ขยายออกจากศูนย์กลางของยอดดอก โดยหมุนด้วยมุมเท่ากับผลคูณของจำนวนอตรรกยะกับ 360° แล้วเมล็ดของดอกทานตะวันจะถูกบรรจุเส้นเวียนกันหอยเป็นเส้นโค้ง ซึ่งจะใกล้เคียงกับลักษณะที่ปรากฏตามธรรมชาติ ในกรณีที่ผลคูณของจำนวนดังกล่าวนี้ (จำนวนอตรรกยะคูณด้วย 360°) มีค่าเกินกว่า 360° แล้วจะพิจารณาค่าดังกล่าวจาก mod 360

ตัวอย่างเช่น เมื่อเลือกให้ φ ใน (1) เท่ากับผลคูณของ π กับ 360° จะได้ $\varphi = 360^\circ \pi$ ดังนั้นจึงพิจารณา $360^\circ \pi \pmod{360^\circ}$ ซึ่งมีค่าโดยประมาณเท่ากับ 50.4° และเมื่อเลือกให้ φ ใน (1) เท่ากับผลคูณของ $\sqrt{2}$ กับ 360° จะได้ $\varphi = 360^\circ \sqrt{2}$ ดังนั้นจึงพิจารณา $360^\circ \sqrt{2} \pmod{360^\circ}$ ซึ่งมีค่าโดยประมาณเท่ากับ 147.6° รูปที่ 12 แสดงการบรรจุของเมล็ดดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นทั้งสองกรณีนี้ในรูป (ก) และ (ข) ตามลำดับ

ในรูปที่ 12 จะเห็นได้ว่าในกรณีที่เลือกให้ φ ใน (1) เท่ากับผลคูณของ $\sqrt{2}$ กับ 360° การบรรจุของเมล็ดดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นใหม่จะมีความหนาแน่นมากขึ้น แต่เมล็ดดอกทานตะวันยังคงกระจายอย่างไม่เหมาะสม อย่างไรก็ตามเมื่อเลือกให้ φ ใน (1) เท่ากับผลคูณ



รูปที่ 12 เมล็ดดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นใหม่ เมื่อถูกบรรจุด้วยมุม (ก) $\phi = 360^\circ \pi$ (ข) $\phi = 360^\circ \sqrt{2}$ และ (ค) $\phi \approx 137.5^\circ$ ตามลำดับ

ของ $\phi := (1 + \sqrt{5})/2$ กับ 360° แล้วจะได้ $\phi = 360^\circ \phi$ เมื่อพิจารณา $360^\circ \phi \pmod{360}$ ซึ่งมีค่าโดยประมาณเท่ากับ 137.5° แล้วการบรรจุของเมล็ดดอกทานตะวันที่เกิดขึ้นจะมีประสิทธิภาพมากขึ้น และมีลักษณะคล้ายกับการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันตามธรรมชาติมากที่สุด ดังรูปที่ 12 (ค)

นอกจากจะสามารถอธิบายการจัดเรียงของเมล็ดดอกทานตะวันที่โตเต็มที่โดยใช้พิกัดเชิงขั้ว (r, θ) ตามตัวแบบ (1) แล้ว Ridley [2] ได้เสนอตัวแบบไวเกลอีกรูปแบบหนึ่ง ดังนี้

ในรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน โดยที่แทนค่า $c = 1$ และ $\phi = 2\pi\delta$ ใน (1)

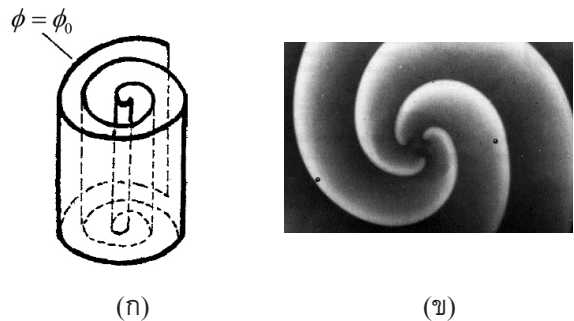
เมื่อกำหนดให้ $z = x + iy$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ

$$x = r \cos(2\pi n\delta) \text{ และ } y = r \sin(2\pi n\delta)$$

แล้ว

$$z = \sqrt{n}(\cos 2\pi n\delta + i \sin 2\pi n\delta) = \sqrt{n} \exp(2\pi n\delta i)$$

