



การทดสอบจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและจลนศาสตร์แบบผกผันของหุ่นยนต์แขนกล 6 แกน (Staubli RX 90)

เบญจมาศ พนมรัตน์รักษ์* และ วิจักขณ์ พรสุขวิฑูร

ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุมและเครื่องมือวัด คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

จตุรพัฒน์ ภัควินิตย์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08-4134-5050 อีเมล: benjamas.pan@kmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2017.03.013

รับเมื่อ 16 มีนาคม 2559 ดอกรับเมื่อ 7 กรกฎาคม 2559 เผยแพร่ออนไลน์ 31 มีนาคม 2560

© 2017 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

บทคัดย่อ

ในการสั่งงานหุ่นยนต์แขนกลให้มีการเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ต้องการนั้น สามารถป้อนพิกัดจุดปลายทางเข้าไปให้หุ่นยนต์แขนกลทำการคำนวณมุมในแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์เพื่อเคลื่อนที่ไปยังพิกัดที่สั่งงานได้โดยตรง หรือสามารถป้อนชุดคำสั่งของมุมในแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์เพื่อให้หุ่นยนต์เคลื่อนที่ไปในพิกัดที่ต้องการได้ งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาและทดสอบจลนศาสตร์แบบผกผันเพื่อคำนวณค่าของมุมในแต่ละข้อต่อเมื่อทำการสั่งงานให้หุ่นยนต์แขนกลเคลื่อนที่ไปในพิกัดที่ต้องการ และจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าเพื่อคำนวณพิกัดจุดปลายทางจากการสั่งงานหุ่นยนต์ ขั้นตอนการทำงานเริ่มจากการป้อนค่าของมุมในแต่ละข้อต่อเข้าไปยังหุ่นยนต์แขนกล Staubli RX 90 เพื่อสั่งงานให้เขียนตัวอักษรภาษาอังกฤษและทำการเก็บข้อมูลในการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในขณะที่เขียนตัวอักษรเพื่อนำมาทดสอบความถูกต้องของจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและจลนศาสตร์แบบผกผันของหุ่นยนต์แขนกลที่ได้ทำการวิเคราะห์ไว้ ผลการทดสอบพบว่าการวิเคราะห์จลนศาสตร์แบบไปข้างหน้ามีความถูกต้องเนื่องจากเมื่อทำการป้อนค่ามุมในแต่ละข้อต่อที่เก็บมาได้จากหุ่นยนต์มาคำนวณจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าจะได้ผลของการเขียนตัวอักษรภาษาอังกฤษที่คล้ายกันกับตัวอักษรภาษาอังกฤษที่หุ่นยนต์เขียนขึ้น และเมื่อทำการทดสอบจลนศาสตร์แบบผกผัน โดยนำค่ามุมที่ได้จากการเขียนตัวอักษรภาษาอังกฤษมาเปรียบเทียบกับกัน ก็พบว่าการคำนวณมุมจากจลนศาสตร์แบบผกผันในข้อต่อที่ 1-3 นั้นมีค่าความผิดพลาดในระดับ 10^{-14} องศา- 10^{-15} และข้อต่อที่ 4 และ 6 มีค่าความผิดพลาดในระดับ 0.07 และ 0.03 องศาตามลำดับ ส่วนข้อต่อที่ 5 แม้ว่าจะมีค่าความผิดพลาดไปประมาณ 2.50 องศา ก็ไม่ได้ส่งผลกระทบต่อการทำงานของหุ่นยนต์แต่ประการใด ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าการคำนวณจลนศาสตร์แบบผกผันนั้นมีความถูกต้องและเชื่อถือได้อีกเช่นเดียวกัน

คำสำคัญ: จลนศาสตร์แบบไปข้างหน้า, จลนศาสตร์แบบผกผัน, หุ่นยนต์แขนกล

การอ้างอิงบทความ: เบญจมาศ พนมรัตน์รักษ์ จตุรพัฒน์ ภัควินิตย์ และ วิจักขณ์ พรสุขวิฑูร, "การทดสอบจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและจลนศาสตร์แบบผกผันของหุ่นยนต์แขนกล 6 แกน (Staubli RX 90)," วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, ปีที่ 27, ฉบับที่ 2, หน้า 241-252 เม.ย.-มิ.ย. 2560.



A Study of Forward and Inverse Kinematics for 6–Link Robot Arm (Staubli RX 90)

Benjamas Panomruttanarug* and Wijak Pornsukvitoon

Department of Control and Instrumentation, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand

Jaturapat Pakkawanit

Department of Mathematic, Faculty of Science, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 08–4134–5050, E-mail: benjamas.pan@kmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2017.03.013

Received 16 March 2016; Accepted 7 July 2016; Published online: 31 March 2017

© 2017 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

Abstract

In order to command a robot to move to a desired position, the position and orientation of the end effector are required to calculate an appropriate rotating angle for each link. On the other hand, a sequence of rotating angles for each link can be fed directly into the robot to move to the desired location. This research focuses on a calculation and validation of forward and inverse kinematics of a Staubli RX 90 robot arm performing a writing task. A path trajectory for writing an English alphabet is first generated and fed as an input command to the robot. While the robot is moving, rotating angles from each link are collected to validate an accuracy of the kinematics analysis. Comparisons between experimental results and calculations of forward and inverse kinematics in simulation have shown that the analysis of forward and inverse kinematics of Staubli RX 90 is correctly verified with some acceptable angle errors in link number 5.

