

การสร้างตัวแก้สมการการสะท้อนแม่เหล็กไฟฟ้าบนตัวกลางแบบวิวิธพันธุ์ สำหรับพื้นโลกแบบหลายชั้นในบนเอ็มพีไอ และโอเพนเอ็มพีไอ

Electromagnetic Sounding Equations Solver on Heterogeneous Medium for Multilayered Earth Using Message Passing Interface and Open Specification for Multi-Processing

บรรพต ดลวิทยากุล^{1*} จันทนา จันทราพรชัย² และ สืบสกุล อยู่ยูนยง³
Banpot Dolwithayakul^{1*} Chantana Chantrapornchai² and Suabsakul Yooyeunyong³

บทคัดย่อ

ผู้วิจัยได้พัฒนาการสร้างภาพเสมือนสำหรับตัวแบบพื้นโลกโดยเฉพาะอย่างยิ่งรอยแตกในตัวแบบ ส่วนหนึ่งของปัญหาได้แก่การคำนวณเฉพาะทางจำนวนมากเนื่องจากสมการอินทิเกรต โดยทั่วไปสมการอินทิเกรตเหล่านี้มาจากการสันนิษฐานระดับสูงซึ่งทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง ผู้วิจัยต้องการผลลัพธ์ที่มีความผิดพลาดน้อยกว่า 10^{-14} ผู้วิจัยพบว่าซอฟต์แวร์สำเร็จรูปสำหรับการหาผลกรอินทิเกรตเชิงตัวเลขในปัจจุบันเช่น MATLAB ไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำในระดับที่พอใจได้ จึงได้พัฒนาวิธีการแบบขนานสำหรับการแก้สมการเหล่านี้แบบผสมซึ่งใช้การสื่อสารแบบเมสเสจ หรือเอ็มพีไอ และโอเพนเอ็มพีไอบนคลัสเตอร์ขนาด 32 โหนด วิธีการมีลักษณะการกระจายงาน โอเพนเอ็มพีไอจะช่วยในการแบ่งงานเป็นงานย่อยๆ ทำงานในแต่ละคอร์ของซีพียู ผู้วิจัยได้ปรับปรุงเวลาในการทำงานให้ดีขึ้นถึง 66.98 เท่าสำหรับคลัสเตอร์จำนวน 32 โหนดและใช้ 4 เธรด เมื่อเทียบกับแบบปกติ

คำสำคัญ: การประมวลผลแบบขนาน เอ็มพีไอ โอเพนเอ็มพีไอ คลัสเตอร์ โมเดลเชิงคณิตศาสตร์ สมการการสะท้อนแม่เหล็กไฟฟ้า อินทิเกรต

Abstract

We develop the visualization for an earth model, particularly cracks in the model. One part of the problem is specific extensive computation due to the integral equation. Generally, these integral equations come in the form of “very high oscillation” which make the calculation time expensive in order to obtain an accurate solution. We need the computed results with error less than 10^{-14} practically. It was found that current numerical integration packaged software was unable to obtain a satisfactory results. We develop the parallel approach of integral equations based on the hybrid approach with Message Passing Interface (MPI) and Open Specification for Multi-Processing

¹ นักศึกษา ภาควิชาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
² รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
³ รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
* Corresponding Author, Tel 08-4003-8688, E-mail: meawcom@gmail.com

(OpenMP) on 32-node cluster based on a job distributor approach. OpenMP is used to cut the jobs into smaller pieces and distribute to each CPU core for computation. We obtained the improvement up to 66.98 times compared to the original one.

Keywords: Parallel Computing, Cluster Computing, Message Passing Interface(MPI), Open Specification for Multi-Processing (OpenMP), Mathematical Model, Magnetic Sounding, Numerical Integration

1. บทนำ

ในการสร้างแบบจำลองของเปลือกโลกในเชิงคณิตศาสตร์ มีการคำนวณมากมายหลายอย่าง หนึ่งในนั้นที่ต้องใช้คือการอินทิเกรตสมการสนามแม่เหล็กในเชิงอนุพันธ์เพื่อหาวัสดุที่อยู่ภายในพื้นโลกที่แบ่งออกเป็นชั้นๆ ซึ่งลักษณะของสมการแม่เหล็กเหล่านี้หากผู้วิจัยพล็อตเป็นกราฟจะเห็นว่ามีการผกผันสูงบริเวณเส้น $y=0$ บนแกน x ทำให้การอินทิเกรตนั้นเกิดข้อผิดพลาดได้ การใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์ในท้องตลาดไม่สามารถแก้สมการเหล่านี้ได้เนื่องจากต้องอินทิเกรตละเอียดมาก และต้องสามารถควบคุมค่าความผิดพลาดที่มีค่าน้อยมากๆ ได้ รวมทั้งข้อจำกัดหลายอย่างเช่น การอินทิเกรตฟังก์ชันซ้อนฟังก์ชัน รวมทั้งจำนวนจินตภาพที่ไม่สามารถทำได้บนซอฟต์แวร์เหล่านี้