ดังนั้น พิกัดของเมล็ดบนดอกทานตะวัน ณ ตำแหน่งต่างๆ เขียนในรูปของเซต ดังนี้



รูปที่ 13 (ก) เส้นเวียนกันหอยใน 3 มิติ (ข) เส้นเวียนกันหอยใน 3 มิติที่เกิดขึ้นจากการทดลองของปฏิกิริยา

$$\{\sqrt{n} \exp(2\pi n\delta i) \mid n = 1, 2, 3, \dots\} \quad (2)$$

โดยที่ $\delta = g^2$ เมื่อ $g = (1 + \sqrt{5})/2$ ซึ่งเป็นจำนวนทองคำและ $g^2 = g + 1 = 1 / (2 - g)$ เรียกมุม $2\pi\delta$ ว่ามุมไดเวอร์เจนซ์ (Divergence Angle) ในกรณีนี้ที่ $2\pi g^2 \approx 137.5^\circ$ จะเรียกว่ามุมฟีโบนัคซี (Fibonacci Angle) ในตัวแบบนี้มีข้อสมมติ 2 ประการดังนี้

1) เมื่อมองจากมุมสูงจะพบว่า เมล็ดทุกเมล็ดบนดอกทานตะวันมีลักษณะเป็นรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน โดยกำหนดให้แต่ละเมล็ดมีพื้นที่เท่ากับ π ตารางหน่วย ดังนั้นเมล็ดของดอกทานตะวันจึงมีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย

2) เมล็ดของดอกทานตะวันที่เรียงติดกันจากจุดกำเนิดจะทำมุมขนาดเท่ากัน เท่ากับ $2\pi\delta$ เรเดียนหรือ 137.5°

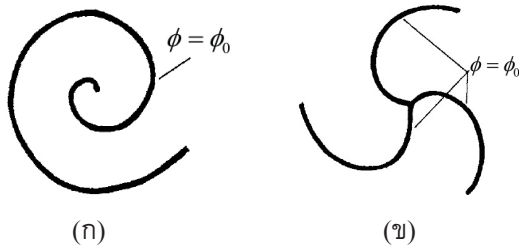
6. แบบรูปเส้นเวียนกันหอย

ในหัวข้อนี้จะได้ศึกษาแบบรูปเส้นเวียนกันหอยที่เกิดมาจากคลื่นแบบเส้นเวียนกันหอย (Spiral Wave)

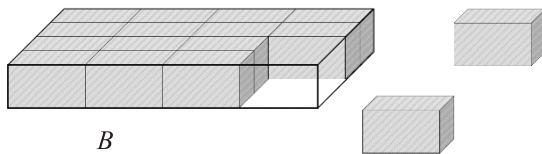
Murray [12] ได้อธิบายว่า คลื่นแบบเส้นเวียนกันหอยที่เกิดขึ้นจากปฏิกิริยา Belousov–Zhabotinskii ขึ้นกับปัจจัย 3 ประการ คือ การหมุน คาบของเวลา และโครงสร้างเชิงพื้นที่ที่เกี่ยวข้องกับความเข้มข้นของตัวทำปฏิกิริยา

รูปที่ 13 (ก) แสดงเส้นเวียนกันหอยใน 3 มิติ และ (ข) แสดงเส้นเวียนกันหอยใน 3 มิติที่เกิดขึ้นจากการทดลองของปฏิกิริยา Belousov–Zhabotinskii

การสร้างตัวแบบที่ทำให้เกิดแบบรูปแบบเส้นเวียน



รูปที่ 14 (ก) เส้นเวียนกันหอยแบบ 1 แขน (ข) เส้นเวียนกันหอยแบบ 3 แขน [12]



รูปที่ 15 การบรรจุวัตถุรูปสี่เหลี่ยมลงในกล่องรูปสี่เหลี่ยม B

กันหอยนี้จะอธิบาย ความเข้มข้นของตัวทำปฏิกิริยาด้วยฟังก์ชันเฟส (Phase) ϕ ในระบบพิกัดเชิงขั้วที่มี r เป็นรัศมี และ θ เป็นมุม