Keywords: Inverse Kinematic, Forward Kinematic, Robot Arm/Staubli RX 90

1. บทนำ

ในปัจจุบันโรงงานอุตสาหกรรมต่างๆ ได้นำเทคโนโลยีหุ่นยนต์มาใช้ในขบวนการผลิตสินค้า ตัวอย่างเช่น หุ่นยนต์หยิบจับสิ่งของจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง [1] หรือหุ่นยนต์เชื่อมวงจรไฟฟ้าในอุตสาหกรรมอิเล็กทรอนิกส์ [2], [3] หรือหุ่นยนต์ประกอบชิ้นส่วนต่างๆ ในอุตสาหกรรมยานยนต์ หุ่นยนต์ต่างๆ เหล่านี้ส่วนใหญ่จะมีโครงสร้างคล้ายกับแขนของมนุษย์ ซึ่งสามารถถูกนำมาพัฒนาเพื่อการใช้งานทางด้านการแพทย์ได้หลากหลาย ไม่ว่าจะเป็นหุ่นยนต์ตัดอาหารให้แก่ผู้ป่วย [4] หรือหุ่นยนต์ช่วยในการผ่าตัด [5], [6] โดยลักษณะการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในแบบต่างๆ จะเลียนแบบมาจากการเคลื่อนที่ของมนุษย์

ในการสั่งงานให้หุ่นยนต์แขนกลเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งใดๆ นั้น สามารถควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ที่ได้สองวิธี ได้แก่ ควบคุมโดยป้อนตำแหน่งของปลายแขน (End Effector) และควบคุมโดยป้อนค่ามุมแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์แขนกล (Joint Angle) ให้กับหุ่นยนต์โดยตรง การใช้งานแต่ละวิธีขึ้นอยู่กับวิธีการสั่งงานของผู้ใช้งาน โดยทั่วไปถ้าผู้ใช้งานมีการสั่งงานให้หุ่นยนต์แขนกลมีการเคลื่อนที่ไปยังพิกัดที่ต้องการ สามารถพิจารณามุมในแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ได้จากจลนศาสตร์แบบผกผัน (Inverse Kinematics) และในทางตรงกันข้ามสามารถนำมุมในแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ที่มีการเคลื่อนที่ไป มาประมวลเพื่อคำนวณหาพิกัดของจุดปลายแขนของหุ่นยนต์ได้จากจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้า (Forward Kinematics) สามารถนำจลนศาสตร์แบบผกผันและจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าของหุ่นยนต์มาทำการวิเคราะห์หาพื้นที่การทำงาน (Workspace) ของหุ่นยนต์แขนกลได้ งานวิจัย [7] ได้มีการนำเอาจลนศาสตร์แบบผกผันและจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้ามาวิเคราะห์หาพื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ช่วยพยุงแขนสำหรับผู้พิการเพื่อฝึกการเคลื่อนที่ของแขน และในงานวิจัย [8] เป็นการหาจลนศาสตร์แบบผกผันและจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าของหุ่นยนต์แขนกลสำหรับงานเชื่อม ซึ่งยังขาดการแสดงผลการทดลองว่าวิธีการหาค่านั้นถูกต้องมากน้อยเพียงใด ในงานวิจัย [9] เป็นการหา

จลนศาสตร์แบบผกผันและจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าของหุ่นยนต์แขนกลแบบขนาน (Parallel Manipulator) เพื่อวิเคราะห์หาพื้นที่ทำงานของหุ่นยนต์

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงประยุกต์ซึ่งจะนำเอาทฤษฎีการวิเคราะห์จลนศาสตร์แบบผกผันและจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าของหุ่นยนต์อุตสาหกรรมมาทดสอบความถูกต้องก่อนที่จะถูกนำไปใช้เพื่อพิจารณาหาพื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ซึ่งจะทำให้ทราบขอบเขตที่ชัดเจนที่หุ่นยนต์สามารถเคลื่อนที่ไปได้ โดยจะเป็นประโยชน์ในการออกแบบ จัดวางหุ่นยนต์ให้เข้ากับระบบอัตโนมัติอื่นๆ ในขบวนการผลิตทางด้านอุตสาหกรรม

ขั้นตอนการทำงานเริ่มจากการวิเคราะห์หาจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและจลนศาสตร์แบบผกผันของหุ่นยนต์แขนกล 6 แกน รุ่น Staubli RX 90 [10] ที่ประกอบไปด้วยฐานหัวไหล่ แขนท่อนบน ข้อศอก แขนท่อนล่าง และข้อมือ ซึ่งถูกอธิบายไว้ใน [11]–[13] จากนั้นจึงเก็บค่าพิกัดและมุมในข้อต่อต่างๆ ขณะที่หุ่นยนต์เคลื่อนที่ไปเขียนตัวอักษรภาษาอังกฤษ เพื่อนำมาวิเคราะห์เปรียบเทียบความถูกต้องของจลนศาสตร์แบบผกผันและจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าของหุ่นยนต์ต่อไป

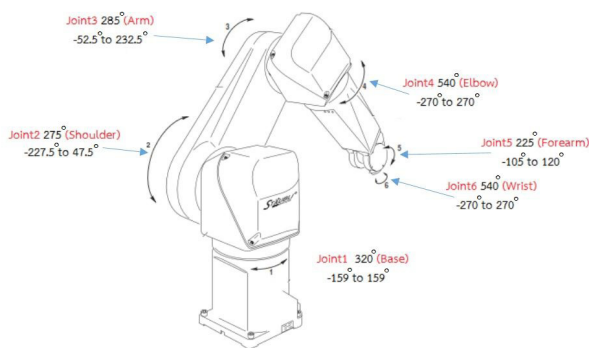
2. ระเบียบวิธีวิจัย

2.1 หุ่นยนต์แขนกล

รูปที่ 1 แสดงภาพของหุ่นยนต์แขนกลที่ใช้ในงานวิจัยนี้มีชื่อรุ่นว่า Staubli RX 90 ซึ่งประกอบไปด้วยข้อต่อ (Link) ต่างๆ ทั้งหมด 6 ข้อต่อ ได้แก่ ฐาน (Base) หัวไหล่ (Shoulder) แขนท่อนบน (Arm) ข้อศอก (Elbow) แขนท่อนล่าง (Forearm) และข้อมือ (Wrist) โดยแต่ละข้อต่อสามารถหมุนได้ตามค่าที่แสดงในรูปที่ 2 เนื่องจากมอเตอร์ที่ใช้ขับเคลื่อนในแต่ละข้อต่อเป็นแบบมอเตอร์กระแสสลับ (AC Motor) จึงต้องทำการจ่ายไฟ 3 เฟสเข้าไปยังตัวหุ่นยนต์เพื่อสั่งงานโดยผ่านตู้ควบคุมซึ่งประกอบไปด้วยตัวประมวลผล (Controller) โมดูลขับเคลื่อนมอเตอร์ (Motor Drive Module) รวมไปถึงการ์ดติดต่อกับอุปกรณ์ภายนอกต่างๆ (Interface Cards) ทั้งนี้ผู้ใช้งานสามารถสั่งงานโดยใช้ Teach Pendant เพื่อสั่งงานให้หุ่นยนต์ทำงานในโหมด Manual หรือสามารถสั่งงานผ่านเมาส์