จุดประสงค์ในการวิจัยหลักของผู้วิจัยนั้นคือการทำภาพเสมือนจริงหรือที่เรียกว่า Visualization ของรอยแยกบนผิวโลก รวมทั้งวิเคราะห์สถานที่เสี่ยงต่อรอยเลื่อนต่างๆ เพื่อให้นักธรณีวิทยาสามารถนำข้อมูลเหล่านี้มาใช้งานได้ต่อไปในอนาคต สำหรับในงานข้างต้นนั้นผู้วิจัยจึงได้พยายามนำการประมวลผลแบบขนานบนคลัสเตอร์เข้ามาแก้ปัญหา โดยการใช้เอ็มพีไอ (Message Passing Interface : MPI) และโอเพนเอ็มพี (Open Specification for Multi-Processing: OpenMP) รวมทั้งมีการจัดการการ

กระจายงานที่เหมาะสมที่สุด

การที่จะสร้างโมเดลแสดงวัตถุในแต่ละชั้นนั้นจะต้องใช้เครื่องวัด โดยในที่นี้ใช้เครื่องมือชื่อ SYSCAL Kid [1] ในการวัดการเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็ก ซึ่งจะได้ค่าตัวแปรต่างๆ มาเพื่อใช้ในสมการอนุพันธ์หลังจากนั้นทำการอินทิเกรตเพื่อให้ได้ค่าการเหนี่ยวนำ ซึ่งค่านี้จะบอกได้ว่าภายในชั้นโลกที่สนใจมีวัตถุอะไรอยู่ แต่เนื่องจากฟังก์ชันอนุพันธ์มีความผันผวนสูง และเป็นฟังก์ชันซับซ้อนทำให้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์ในปัจจุบันไม่เพียงพอต่อการอินทิเกรตที่มีความแม่นยำสูงได้ ทางผู้วิจัยจึงได้พัฒนาตัวแก้สมการนี้แบบขนานบนคลัสเตอร์ โดยใช้ MPI และ OpenMP เพื่อลดเวลาในการประมวลผลของการอินทิเกรตลง

ในปี 1980 Banerjee และคณะ [2] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งมีการแบ่งพื้นโลกออกเป็น $n+1$ ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นเป็นระนาบขนานกับแผ่นโลก โดยมีการเปลี่ยนฟังก์ชันเลขชี้กำลังเมื่อมีความลึกเพิ่มขึ้น

ในปี 1984 Caleb และ Poddar [3] ได้เขียนโปรแกรมโดยใช้ภาษา Fortran เพื่อแก้ปัญหาในลักษณะเดียวกันในพื้นที่แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยมีจำนวน n ชั้นบนเครื่องมินิคอมพิวเตอร์ PDP 11/40 โดยคำนวณทั้งระบบเพื่อแปลค่าที่ได้จากการวัดซึ่งจากเดิมต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เมนเฟรมขนาดใหญ่ในการประมวลผล ซึ่งยังมีปัญหาเรื่องเวลาในการประมวลผลที่ต้องใช้หลายวัน การควบคุมเรื่องค่าความผิดพลาดนั้นยังไม่ได้เท่าที่ควร

หลังจากนั้นในปี 2000 Siew และ Yooyeunyong [4] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์โดยอาศัยวิธีการทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบการวัดแบบอิงความถี่ (Frequency Domain) เพื่อค้นหากลุ่มแร่ธาตุภายในพื้นโลกที่มีลักษณะเป็นแผ่นจานกลมบาง โดยตั้งสมมติฐานว่าแผ่นจานนั้นมีรัศมี 1,000 เมตร ซึ่งอยู่ใต้แผ่นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้นโดยแร่ธาตุดังกล่าวฝังอยู่บนพื้นโลกชั้นล่าง มีการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันเลขชี้กำลังเมื่อมีความลึกเพิ่มขึ้น โดยผลจากการทดลองมีค่า Random Error สูงสุดเพียง 3% อย่างไรก็ตามงานวิจัยของ Siew และ

Yooyeunyong นั้นเป็นการศึกษาการทำแบบจำลองเพียง 2 ชั้นเท่านั้น ในเวลาต่อมาได้มีผู้ศึกษาการทำแบบจำลองแบบ n ชั้น

ในปี 2003 Chen และ Odenburg [5] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น n ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับผิวโลก โดยแต่ละชั้นมีสภาพการนำไฟฟ้าคงตัวและมีความลึกจำกัดยกเว้นชั้นล่างสุดที่มีความลึกเป็นอนันต์ ซึ่งการสร้างโมเดลของ Chen และ Odenburg นั้นสามารถประยุกต์ ในการหาแร่ธาตุ หรือประเภทของวัตถุที่อยู่ภายใต้พื้นโลกได้