การหมุนอย่างง่ายของเส้นเวียนกันหอยจะอยู่ในรูปฟังก์ชันคาบของฟังก์ชันเฟส ϕ ดังนี้

$$\phi = \Omega t \pm m\theta + \psi(r) \quad (3)$$

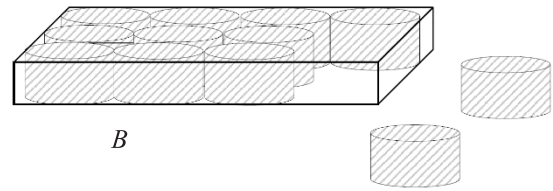
โดยที่ Ω คือความถี่ m คือจำนวนของแขนบนเส้นเวียนกันหอย $\psi(r)$ คือฟังก์ชันที่ระบุชนิดหรือลักษณะของเส้นเวียนกันหอยที่จะปรากฏ เครื่องหมาย $\pm$ เป็นตัวกำหนดทิศทางของการหมุน รูปที่ 14 แสดงเส้นเวียนกันหอยแบบ 1 และ 3 แขน ตามลำดับ

ในกรณีที่ $\phi = 0$ ในสถานะนิ่งเมื่อกำหนดให้ $t = 0$ เส้นเวียนกันหอยที่มี 1 แขนโดยให้ $m = 1$ แล้วแบบรูปของเส้นเวียนกันหอย (3) จะอยู่ในรูป $\psi(r) = \theta$

ถ้าให้

$$\theta = ar \quad \text{และ} \quad \theta = a \ln r \quad (4)$$

เมื่อ $a > 0$ แล้วจะได้เส้นเวียนกันหอยแบบอาร์คิมิดีส



รูปที่ 16 การบรรจุวัตถุรูปวงกลมลงในกล่องรูปสี่เหลี่ยม B

[รูปที่ 14 (ก)] และเส้นเวียนกันหอยแบบลอการิทึม [รูปที่ 14 (ข)]

ในกรณีที่เส้นเวียนกันหอยที่มีแกนกลางที่ r_0 จะมีรูปแบบดังนี้

$$\theta = a(r - r_0) \quad \text{และ} \quad \theta = a \ln(r - r_0) \quad (5)$$

7. การบรรจุที่มีประสิทธิภาพ (Efficient Packing)

โดยทั่วไปแล้ววิธีการบรรจุสิ่งของใดๆ นั้นจะขึ้นกับลักษณะของสิ่งของนั้นๆ ตัวอย่างเช่น จะบรรจุวัตถุที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมให้ชิดกันมากที่สุดด้วยการบรรจุลงในกล่องรูปสี่เหลี่ยม B ดังรูปที่ 15

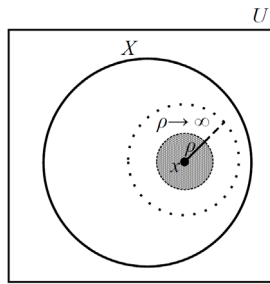
แต่ถ้าต้องการบรรจุวัตถุที่มีลักษณะเป็นรูปวงกลมลงในกล่องรูปสี่เหลี่ยม B ดังรูปที่ 16 ในกรณีนี้จะสามารถบรรจุได้ดีที่สุดด้วยการบรรจุวัตถุด้วยการจัดเรียงแบบเป็นรูปหกเหลี่ยม

ในทางคณิตศาสตร์อธิบายการบรรจุที่มีประสิทธิภาพได้ดังนี้

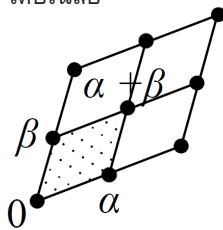
กำหนดให้ X เป็นเซตนับได้อย่างอนันต์โดยที่ $X \subset U$ ซึ่ง U เป็นระนาบ เราจะกล่าวว่าการบรรจุที่ใช้พื้นที่ซึ่งเท่ากัน (Equal-area Packing) ถ้าจำนวนสมาชิก $x \in X$ ซึ่ง $|x| < \rho$ โดยที่ $\rho > 0$ มีค่าเข้าใกล้ A^* / A เมื่อ $\rho \rightarrow \infty$ สำหรับค่าคงที่ A บางตัวโดยที่ A^* คือพื้นที่ของ X และ A คือพื้นที่โดยเฉลี่ย (Average Area) ของบริเวณที่ $x \in X$ ซึ่งได้ว่า

$$A = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\pi \rho^2}{\#\{x \in X : |x| < \rho\}} \quad (6)$$