รูปที่ 1 หุ่นยนต์แขนกลอุตสาหกรรม Staubli RX 90



รูปที่ 2 ภาพแสดงขนาดของมุมหมุนในแต่ละข้อต่อ

และคีย์บอร์ดเพื่อให้หุ่นยนต์ทำงานในโหมด Automatic โดยข้อมูลต่างๆ จะถูกแสดงในมอนิเตอร์ที่ตั้งแสดงในรูปที่ 3 ในการสั่งงานให้หุ่นยนต์เคลื่อนที่ในโหมดการทำงานแบบ Automatic นั้น ผู้ใช้งานสามารถสั่งงานได้โดยผ่าน LAN (Local Area Network) หรือผ่าน Serial Port ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ทำการสั่งงานจากโปรแกรม Adept เพื่อส่งข้อมูลโดยผ่าน LAN เนื่องจากส่งข้อมูลได้รวดเร็วกว่า

2.2 Denavit–Hartenberg Method

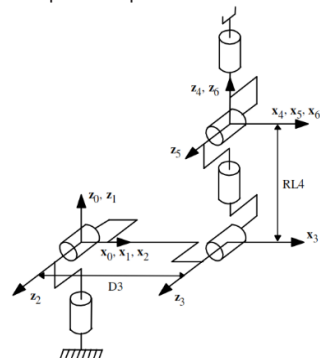
Denavit–Hartenberg (DH) Method [14] เป็นวิธีที่



(ก)

(ข)

รูปที่ 3 ตู้ควบคุม (ก) ชุดสั่งงานและแสดงผลข้อมูล (ข)



รูปที่ 4 ภาพแสดงการวางตัวของข้อต่อในแต่ละแกน

แพร่หลายสำหรับวิเคราะห์จลนศาสตร์ของหุ่นยนต์ที่ประกอบไปด้วยข้อต่อต่างๆ (Rigid Robot) ที่เชื่อมโยงกันในแต่ละแกนเข้าด้วยกัน แกนต่างๆ จะต่อกันในลักษณะอนุกรมกันไปเรื่อยๆ เริ่มตั้งแต่แกนที่ 0 ไปจนกระทั่งถึงแกนที่ N สำหรับหุ่นยนต์ที่มีทั้งหมด N แกน ทั้งนี้ในการวิเคราะห์ด้วยวิธีการ Denavit–Hartenberg (DH) Method ข้อต่อใดๆ ที่จะนำมาวิเคราะห์จะต้องเป็นข้อต่อที่สามารถเคลื่อนที่ที่ยึดหดได้ (Prismatic Joint) หรือเป็นข้อต่อที่หมุนได้ (Revolute Joint) เพียงอย่างเดียวอย่างหนึ่งเท่านั้น ไม่สามารถเป็นข้อต่อที่เคลื่อนที่ที่ยึดหดและหมุนได้ในแกนเดียวกันอย่างเช่นใน Ball และ Socket Joint ซึ่งเป็น 2–Degree-of-Freedom Joint

ในการวิเคราะห์ DH Method จะเริ่มจากการพิจารณาโครงสร้างการวางตัวของข้อต่อต่างๆ ในตัวหุ่นยนต์ และทิศทางของแกนพิกัดคาร์ทีเซียนที่อ้างอิง (Frames of Reference) ในแต่ละข้อต่อ ซึ่งถูกแสดงในรูปที่ 4

จากนั้นจะพิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งและพิกัดจุดอ้างอิงในแกนที่อยู่ติดกันโดยการใช้ Transformation



Matrix ซึ่ง Transformation Matrix ของหุ่นยนต์ที่มีแกนพิกัดอ้างอิงในแต่ละข้อต่อต้องแสดงในรูปที่ 4 มีค่าเป็น

$$T_i^i = \text{Rot}(x, \alpha_i) \text{Trans}(x, D_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(z, a_i) \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & D_i \\ \sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & -a_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & a_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

กำหนดให้ T_{i-1}^i คือ Transformation Matrix จากแกน $i-1$ ไปยังแกน i และ ตัวแปร $a-l$ คือค่ามุมระหว่างแกน Z_{i-1} และแกน Z_i รอบแกน X_{i-1} ตัวแปร D_i คือระยะห่างระหว่างแกน Z_{i-1} และแกน Z_{i-1} ตามแนวแกน X_{i-1} ตัวแปร θ_i คือค่ามุมระหว่างแกน X_{i-1} และแกน X_i รอบแกน Z_i คือระยะห่างระหว่างแกน X_{i-1} และแกน X_i ตามแนวแกน Z_i

เมื่อได้ค่า Transformation Matrix ของพิกัดและจุดอ้างอิงในแกนที่อยู่ติดกันหรือ T_{i-1}^i แล้ว สามารถคำนวณหาพิกัดและจุดอ้างอิงจากเฟรมอ้างอิงของแกนที่ 6 เทียบกับไปยังเฟรมอ้างอิงของแกนที่ 0 ได้จากสมการ

$$T_0^6 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 \quad (3)$$

ทั้งนี้ค่าตัวแปรต่างๆ จะถูกคำนวณในหัวข้อถัดไป

2.3 จลนศาสตร์แบบไปข้างหน้า

ในการวิเคราะห์จลนศาสตร์แบบไปข้างหน้า จะนำการวิเคราะห์จาก [11]–[13] มาใช้ในการหา Transformation Matrix จากแกนที่ 0 ไปยังแกนที่ 6 หรือ T_0^6 โดยทำการหาค่าพารามิเตอร์ a_i , D_i , θ_i และ α_i หรือ DH Parameters ซึ่งจะได้คำนวณได้จากกฎมือขวา โดยกำหนดให้แกน X, Y และ Z ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ให้นิ้วหัวแม่มือแทนแกน Z นิ้วชี้แทนแกน X และนิ้วกลางแทนแกน Y แล้วทำการหาค่าของมุมบิดและระยะห่างระหว่างแกนที่อยู่ติดกัน ค่า DH Parameters ที่คำนวณหาได้ถูกแสดงใน