ในปี 2010 งานวิจัย [6] ผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแก้สมการแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้ไลบรารี Message Passing Interface(MPI) เพื่อใช้ในการอินทิเกรต โดยแบ่งงานออกเป็นความกว้างจำนวนเท่าๆ กัน ซึ่งสามารถอินทิเกรตได้อย่างถูกต้อง แต่อย่างไรก็ดีการแบ่งงานจำนวนเท่าๆ กัน ผู้วิจัยได้พบว่าแต่ละช่วงของการแบ่งงานนั้นจะใช้เวลาในการประมวลผลไม่เท่ากัน ทำให้มีบางโหนดนั้นที่ทำงานเสร็จก่อนต้องรอโหนดอื่นๆ และไม่สามารถทำงานได้

ต่อมาผู้วิจัยได้พัฒนาตัวกระจายงาน [7] โดยการนำงาน [6] นั้นมาปรับปรุงโดยแทนที่จะแบ่งงานให้ทุกๆ โหนดจำนวนเท่ากัน และแบ่งงานให้ออกเป็นชั้นย่อยๆ ขนาดเล็ก และมีโหนดรากเป็นตัวกระจายงานไปยังโหนดต่างๆ จนกระทั่งงานที่ต้องประมวลผลถูกประมวลผลครบทั้งหมด ซึ่งในงานวิจัยนี้สามารถลดเวลาในการประมวลผลได้มาก

แต่อย่างไรก็ดี การใช้ตัวกระจายงานใน [7] ก็ยังมีปัญหาอยู่เมื่อทำงานกับโหนดที่มีหลายหน่วยประมวลผลในเครื่องเดียว ผู้วิจัยพบว่ายังมีการใช้หน่วยประมวลผลที่ยังไม่เต็มที่ โดยพบว่าโหนดที่มีหลายหน่วยประมวลผลในโหนดเดียวจะใช้เพียงหน่วยประมวลผลแรกเท่านั้น โดยในงานวิจัย [7] นั้นสามารถลดเวลาในการประมวลผลได้ถึง 97.10% แต่ทางผู้วิจัยคาดว่าหากใช้หน่วยประมวลผลทุกตัวได้อย่างเต็มประสิทธิภาพสามารถลดเวลาในการประมวลผลได้อีกมาก

งานวิจัยนี้ได้มีวัตถุประสงค์ในการทำวิจัยดังนี้

1. เพื่อพัฒนาเครื่องมือเพื่อหาคำตอบให้กับสมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเพื่อใช้ในการสำรวจ
2. เพื่อให้การประมวลผลแบบขนาน และสามารถทำงานได้ดีบนโหนดที่มีหลายหน่วยประมวลผลโดยใช้ OpenMP ร่วมกับการทำงานแบบขนานบนคลัสเตอร์เพื่อเร่งการหาคำตอบ
3. เพื่อนำเครื่องมือที่พัฒนาได้ไปใช้ร่วมกับเครื่อง SYSCAL Kid เพื่อทำการสร้างแผนที่ภายใต้พื้นผิวโลก
4. สามารถประยุกต์นำตัวหาคำตอบของสมการนี้ไปใช้งานกับสมการอื่นๆ ที่มีลักษณะใกล้เคียงกัน คือ สมการที่ถูกแปลงในลักษณะการแปลงแฮนเคิล (Hankel)

2. สมการคณิตศาสตร์

ในการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการจำลองนี้ ได้มีการใช้สมการแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกเวลล์ (Maxwell's Equations) [8], [9] ซึ่งมีหลายสมการ แต่สมการที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้คือในสมการที่ (1) และ (2)

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad (1)$$

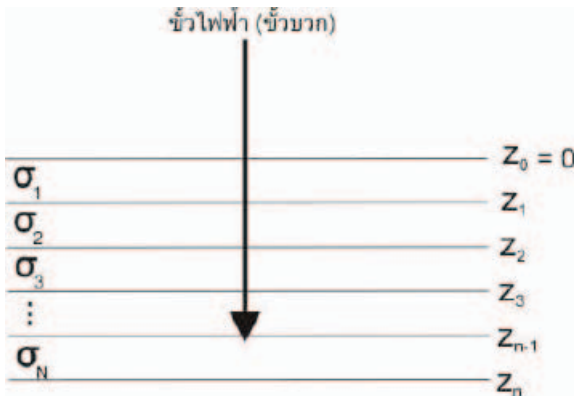
$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

จากสมการที่ (1) และ (2) เมื่อนำมารวมกันสามารถแปลงอยู่ได้ในรูปของสมการที่ (3)

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{H} = \vec{0} \quad (3)$$

โดยที่ H เป็นเวกเตอร์ความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและค่าซิกมา (σ) เป็นสภาพการนำไฟฟ้า (Conductivity) ซึ่งจะบอกถึงค่าการนำไฟฟ้าของวัตถุที่อยู่ใต้พื้นโลก [9] ซึ่งวัตถุต่างชนิดกันจะมีค่าการเหนี่ยวนำของสนามแม่เหล็กที่ต่างกัน ซึ่งเป็นค่าที่ต้องการหาเพื่อใช้เทียบหาประเภทของวัตถุเพื่อสร้างเป็นแบบจำลองต่อไปซึ่งจำเป็นต้องแก้สมการที่ล่ำลำดับดังในรูปที่ 1