โดยที่ $\#$ หมายถึง จำนวนสมาชิกของเซต ในรูปที่ 17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง U, X วงกลม $|x| < \rho$ และพื้นที่



รูปที่ 17 ความสัมพันธ์ระหว่าง U, X วงกลม และพื้นที่ $|x| < r$ โดยเฉลี่ย



รูปที่ 18 แลตทิซปกติ

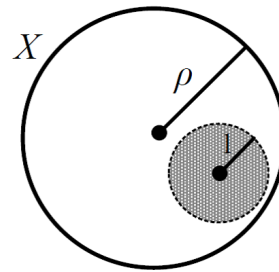
โดยเฉลี่ย A ซึ่งคือบริเวณที่แรง

ตัวอย่างเช่น แลตทิซปกติ (Regular Lattice) ใดๆ $\{m\alpha + n\beta : m, n \in \mathbb{Z}\}$ โดยที่ α และ β เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ α/β ไม่เป็นจำนวนจริง แล้วสำหรับการบรรจุที่ใช้พื้นที่ซึ่งเท่ากันจะได้ว่า A เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (แรง) ที่มีจุดยอดทั้งสี่คือ $0, \alpha, \beta$ และ $\alpha + \beta$ ดังรูปที่ 18

เมื่อพิจารณาในกรณีของการเจริญเติบโตของเมล็ดดอกทานตะวัน X ที่มีรูปร่างเป็นจาน (Disc) ในระนาบ $\mathbb{R}^2$ Vogel [9] ได้แสดงว่า มีจำนวนจุดบนเส้นเวียนกันหอยเท่ากับ $[\rho^2]$ โดยที่ $[\cdot]$ คือจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดแล้วหาพื้นที่โดยเฉลี่ยที่เมล็ดดอกทานตะวัน A จาก (6) ได้ว่า

$$A = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\pi \rho^2}{\#\{x \in X : |x| < \rho\}} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\pi \rho^2}{[\rho^2]} = \pi$$

โดยที่ย่านใกล้เคียง (Neighbourhood) ของแต่ละเมล็ดมีค่าเท่ากัน นั่นคือ เมื่อพิจารณาการเจริญเติบโตของเมล็ดดอกทานตะวันในระยะเริ่มต้นที่มีลักษณะเป็นเส้นเวียนกันหอยสำหรับมุมไวดอร์เจนซ์ใดๆ แล้วการบรรจุที่ใช้จะเป็นแบบพื้นที่ซึ่งเท่ากันโดยแต่ละเมล็ด



รูปที่ 19 ดอกทานตะวันที่บรรจุเมล็ดที่มีพื้นที่ซึ่งเท่ากันขนาด π ตารางหน่วย

จะมีพื้นที่เท่ากับขนาด π ตารางหน่วยโดยพิจารณาให้ดอกทานตะวันมีรูปร่างเป็นจานในระนาบ 2 มิติ ดังรูปที่ 19

ถ้าเซต X มีการบรรจุแบบพื้นที่ซึ่งเท่ากันแล้วในกรณีทั่วไปสมาชิกใน X จะมีการกระจายตัวเท่าๆ กันในระนาบ แต่ในกรณีเฉพาะจะมีการบรรจุอย่างหนาแน่นในบางบริเวณ ส่วนในบริเวณที่เหลือมีการบรรจุอย่างเบาบาง การบรรจุอย่างมีประสิทธิภาพจะหมายถึงมีการผันแปรระหว่างบริเวณที่มีการบรรจุอย่างหนาแน่นกับการบรรจุอย่างเบาบางเป็นจำนวนน้อย