ตารางที่ 1 โดยที่ ค่า RL4 และ D3 มีค่าเป็น 0.45 เมตร และ 0.45 เมตร ตามลำดับ

ตารางที่ 1 ค่า DH Parameters

Joint	α_i	a_i	θ_i	D_i
1	0	0	θ_1	0
2	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_2	0
3	0	0	θ_3	D3
4	$-\frac{\pi}{2}$	RL4	θ_4	0
5	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_5	0
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_6	0

เมื่อแทนค่า DH Parameter ลงไปใน Transformation Matrix แล้ว สามารถหาค่าหรือตำแหน่งและพิกัดจุดปลายของแขนกลที่ต้องการเคลื่อนที่ไปได้ดังสมการ

$$T_0^6 = \begin{bmatrix} s'_x & n'_x & a'_x & P'_x \\ s'_y & n'_y & a'_y & P'_y \\ s'_z & n'_z & a'_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

โดยค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ถูกแสดงได้ดังนี้

กำหนดให้ $C_j = \cos(\theta_j)$, $S_j = \sin(\theta_j)$, $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$

$$s'_x = C1(C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6) - S1(S4C5C6 + C4S6)$$

$$s'_y = S1(C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6) + C1(S4C5C6 + C4S6)$$

$$s'_z = S23(C4C5C6 - S4S6) + C23S5C6$$

$$n'_x = C1(-C23(C4C5S6 + S4C6) + S23S5S6) + S1(S4C5S6 - C4C6)$$

$$n'_y = S1(-C23(C4C5S6 + S4C6) + S23S5S6) - C1(S4C5S6 - C4C6)$$

$$n'_z = -S23(C4C5S6 + S4C6) - C23S5S6$$

$$a'_x = -S1(C23C4S5 + S23C5) - C1S4S5$$

$$a'_y = -C1(C23C4S5 + S23C5) + S1S4S5$$

$$a'_z = -S23C4S5 + C23C5$$

$$P'_x = C1(S23RL4 + C2D3)$$

$$P'_y = S1(S23RL4 + C2D3)$$

$$P'_z = C23RL4 - S2D3$$



และ $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ โดย i และ j คือตัวเลขใดๆ ตั้งแต่ 1 ถึง 6

2.4 จลนศาสตร์แบบผกผัน

จลนศาสตร์แบบผกผันเป็นการคำนวณหาค่ามุมของแต่ละข้อต่อที่ทำให้ปลายแขนของหุ่นยนต์อยู่ที่ตำแหน่งตามที่ต้องการ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้อาศัย Algebraic Solution Approach [11]–[13] มาใช้ในการคำนวณหามุมในแต่ละข้อต่อที่ต้องเคลื่อนที่ไปเมื่อกำหนดตำแหน่งจุดปลายที่ต้องการเคลื่อนที่ไปมาให้ ซึ่งจะเป็นการคำนวณย้อนกลับหา Inverse Transformation Matrix จากแกนของจุดปลายไปยังแกนของฐาน โดยกำหนดให้ U_i คือ Transformation Matrix จาก แกน i ไปยัง แกน $i + 1$ ดังนั้นสามารถคำนวณหา U_i ต่างๆ ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} U_5 &= T_5^6 \\ U_4 &= T_4^6 = T_4^5 U_5 \\ U_3 &= T_3^6 = T_3^4 U_4 \\ U_2 &= T_2^6 = T_2^3 U_3 \\ U_1 &= T_1^6 = T_1^2 U_2 \\ U_0 &= T_0^6 = T_0^1 U_1 \end{aligned} \quad (5)$$

ทั้งนี้สามารถกำหนดพิกัดของจุดปลายของแขนกลได้จาก U_0 โดยกำหนดให้ U_{0d} คือพิกัดของจุดปลายของแขนกลที่ต้องการเคลื่อนที่ไป ซึ่งสามารถเขียน Orientation และ Position ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังต่อไปนี้

$$U_{0d} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

เมื่อ A และ P คือ Orientation Matrix และ Position Matrix ของจุดปลายที่ต้องการเคลื่อนที่ไป ดังนั้นสามารถหา U_{id} ได้จาก

$$\begin{aligned} U_{1d} &= \text{inv}(T_0^1) U_{0d} = T_1^0 U_{0d} \\ U_{2d} &= \text{inv}(T_1^2) \text{inv}(T_0^1) U_{0d} = T_2^1 U_{1d} \\ U_{3d} &= \text{inv}(T_2^3) \text{inv}(T_1^2) \text{inv}(T_0^1) U_{0d} = T_3^2 U_{2d} \\ U_{4d} &= \text{inv}(T_3^4) \text{inv}(T_2^3) \text{inv}(T_1^2) \text{inv}(T_0^1) U_{0d} = T_4^3 U_{3d} \end{aligned} \quad (7)$$

จากนั้นนำเอา U_{id} ที่ได้จากสมการที่ (7) มาเทียบกับ U_i ในสมการที่ (5) เพื่อคำนวณหาค่าของ θ_{id} ในแต่ละแกน โดยวิธีการหาค่าอธิบายได้ดังต่อไปนี้

การหาค่า θ_1 ได้จากการกำหนดให้ U_{1d} เท่ากับ U_1 แล้วทำการเทียบค่าในแถวที่ 2 หลักที่ 4 ซึ่งมีสมการเป็น

$$-S_1 P_x + C_1 P_y = 0 \quad (8)$$

และสามารถหาคำตอบของสมการได้เป็น

$$\theta_1 = \text{atan2}(P_y, P_x) \quad (9)$$

การหาค่า θ_2 และ θ_3 ได้จากการกำหนดให้ U_{2d} เท่ากับ U_2 แล้วทำการเทียบค่าในแถวที่ 1 หลักที่ 4 ซึ่งมีสมการเป็น

$$-S_3 R L_4 + D_3 = C_2(CIP_x + SIP_y) + S_2 P_z \quad (10)$$

และค่าในแถวที่ 2 หลักที่ 4 ซึ่งมีสมการเป็น

$$C_3 R L_4 = -S_2(CIP_x + SIP_y) + C_2 P_z \quad (11)$$

จากสมการที่ (10) และ (11) สามารถหาคำตอบของสมการได้

$$\theta_2 = -\text{atan2}(S_2, C_2) \quad (12)$$

โดยที่

$$S_2 = \frac{XZ + eY\sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$



$$C2 = \frac{YZ - \varepsilon X \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \quad (13)$$