โดยในทางปฏิบัติแล้ว การแก้สมการ (3) โดยตรง



รูปที่ 1 แบบจำลองโดยค่าของ σ คือการเหนี่ยวนำของวัสดุแต่ละชั้นและ z เป็นความลึกแต่ละชั้น

ทำได้ยาก จึงต้องทำการแตกสมการออกในรูปแบบสเกลาร์ในพิกัดของทรงกระบอก ดังในสมการที่ 4 [10]

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial H}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} \right) H = 0 \quad (4)$$

ในรูปที่ 1 จะแสดงลักษณะของโมเดลที่ศึกษาอยู่ ซึ่งมีลักษณะเป็นชั้นๆ

จากสมการที่ (4) นั้น r เป็นระยะระหว่างตัวกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและเครื่องวัด ซึ่งจากสมการ (4) นั้นหาผลเฉลยได้ยากในทางปฏิบัติ จึงต้องมีการแปลงแบบแฮนคัล (Hankel's Transformation) เพื่อทำให้หาผลเฉลยได้ง่ายขึ้น โดยการแปลงแบบแฮนคัล [11] ในลำดับ ν ของฟังก์ชัน $f_\nu(k)$ นั้น สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (5)

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(r) J_\nu(kr) r dr \quad (5)$$

ทางผู้วิจัยจึงได้แปลงสมการ (4) โดยใช้สมการ (5) และจะใช้เครื่องหมาย $\tilde{H}$ สำหรับฟังก์ชันที่ถูกแปลงโดยการแปลงของแฮนคัล โดยจะแสดงในสมการ (6) และการแปลงนั้นสามารถแปลงกลับได้ในสมการ (7)

$$\tilde{H}(\lambda, z) = \int_0^\infty \lambda r H(r, z) J_1(\lambda r) dr \quad (6)$$

$$H(r, z) = \int_0^\infty \tilde{H}(\lambda, z) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (7)$$

ในสมการ (6) และ (7) $J_n(x)$ เป็นเบสเซลฟังก์ชัน (Bessel Function) ในลำดับที่ n ซึ่งฟังก์ชันเบสเซลโดยทั่วไปแล้วสามารถคำนวณได้โดยใช้สมการ (8) ซึ่งค่าที่คำนวณได้เป็นค่าประมาณ

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \sin \tau) d\tau \quad (8)$$

แต่อย่างไรก็ตาม โลบราจี GSL ที่ผู้วิจัยใช้นั้น จะใช้วิธี Recurrence Relations เพื่อให้หาคำตอบได้รวดเร็วขึ้น และคำตอบที่ได้ยังคงแม่นยำเพียงพอที่จะใช้ในงานนี้ เมื่อได้สมการ (6) แล้วนั้น จะสามารถเขียนสมการ (4) ได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial z^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z} - \lambda^2 \tilde{H} = 0 \quad (9)$$

โดยเมื่อพิจารณาสภาพการนำไฟฟ้าว่าเป็นค่าคงตัว จะได้เป็นสมการ (10)

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial z^2} - \lambda^2 \tilde{H} = 0 \quad (10)$$

โดยคำตอบทั่วไปของสมการ (10) สำหรับพื้นโลกชั้นที่ k โดยที่ $1 \leq k \leq n$ และ $n \geq 2$ คือ [12],[13]

$$\tilde{H}_k(r, z) = A_k e^{-\lambda z} + B_k e^{\lambda z} \quad (11)$$

จากนั้นนำสมการ (11) เข้าไปแทนในสมการ (7) เพื่อได้สมการสุดท้ายคือสมการ (12) [12],[13] ซึ่งเป็นสมการคำตอบทั่วไป

$$H_k(r, z) = \int_0^\infty (A_k e^{-\lambda z} + B_k e^{\lambda z}) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (12)$$

โดยในสมการ (12) นั้น ค่า A และ B จะเป็นค่าคงที่ที่ได้จากการวัดจากจุดบนพื้นดินที่ต้องการ ค่า λ เป็น Hankel Parameter, r เป็นระยะห่างระหว่างตัวกำเนิด

และเครื่องวัด และ z เป็นความลึกในชั้นของพื้นที่โลกที่สนใจ ซึ่งสมการนี้มีความถี่สูงมาก การแก้สมการแบบนี้จึงต้องการการประมวลผลเพื่อทำการอินทิเกรตสมการนี้แบบขนานเพื่อลดเวลาในการอินทิเกรตลง โดยในที่นี้ผู้วิจัยใช้วิธีอินทิเกรต Gaussian Quadrature โดยใช้ MPI และ OpenMP ในการประมวลผลแบบขนานบนคลัสเตอร์ [6], [7], [15]-[17]