Ridley [2] ได้นิยามประสิทธิภาพของการบรรจุ η ของเซต X ดังนี้

$$\eta = A^{-1} \inf\{|x - y|^2 : x, y \in X, x \neq y\}$$

เมื่อ A หาค่าได้

การบรรจุจะมีประสิทธิภาพมากขึ้นถ้า η มีค่ามาก ในหัวข้อที่ 5 ได้ทราบแล้วว่า การบรรจุที่มีประสิทธิภาพจะเกิดขึ้นเมื่อมุมไวดอร์เจนซ์เป็นจำนวนอตรรกยะและจะมีประสิทธิภาพที่เหมาะสมที่สุดเมื่อมุมไวดอร์เจนซ์เป็นมุมทองคำหรือเป็นมุมฟีโบนัชชีด้วยตัวอย่างประสิทธิภาพของการบรรจุ η [2] ดังนี้

- 1) เมื่อประมาณมุมไวดอร์เจนซ์ด้วยจำนวนตรรกยะ โดยเลือก $\delta = 21/55$ แล้วจะได้ $\eta = 0$
- 2) เมื่อประมาณมุมไวดอร์เจนซ์ด้วยจำนวนอตรรกยะ โดยเลือก $\delta = (155 + \sqrt{13})/414$ แล้วจะได้ $\eta < 0.56$
- 3) เมื่อประมาณมุมไวดอร์เจนซ์ด้วยจำนวนทองคำ โดยเลือก $\delta = g^2$ แล้วจะได้



$$\eta = (5 - 4\cos 6\pi g^2) / \pi \approx 0.8169$$

จากทั้ง 3 กรณี พบว่ากรณี 3) ให้ค่า η มากที่สุด ดังนั้นจึงมีการบรรจุที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

8. สรุป

การจัดเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันที่เกี่ยวข้องกับจำนวนทองคำ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่ามุมของเมล็ดดอกทานตะวันที่เรียงติดกันจากจุดกำเนิดเป็นมุมฟีโบนัชชีแล้ว การจัดเรียงเมล็ดดอกทานตะวันเป็นการจัดเรียงที่มีประสิทธิภาพในแง่ที่มีเมล็ดหนาแน่นและเกิดที่ว่างน้อยที่สุด ในบทความวิชาการฉบับนี้ได้ศึกษาการจัดเรียงเมล็ดดอกทานตะวันตามที่กล่าวมา อีกทั้งยังเป็นแนวคิดพื้นฐานในการแก้ปัญหาการบรรจุสิ่งของต่างๆ อีกด้วย

เอกสารอ้างอิง

- [1] R. V. Jean, *Phyllotaxis: A systemic study in plant morphogenesis*. USA: Cambridge, 1994.
- [2] J. Ridley, "Packing efficiency in sunflower heads," *Mathematical Biosciences*, vol.58. no.1, pp. 129–139, 1982.
- [3] Blaze Labs. (2015, September 10). From waves to particles by standing waves in space. [Online]. Available: <http://www.blazelabs.com/f-p-oscillon.asp>
- [4] A. Cook. (2015, November 11). Sand dunes and ripples in Death Valley National Park. [Online]. Available: <http://www.rockymtnrefl.com/DeathValleyRip/plescd47322.html>
- [5] Bees and honeycomb 21462. (2014, November 20). Bees and honeycomb 21462. [Online]. Available: <http://www.freegreatpicture.com/animal-collection/bees-and-honeycomb-21462>
- [6] C. Junell. (2007, July 16). Sunflower Spiral. [Online]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sunflower_Spiral.jpg
- [7] Fibonacci and Nature. (2015, November 21). Fibonacci and Nature. [Online]. Available: <http://www.murderousmaths.co.uk/books/BKMM8xgr.htm>
- [8] Liaisonwithalison. (2015, November 24). Fibonacci Sequence. [Online]. Available: <https://liaisonwithalison.wordpress.com/2015/03/24/fibonacci-sequence/>
- [9] H. Vogel, "A better way to construct the sun flower head," *Mathematical Biosciences*, vol. 44, no. 3–4, pp.179–189, June 1979.
- [10] H. Segerman, "The sunflower spiral and the Fibonacci metric," in *Proceedings of Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, pp. 483–486, 2010.
- [11] J. S. Hanan, F.D. Fracchia, D. Fowler, M. J. M. de Boer, and L. Mercer, *The Algorithmic Beauty of Plants*. New York : Springer-Verlag, 1990.
- [12] J. D. Murray, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications (Interdisciplinary Applied Mathematics)* (v.2), 3rd ed. USA: Springer-Verlag, 2002.