ซึ่งค่าของ $\varepsilon = 1$ ส่วนค่าตัวแปรอื่นๆ มีค่าดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} X &= -2D3P_z \\ Y &= -2D3(C1P_x + S1P_y) \\ Z &= (RL4)^2 - (C1P_x + S1P_y)^2 - (D3)^2 - (P_z)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

และจากสมการที่ (10) และ (11) สามารถหาอีกหนึ่งคำตอบของสมการได้เป็น

$$\theta_3 = -\text{atan2}(S3, C3) \quad (15)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} S3 &= \frac{-P_z S2 - B1C2 + D3}{RL4} \\ C3 &= \frac{-B1S2 + P_z C2}{RL4} \end{aligned} \quad (16)$$

การหาค่า θ_4, θ_5 และ θ_6 จากการพิจารณา Orientation Matrix A_{3d} หรือเมทริกซ์ 3×3 ที่อยู่ใน U_{3d} กำหนดให้

$$\begin{aligned} A_{3d} &= \text{inv}(A_2^3) \text{inv}(A_1^2) \text{inv}(A_0^1) \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_x & G_x & H_x \\ F_y & G_y & H_y \\ F & G & H \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

โดย

$$\begin{aligned} F_x &= C23(C1s_x + S1s) + S23S_z \\ F_y &= -S23(C1s_x + S1s_y) + C23S_z \\ F_z &= S1S_x - C1Y_y \end{aligned} \quad (18)$$

ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ภายใน G_x, G_y, G_z และ H_x, H_y, H_z จะคล้ายกันกับ F_x, F_y, F_z แต่จะเปลี่ยน

ชุดตัวแปรจาก S_x, S_y, S_z มาเป็น N_x, N_y, N_z และ a_x, a_y, a_z ตามลำดับ และเมื่อหา Orientation Matrix หรือเมทริกซ์ $A_{4d} 3 \times 3$ ที่อยู่ใน U_{4d} จะได้

$$A_{4d} = \text{inv}(A_3^4) \begin{bmatrix} F_x & G_x & H_x \\ F_y & G_y & H_y \\ F_z & G_z & H_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

และเมื่อทำการเทียบค่าสัมประสิทธิ์ภายใน A_{4d} เท่ากับ A_4 แล้วทำการเทียบค่าในแถวที่ 2 หลักที่ 3 จะได้สมการ

$$-C4H_z - S4H_x = 0 \quad (20)$$

จะสามารถหาค่าของ θ_4 ได้ดังสมการ

$$\theta_4 = \text{atan2}(H_z, -H_x) \quad (21)$$

และเมื่อทำการเทียบค่าสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 1 หลักที่ 3 และแถวที่ 3 หลักที่ 3 ของเมทริกซ์ A_{4d} และ A_4 จะได้สมการ 2 สมการคือ

$$S5 = -C4H_x + S4H_z \quad (22)$$

$$C5 = H_y$$

และเมื่อทำการหาค่าของ θ_5 จะได้ค่าดังสมการ

$$\theta_5 = \text{atan2}(S5, C5) \quad (23)$$

และเมื่อทำการเทียบค่าสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 2 หลักที่ 1 และแถวที่ 2 หลักที่ 2 ของเมทริกซ์ A_{4d} และ A_4 จะได้สมการ 2 สมการคือ

$$S6 = -C4F_z - S4F_x \quad (24)$$

$$C6 = -C4G_z - S4G_x$$

และเมื่อทำการหาค่าของ θ_6 จะได้ค่าดังสมการ

$$\theta_6 = \text{atan2}(S6, C6) \quad (25)$$

2.5 การใช้งานจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและจลนศาสตร์แบบผกผัน

จากการวิเคราะห์จลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและจลนศาสตร์แบบผกผันของหุ่นยนต์แขนกล Staubli RX 90 ในหัวข้อที่แล้ว สามารถนำจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้ามาคำนวณหาพิกัดปลายแขนของหุ่นยนต์เมื่อทำการป้อนค่ามุมในแกนต่างๆ ของหุ่นยนต์ ($\theta_i, \forall i$) โดยใช้ Transformation Matrix T_0^i จากสมการที่ (4) พร้อมกับค่า DH Parameter ดังตารางที่ 1 มาคำนวณซึ่งในระนาบ 2 มิติ จะพิจารณาค่าในแนวแกน “X” และ “Z” หรือ P'_x และ P'_z ของเมทริกซ์ T_0^6 ตามลำดับ และในทำนองเดียวกันสามารถนำเอาจลนศาสตร์แบบผกผันมาคำนวณหามุมในแต่ละข้อต่อที่เคลื่อนที่ไป ($\theta_i, \forall i$) จากการรู้ค่า Transformation Matrix โดยคำนวณได้จากสมการที่ (9), (12), (15), (21), (23) และ (25) ตามลำดับ

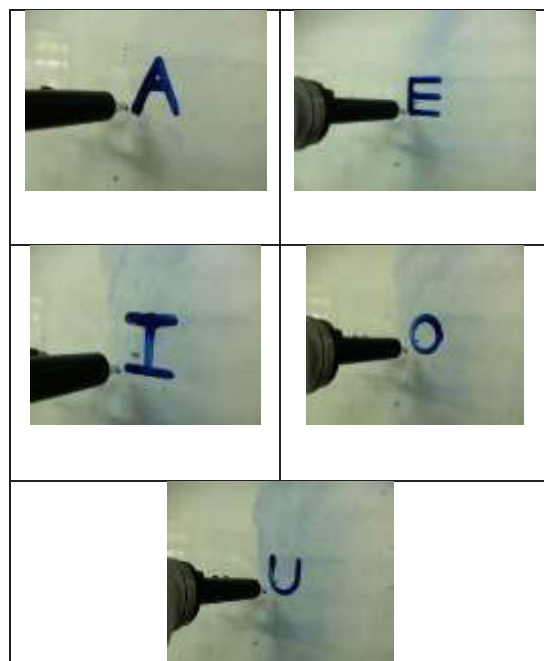
3. ผลการทดลองและวิเคราะห์ผล

ในการทดลองเพื่อทดสอบความถูกต้องของจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและจลนศาสตร์แบบผกผันที่ได้คำนวณไว้ในหัวข้อที่แล้ว เริ่มจากการสั่งงานให้หุ่นยนต์แขนกลเขียนตัวอักษร โดยกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นของปลายปากกาให้ห่างจากกระดานไวท์บอร์ดเป็นระยะ 5 มิลลิเมตร ซึ่งเป็นระยะที่กำหนดให้หุ่นยนต์แขนกลยกปากกาขึ้นในกรณีที่ไม่ต้องการให้เขียนตัวอักษรเพื่อหลีกเลี่ยงการกระแทกกระหว่างปากกาและไวท์บอร์ด ทั้งนี้สามารถทำการสั่งงานหุ่นยนต์ให้เขียนตัวอักษรตามที่กำหนดได้จาก Graphic User Interface (GUI) ดังแสดงในรูปที่ 5 และสามารถดูการทำงานของหุ่นยนต์ได้โดยผ่านหน้าจอเช่นเดียวกัน รูปที่ 6 แสดงตัวอักษร “A” “E” “I” “O” และ “U” ที่เขียนขึ้นโดยหุ่นยนต์แขนกล