3. วิธีการที่นำเสนอ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้มีแนวคิดในการหาผลเฉลยของสมการแม่เหล็กไฟฟ้าบนตัวกลางแบบวิวิธพันธุ์สำหรับพื้นโลกแบบหลายชั้นด้วยการประมวลผลแบบขนานเพื่อลดเวลาในการประมวลผลและผิดพลาดน้อยลงไม่เกิน 10^{-14} โดยเริ่มแรกได้มีการแบ่งงานต่างๆ ให้มีขนาดเท่าๆ กัน และจึงแยกให้แต่ละโหนด ทำการอินทิเกรต เพื่อเป็นการกระจายงาน หลังจากนั้นจึงมีการรวมงานกันอีกครั้ง โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.1 การแบ่งงานแบบเท่ากันทุกโหนด

ในการเริ่มต้นของการสร้างตัวแก้สมการนั้น [6] ได้เริ่มการอินทิเกรตโดยใช้อาร์เรย์ 1 มิติ และได้แบ่งงานให้แต่ละโหนดบนคลัสเตอร์ทำขนาดเท่าๆ กัน และไม่มีตัวกระจายงาน ซึ่งจะใช้หมายเลขประจำโหนดเป็นตัวกำหนดงานในแต่ละเครื่อง โดยการอินทิเกรตแบบขนานนั้นผู้วิจัยได้แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนย่อยๆ คือ

3.1.1 การหาช่วงการอินทิเกรต

จากสมการ (10) นั้นได้อยู่ในรูปของการอินทิเกรตไปถึงจุดอนันต์ ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วนั้นไม่สามารถอินทิเกรตถึงจุดอนันต์ได้ จึงต้องมีการหาระยะในการอินทิเกรตที่เหมาะสม ซึ่งสมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน (12) นั้นจะมีการเข้าสู่ 0

ผู้วิจัยจึงได้ทดลองกำหนดช่วงของการอินทิเกรตและทำการทดลองอินทิเกรตอย่างหยาบที่ละส่วนเริ่มที่จุดเริ่มต้นคือ 0 ซึ่งทางผู้วิจัยเลือกวิธีการอินทิเกรตตามกฎของสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangle Rule) เพื่อให้สามารถอินทิเกรตได้รวดเร็วเพื่อทดสอบว่าในช่วงที่แบ่งออกมานั้นเข้าใกล้ 0 หรือไม่ หากเข้าใกล้ 0 เพียงพอแล้วจึง

หยุด และเลือกจุดนั้นเป็นจุดปลายทางของการอินทิเกรตทางผู้วิจัยได้นำข้อมูลตัวอย่างมาทดลองการแบ่งช่วงทดสอบหาระยะอินทิเกรตโดยแบ่งเป็นระยะ 1, 2, 5, 10, 20, 50 และ 100 ตามลำดับ ซึ่งระยะเวลาในการหาช่วงการอินทิเกรตแสดงได้ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เวลาที่ใช้ในการแบ่งช่วงการอินทิเกรตเพื่อทดสอบหาระยะอินทิเกรต โดยการช่วงของการอินทิเกรตขนาดต่างๆ

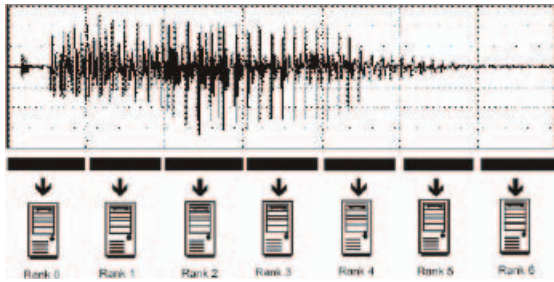
ช่วงการอินทิเกรต	ระยะเวลาที่ใช้ (วินาที)
1	101.9
2	92.5
5	80.1
10	88.3
20	46.7
50	52.2
100	120.4

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่าการแบ่งช่วง โดยใช้ช่วงของการอินทิเกรตกว้าง 20 นั้น จะใช้เวลาน้อยที่สุด จึงเลือกใช้ช่วงละ 20 ในการแบ่งค่า ซึ่งสามารถเขียนเป็น Pseudocode ได้ดังนี้

```
FUNCTION FINDINTEGRATERANGE
RANGE:=0
SUBRANGE:=20
MAXERROR:= 10^-20
RESULT = <MAXINT>
WHILE RESULT > MAXERROR DO
    RESULT = integrate from RANGE to
    RANGE+20
    RANGE = RANGE + 20
END WHILE
RETURN RANGE
```

3.1.2 การแบ่งงาน

สำหรับการแบ่งงานที่จะให้แต่ละโหนดประมวลผลนั้นได้แบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็นช่วงที่เท่าๆ กัน โดยทางผู้วิจัยได้แสดงตัวอย่างการแบ่งงานจำนวนเท่าๆ กันในการอินทิเกรตแบบขนานบนคลัสเตอร์ โดยใช้ 7 โหนดตามรูปที่ 2



รูปที่ 2 การแบ่งงานแบบแรกที่ใช้โดยใช้ 7 โหนด

3.1.3 การอินทิเกรตแบบขนาน

ผู้วิจัยได้เลือกใช้ GNU Scientific Library (GSL) [14] เพื่อประมาณค่าของฟังก์ชันเบสเซลลำดับที่ 1 ในสมการ (10) ผ่านฟังก์ชันที่มีชื่อว่า *gsl_sf_bessel_J1()* ซึ่งโหนดลำดับ 0 ซึ่งเป็นโหนดรากจะเป็นตัวกระจายงานไปให้โหนดอื่นๆ โดยการใช้ blocking communication โดยคำสั่ง MPI_Send หลังจากนั้นทุกๆ โหนดจะเริ่มทำงานพร้อมๆ กัน และเมื่อแต่ละโหนดทำการประมวลผลเสร็จ โหนดรากจะใช้ Collective Operation MPI_Allreduce โดยใช้โอเปอเรเตอร์ MPI_SUM ในการรวบรวมผลลัพธ์จากโหนดต่างๆ เข้าด้วยกัน

ในการอินทิเกรตนั้น ผู้วิจัยได้เลือกใช้ฟังก์ชัน QAG (*gsl_integration_qag*) ของไลบรารี GSL ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตโดยที่สามารถเลือกช่วงของการอินทิเกรต และจุดสิ้นสุดของการอินทิเกรต และเลือกจุดเกาส์แบบ 61 จุด ซึ่งมีแม่นยำสูงสุด

ทางผู้วิจัยได้กำหนดให้ค่า Speedup ของการประมวลผลแบบขนานกำหนดโดย $S_p = t_1 / t_p$ โดยที่ t_1 เป็นเวลาเฉลี่ยของการประมวลผลแบบ Sequential และ t_p เป็นเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในแบบขนานบนโปรเซสจำนวน p

ผลจากการทดลองการแบ่งงานตามรูปที่ 2 ผู้วิจัยได้ค่า Speedup จากการแบ่งงานแบบคงที่ทุกโหนดได้เป็น 18.03 บนคลัสเตอร์ 32 โหนด โดยจะพบว่าบางโหนดนั้นเสร็จก่อน และใช้เวลาเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ในขณะที่บางโหนดเช่นโหนดหลังๆ จะใช้เวลาทำงานมาก ทั้งนี้ผู้วิจัยได้ให้ข้อสังเกตว่า อาจเป็นเพราะสัมประสิทธิ์เลขยกกำลัง

ซึ่งมีผลกับค่าแลมบ์ด้าที่เพิ่มขึ้นโดยตรง ทำให้โหนดหลังๆ สัมประสิทธิ์สูงมาก ทำให้การอินทิเกรตทำได้ช้าตามสัมประสิทธิ์ที่เพิ่มขึ้น

เมื่อโหนดลำดับแรกๆ ทำการประมวลผลเสร็จนั้น จะต้องรอให้โหนดหลังๆ ทำงานเสร็จ แล้วจึงสามารถใช้ MPI_Allreduce เพื่อรวมผลการอินทิเกรตได้ โดยผู้วิจัยได้ศึกษาเวลารวมที่ทุกโหนดว่างงาน พบว่าเวลาที่แต่ละโหนดว่างงานนั้น เมื่อเพิ่มจำนวนโหนดขึ้น เวลารวมของการว่างงานจะเพิ่มขึ้น โดยเมื่อเพิ่มจำนวนโหนดเป็น 32 โหนดนั้น จะมีเวลาว่างงานรวมทุกโหนดมากถึง 137,573 วินาที

จากเวลาว่างที่พบ ผู้วิจัยจึงมีความคิดที่จะแบ่งงานออกให้เป็นชั้นที่เล็กลง และมีตัวกระจายงานโดยเฉพาะเพื่อแก้ปัญหาดังที่กล่าวมา ซึ่งหากตัวกระจายงานพบว่าโหนดไหนว่างอยู่ จะสามารถส่งงานนั้นให้กับโหนดที่ว่างงานอยู่ได้ทันที

3.2 การใช้ตัวกระจายงาน

ในการพัฒนานี้ การหาระยะการอินทิเกรตนั้นจะเหมือนกับการหาระยะอินทิเกรตในแบบการแบ่งงานแบบคงที่ (ขั้นตอนที่ 4.1) ซึ่งเมื่อหาช่วงของการอินทิเกรตได้แล้วจะเลือกให้โหนดลำดับที่ 0 เป็นตัวกระจายงาน โดยเป็นตัวคอยรับการร้องขอของงานจากโหนดอื่นๆ และส่งงานไปให้โหนดอื่น รวมทั้งเป็นตัวรับและรวมผลของการอินทิเกรตของโหนดต่างๆ

ในการเริ่มต้นการทำงานนั้นตัวกระจายงานจะส่งข้อมูลที่ต้องประมวลผล ซึ่งข้อมูลนั้นเป็นระยะเริ่มต้นและสิ้นสุดการอินทิเกรต ทำการส่งไปยังโหนดต่างๆ เมื่อโหนดใดโหนดหนึ่งทำการประมวลผลเสร็จแล้วก็ทำการส่งผลลัพธ์ไปยังโหนดกระจายงาน และโหนดกระจายงานจะตรวจสอบว่ามีงานเหลืออีกหรือไม่ หากมีก็จะส่งไปให้โหนดที่เสร็จแล้วทำงานต่อ