ในการเขียนตัวอักษรตัวต่างๆ ได้ทำการเก็บค่ามุมในแต่ละข้อต่อเพื่อนำมาป้อนเข้าไปในชุดสมการการคำนวณจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าแล้วทำการพล็อตค่าในแนวแกน “X” และ “Z” ของหุ่นยนต์ รูปที่ 7 แสดงภาพตัวอักษร “A” “E” “I” “O” และ “U” ที่เกิดจากการคำนวณจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าโดยป้อนมุม

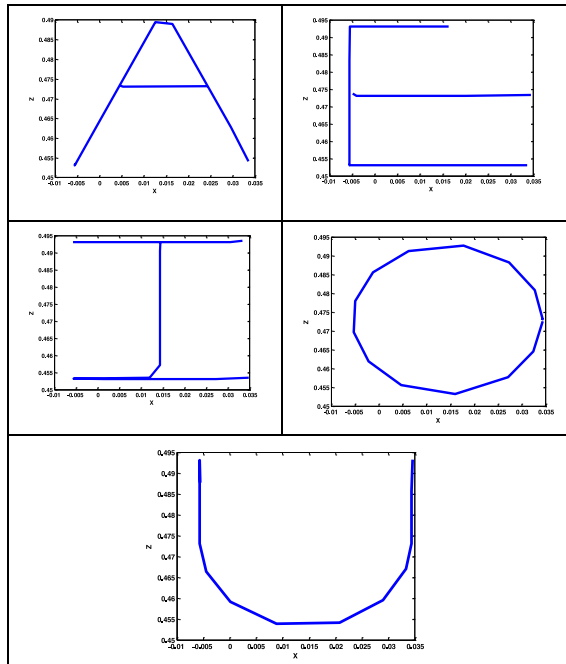


รูปที่ 5 หน้าจอสั่งงานหุ่นยนต์



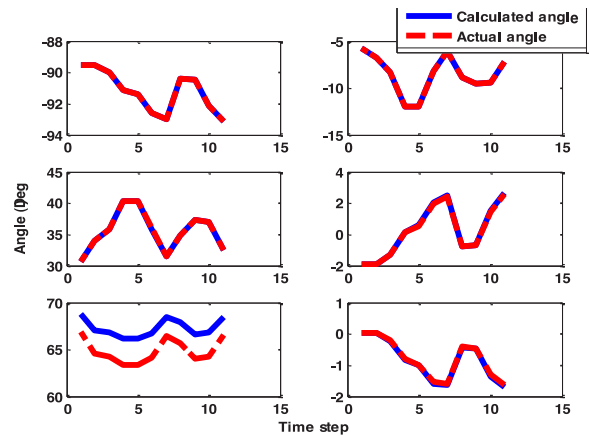
รูปที่ 6 ตัวอักษรที่ถูกเขียนขึ้นโดยหุ่นยนต์

$\theta_1 - \theta_6$ ที่วัดมาได้จากหุ่นยนต์ จะเห็นได้ว่าตัวอักษรที่สร้างขึ้นมาจากการคำนวณจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าในรูปที่ 7 อาจจะมีลักษณะไม่สมบูรณ์เหมือนในรูปที่ 6 โดยเฉพาะตัวอักษร “E” เนื่องจากไม่สามารถทำการเก็บค่า $\theta_1 - \theta_6$ ได้ทันและพอที่จะสร้างตัวอักษรกลับมาได้เหมือนเดิมทุกประการ เพราะในการเขียนตัวอักษรแต่ละตัว หุ่นยนต์ใช้เวลาเพียงแค่ 2-3 วินาที ในขณะที่ Sample Time ในการเก็บค่าสัญญาณต่างๆ มีค่าเพียง 0.05 วินาทีเท่านั้น ทำให้ตัวอักษรที่ได้ในรูปที่ 7 จึงไม่สมบูรณ์เหมือนในรูปที่ 6 แต่ถือว่าใกล้เคียงกัน



รูปที่ 7 อักษรที่เกิดจากการคำนวณจนศาสตร์แบบไปข้างหน้า

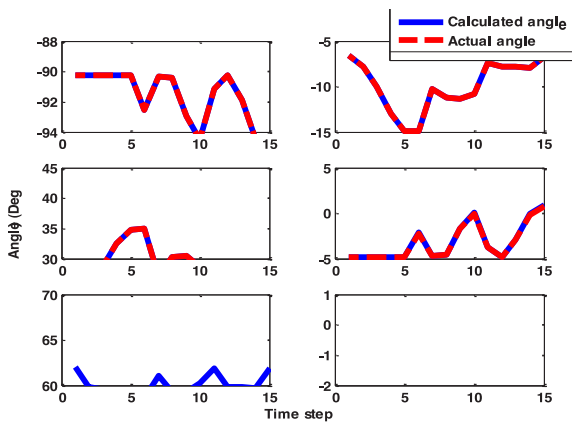
ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าชุดสมการการคำนวณจนศาสตร์แบบไปข้างหน้ามีความถูกต้องและเชื่อถือได้ เพื่อเป็นการทดสอบผลการคำนวณจนศาสตร์แบบผกผัน จึงได้นำฟังก์ชันที่เขียนที่คำนวณได้จากจนศาสตร์แบบไปข้างหน้ามาใช้ในการคำนวณจนศาสตร์แบบผกผันเพื่อหาค่ามุมในแต่ละข้อต่อที่หุ่นยนต์ได้เคลื่อนที่ไปและนำมาเปรียบเทียบกับค่ามุมในแต่ละข้อต่อที่วัดมาได้จากการทดลองจากการสั่งงานให้หุ่นยนต์เขียนตัวอักษร ซึ่งผลการทดลองสามารถถูกแสดงได้ดังกราฟในรูปที่ 8-12 รูปที่ 8 แสดงมุมในแต่ละข้อต่อที่เปรียบเทียบระหว่างผลการคำนวณจนศาสตร์แบบผกผันและผลที่เก็บค่ามาได้ขณะที่หุ่นยนต์เขียนตัวอักษร “A” โดยรูปเล็กด้านซ้ายบนแสดงมุม รูปเล็กด้านขวาบนแสดงมุม รูปเล็กด้านซ้ายกลางแสดงมุม รูปเล็กด้านขวากลางแสดงมุม รูปเล็กด้านซ้ายล่างแสดงมุม รูปเล็กด้านขวาล่างแสดงมุม และรูปที่ 9-12 แสดงมุมในแต่ละข้อต่อที่เปรียบเทียบระหว่างผลการคำนวณจนศาสตร์แบบผกผันและผลที่เก็บค่ามาได้