หากมีโหนดใดโหนดหนึ่งส่งผลลัพธ์ไปยังตัวกระจายงานแล้ว ตัวกระจายงานก็จะหยุดส่งงาน และรอคอยผลลัพธ์การประมวลผลจากโหนดอื่นๆ จนครบ แล้วจึงรวมผลลัพธ์เข้าด้วยกัน แล้วจบการทำงาน

อย่างไรก็ตาม การกระจายแล้วรับงานของโหนด

กระจายงานนั้นใช้หน่วยประมวลผลไม่มาก ทางผู้วิจัยจึงไม่ต้องการสูญเสียหน่วยประมวลผลสำหรับกระจายงานไป 1 โหนดจากการประมวลผล ผู้วิจัยจึงใช้โอเพนเอ็มพีสำหรับแบ่งโปรเซสออกเป็น 2 เธรด โดยเธรดแรกจะทำหน้าที่เป็นตัวกระจายงาน และอีกเธรดหนึ่งจะทำหน้าที่เป็นโหนดประมวลผลเหมือนกับโหนดอื่นๆ

ตัวอย่างการทำงานระหว่างโหนดสำหรับกระจายงานและโหนดอื่นๆ โดยการเลือกขนาดของช่วงการอินทิเกรตเป็น 2 สามารถแสดงได้ตามรูปที่ 3 [7]

ทางผู้วิจัยได้แบ่งงานเป็นขนาดต่างๆ คือ 1, 2 และ 4 เพื่อหาขนาดที่เหมาะสมที่สุดในการกระจายงาน โดยผลการทดลองจาก [7] จะพบว่าการแบ่งขนาดงานเป็น 2 จะใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าขนาด 1 และ 4 เล็กน้อย ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกขนาด 2 มาใช้ในงานวิจัยนี้

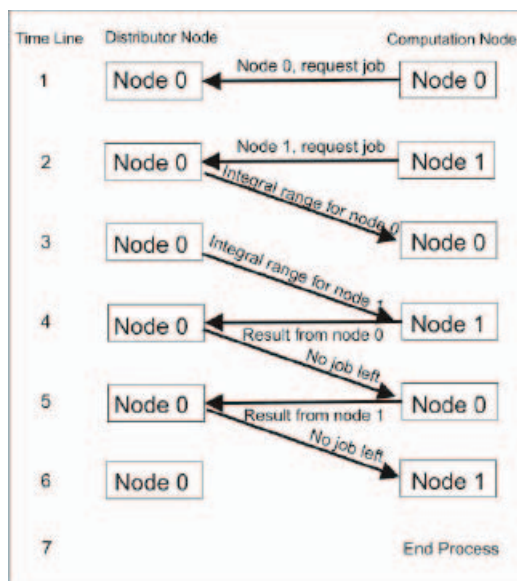
โดยการใช้ตัวกระจายงาน ผู้วิจัยจะได้ Speedup เมื่อเปรียบเทียบกับผลการประมวลผลแบบอนุกรมเพิ่มขึ้นถึง 34.46 บนคลัสเตอร์แบบ 32 โหนดเทียบกับ Speedup ที่ 18.03 ในแบบที่ไม่มีตัวกระจายงานในการแบ่งงานแบบคงที่ซึ่งวิธีนี้เป็นทำให้การกระจายงานมีประสิทธิภาพมากขึ้น

แต่อย่างไรก็ตามในงานวิจัย [7] ผู้วิจัยยังพบว่าการประมวลผลส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นใน CPU ในตัวแรก ผู้วิจัยจึงได้ทำการนำโอเพนเอ็มพีเข้ามาสร้างเธรดเพื่อให้มีการใช้งานหน่วยประมวลผลที่เป็น Intel Xeon Dual Core บนแต่ละเครื่องได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

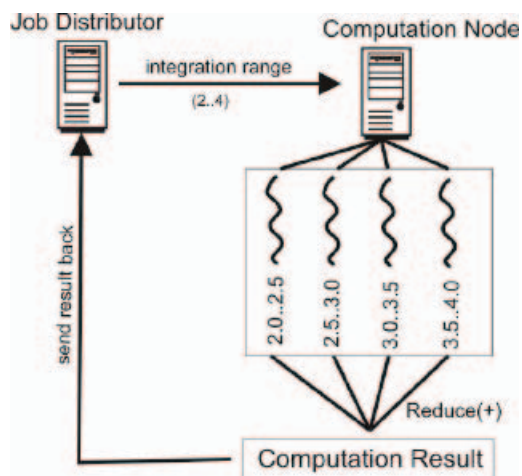
4. การผสมกับโอเพนเอ็มพี

จากการทดลองที่ผ่านมา ผู้วิจัยพบว่าขนาดของงาน 2 ให้ผลที่ดีที่สุด ผู้วิจัยจึงใช้ตัวกระจายงานในขนาดนี้ในงานวิจัย และทำการผสมระหว่างเอ็มพีไอและโอเพนเอ็มพี โดยทางผู้วิจัยได้ทดลองแบ่งเธรดภายในโปรเซสออกเป็น 2, 4 และ 8 เธรดตามลำดับ