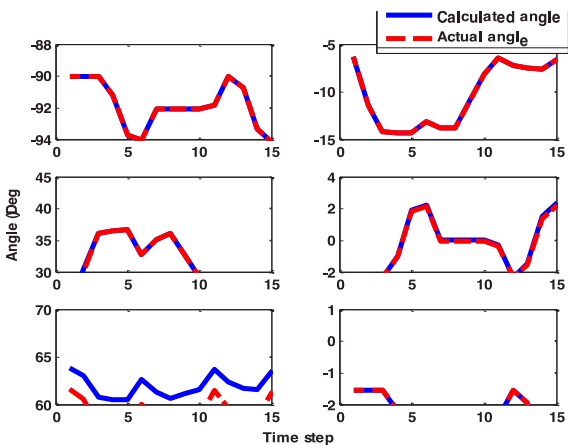
รูปที่ 8 มุมในแต่ละข้อต่อจากการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์เปรียบเทียบกับค่าคำนวณจนศาสตร์เพื่อเขียนตัวอักษร “A”

ขณะที่หุ่นยนต์เขียนตัวอักษร “E” “I” “O” และ “U” ตามลำดับ

จะเห็นได้ว่าไม่ว่าจะเขียนตัวอักษรใดๆ มุมที่ได้จากการคำนวณจนศาสตร์แบบผกผันและมุมที่เก็บค่าได้จากการทดลองการเขียนอักษรในรูปที่ 8-12 นั้น มีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยตารางที่ 2 จะแสดงค่า Root Mean Square Error (RMSE) ในแต่ละข้อต่อเมื่อทำการเขียนตัวอักษรแต่ละตัว โดยค่าความผิดพลาดของมุม θ_1 , θ_2 และ θ_3 นั้นมีค่าน้อยมากในระดับ 10^{-14} – 10^{-15} องศา ส่วนค่าความผิดพลาดของมุม θ_4 และ θ_6 ก็มีค่าน้อยเช่นเดียวกัน ในระดับ 0.07 และ 0.03 องศาตามลำดับ ซึ่งก็ยังไม่สามารถสังเกตเห็นได้ในรูปที่ 8-12 แต่ในกรณีของมุม θ_5 ที่มีค่าความผิดพลาดไปประมาณ 2.50 องศา ซึ่งสามารถสังเกตเห็นได้อย่างชัดเจนในรูปที่ 8-12 นั้น ก็ได้ทำให้หุ่นยนต์ทำงานผิดพลาดแต่ประการใด เนื่องจากไม่สามารถสังเกตเห็นความผิดพลาดเมื่อนำค่ามุมที่คำนวณด้วยจนศาสตร์แบบผกผันไปสั่งงานให้หุ่นยนต์เขียนตัวอักษรซ้ำอีกครั้งหนึ่ง หรืออาจกล่าวได้ว่าเมื่อนำค่ามุมที่คำนวณได้จากจนศาสตร์แบบผกผันไปสั่งงานหุ่นยนต์ หุ่นยนต์สามารถเขียนตัวอักษรได้อย่างถูกต้องเหมือนกับการสั่งงานจากหน้าจอ GUI โดยปกติ นั้นหมายความว่าผลการคำนวณจนศาสตร์แบบผกผันนั้นมีความถูกต้องและเชื่อถือได้เช่นเดียวกัน



รูปที่ 9 มุมในแต่ละข้อต่อจากการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์เปรียบเทียบกับค่าวจนศาสตร์เพื่อเขียนตัวอักษร “E”



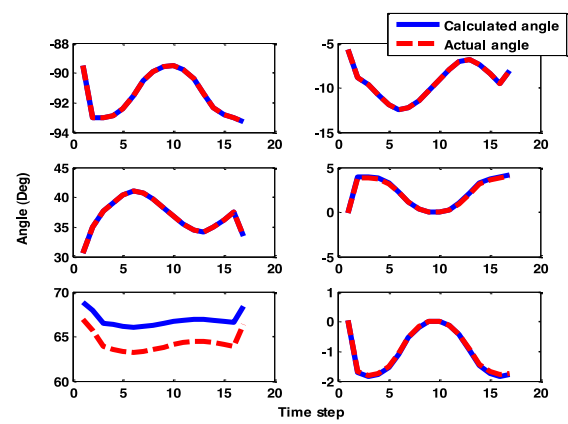
รูปที่ 10 มุมในแต่ละข้อต่อจากการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์เปรียบเทียบกับค่าวจนศาสตร์เพื่อเขียนตัวอักษร “I”

ตารางที่ 2 ค่า RMSE ในแต่ละข้อต่อ

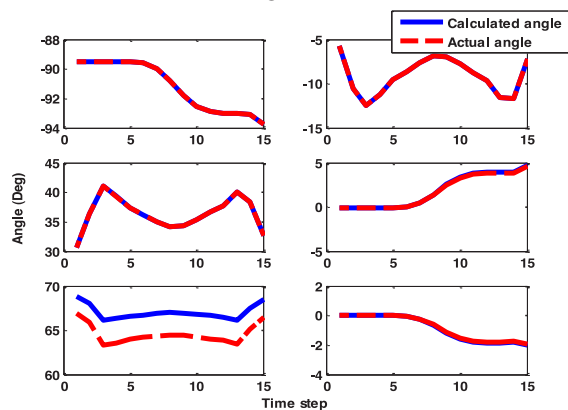
	A	E	I	O	U
θ_1	0	10^{-15}	10^{-15}	10^{-15}	10^{-15}
θ_2	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}
θ_3	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}
θ_4	0.071	0.063	0.068	0.085	0.082
θ_5	2.428	2.450	2.452	2.558	2.497
θ_6	0.330	0.027	0.029	0.037	0.035

4. สรุป

ในการทดลองนี้ได้สั่งงานให้หุ่นยนต์เขียนตัวอักษรตามที่ต้องการและทำการเก็บค่ามุมในแต่ละแกนขณะ



รูปที่ 11 มุมในแต่ละข้อต่อจากการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์เปรียบเทียบกับค่าวจนศาสตร์เพื่อเขียนตัวอักษร “O”



รูปที่ 12 มุมในแต่ละข้อต่อจากการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์เปรียบเทียบกับค่าวจนศาสตร์เพื่อเขียนตัวอักษร “U”

หุ่นยนต์มีการเคลื่อนที่ไป มาทำการทดสอบการคำนวณจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและผกผันตามที่ได้คำนวณไว้ ซึ่งผลของการคำนวณจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้ามีความถูกต้องแม่นยำ เนื่องจากเมื่อนำค่ามุมจากผลการทดลองไปคำนวณพิกัดคาร์ทีเซียนและพล็อตค่า ก็จะได้ตัวอักษรตามที่ได้สั่งงานให้หุ่นยนต์เขียนไป และยังได้ทำการทดสอบการคำนวณจลนศาสตร์แบบผกผันจากการนำเอาพิกัดคาร์ทีเซียนไปคำนวณมุมในแต่ละแกนเพื่อนำมาเปรียบเทียบกับมุมที่วัดค่ามาจากการทดลอง ซึ่งผลการเปรียบเทียบนั้นใกล้เคียงกันมาก



และสามารถพิจารณาได้ว่าการคำนวณจลนศาสตร์แบบผกผันมีความถูกต้องแม่นยำเช่นเดียวกัน งานวิจัยนี้สามารถนำไปต่อยอดเพื่อหาพื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ซึ่งจะทำให้ทราบขอบเขตที่ชัดเจนที่หุ่นยนต์สามารถเคลื่อนที่ได้ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการออกแบบจัดวางหุ่นยนต์ให้เข้ากับระบบอัตโนมัติอื่นๆ ในขบวนการผลิตทางด้านอุตสาหกรรมต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] C.Y.Tsai, C.C.Wong, C.J.Yu, C.C.Liu, and T.Y.Liu, "A hybrid switched reactive-based visual servo control of 5-DOF robot manipulators for pick-and-place tasks," *IEEE Systems Journal*, vol. 9, no. 1, pp. 119–130, Mar. 2015.
- [2] C. Fang, Y. T. Song, J. Wei, J.J. Xin, H. P. Wu, A. Salminen, and H. Handroos, "Design and analysis of the laser robotic welding system for ITER correction coil case," *Journal of Fusion Energy*, vol. 34, no. 5, pp. 1060–1066, Apr. 2015.
- [3] A. Gatej, N. Pyschny, P. Loosen, and C. Brecher, "Robot based resistance soldering of optical components," *Soldering & Surface Mount Tech*, vol. 24, no. 2, pp. 112–119, Apr. 2012.
- [4] A. Dutta, *Robotic systems – applications, control and programming*. InTech, Feb. 2012.
- [5] H. Egi, M. Hattori, T. Suzuki, H. Sawada, and H. Ohdan, "The significance of spatial cognitive ability in robot-assisted surgery," *Surgery Endoscopy*, vol. 29, no. 5, pp. 1130–1136, Aug. 2014.
- [6] S. Facca, S. Hendriks, G. Mantovani, J. Selber, and P. Liverneaux, "Robot-assisted surgery of the shoulder girdle and brachial plexus," *Seminars in Plastic Surgery*, vol. 28, no. 1, pp. 39–44, Mar. 2014.
- [7] Y. Jung and J. Bae, "Kinematic analysis of a 5 DOF upper-limb exoskeleton with a tilted and vertically translating shoulder joint," in *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Wollongong, Australia, pp. 1643–1648, Jul. 2013.
- [8] M. Dahari and J. D. Tan, "Forward and inverse kinematics model for robotic welding process using KR-16KS KUKA robot," in *Fourth International Conference on Modelling, Simulation and Applied Optimization*, Kuala Lumpur, Malaysia, pp. 1–6, Apr. 2011.
- [9] M.A. Hosseini, "Kinematic synthesis of a Novel Rapid Spherical CRS/PU parallel manipulator," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 93, pp. 26–38, Nov. 2015.
- [10] Robot Arm RX90 Manual. [Online]. Available: <http://www.staubli.com/en/robotics/6-axis-scara-industrial-robot/specialized-robot/painting-robot/rx90-paint/>
- [11] W. Khalil and E. Dombre, "Modeling, Identification and Control of Robots," USA: Butterworth-Heinemann. July, 2004.
- [12] E. Dombre and W. Khalil, *Robot Manipulators: Modeling, Performance Analysis and Control*. Wiley-ISTE, January, 2007.
- [13] J.J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, ed. 3., Prentice Hall, 2005.
- [14] P. Sanz, "Robotics: modeling, planning, and control," *IEEE Robotic Automatic Magazine*, vol. 16, no. 4, pp. 101–101, December, 2009.



Appendix

Transformation matrix i จากแกน $i+1$ ไปยังแกน

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & D3 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} C4 & -S4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & RL4 \\ -S4 & -C4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^5 = \begin{bmatrix} C5 & -S5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S5 & C5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^6 = \begin{bmatrix} C6 & -S6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S6 & -C6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation matrix i จากแกน $i+1$ ไปยังแกน i

$$U_4 = T_0^4 = T_3^4 U_5 =$$

$$\begin{bmatrix} CC5 & 6 & -CC5 & 6 & -S5 & 0 \\ SC6 & & 6 & & 0 & 0 \\ SC5 & 6 & -SS5 & 6 & C5 & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$