จากการใช้ตัวกระจายงาน ทางผู้วิจัยได้ปรับให้เมื่อโหนดที่มีการแบ่งเธรดแล้วรับช่วงของการอินทิเกรตมาจากตัวกระจายงานแล้ว ให้แบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็นช่วงเท่าๆ กันจำนวนของเธรดที่ใช้ทดลองใน



รูปที่ 3 ตัวอย่างการสื่อสารระหว่างโหนดกระจายงานและโหนดอื่นๆ



รูปที่ 4 แผนผังการทำงานบนเธรด ในช่วงอินทิเกรต 2-4 จำนวน 4 เธรด

แต่ละโปรเซสนั้นให้กับแต่ละเธรดของโหนด หลังจากนั้นจึงทำการเริ่มอินทิเกรตพร้อมๆ กัน

ในรูปที่ 4 จะแสดงแผนผังขั้นตอนการประมวลผลแต่ละโหนดโดยการใช้เธรดบนโอเพนเอ็มพี

หลังจากที่ทุกเธรดประมวลผลเสร็จจะทำการ

รียกชันโดยการใช้โอเพอร์เรเตอร์ SUM แล้วจึงส่งผลลัพธ์การอินทิเกรตกลับไปยังตัวกระจายงานต่อไป

5. ผลการพัฒน

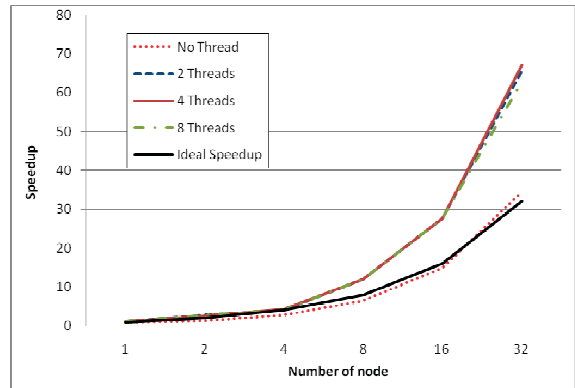
ผู้วิจัยได้ทำการทดลองบนคลัสเตอร์แบบ 32 โหนด 64 หน่วยประมวลผล โดยผ่านเครือข่ายกิกะบิตอีเทอร์เน็ต ซึ่งเชื่อมต่อกับมหาวิทยาลัย Louisiana Technology ประเทศสหรัฐอเมริกา ซึ่งแต่ละโหนดนั้นเป็นเครื่อง Intel Xeon 2.8 GHz มีหน่วยความจำ 512 MB แต่ละเครื่องรัน LAM-MPI รุ่น 7.1 และ OpenMP 3.0

หลังจากการทดลอง ผู้วิจัยได้ตรวจสอบคำตอบของการอินทิเกรตว่าถูกต้องและมีค่าความผิดพลาดน้อยกว่า 10-14 ตามวัตถุประสงค์ โดยประเมินได้จากทดสอบการอินทิเกรตกับสมการทดสอบที่ทราบผลแม่นยำ (Exact Solution) ซึ่งแบ่งเป็นสมการอนุพันธ์ที่มีความผกผันสูง และสมการที่เข้าสู่ศูนย์ช้า และผู้วิจัยได้อินทิเกรตโดยกำหนดค่าที่ค่า Relative Error ไว้ที่ 10^{-14} ค่าเฉลี่ยของระยะเวลาที่ใช้คำนวณ (t_n) เป็นวินาทีบนจำนวน N โหนดจะแสดงดังในตารางที่ 2

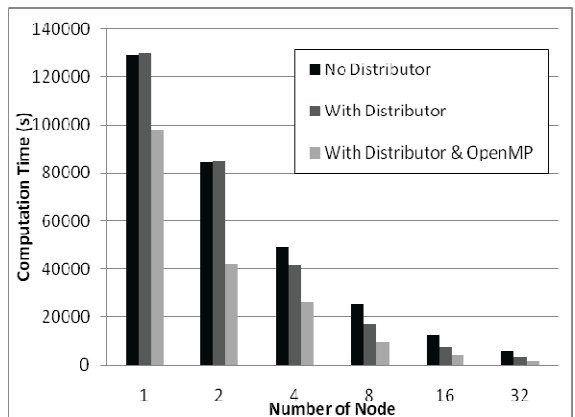
ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบระยะเวลาที่ใช้ประมวลผลที่จำนวนโหนดแตกต่างกัน

จำนวนโหนด	เวลาประมวลผลเป็นวินาที (t_n)			
	1 Thread	2 Threads	4 Threads	8 Threads
1	130146	98021	98000	97982
2	84711	41280	42213	41104
4	41773	27202	26416	27112
8	17511	9419	9380	9410
16	7550	4064	4071	4061
32	3260	1711	1677	1788

ในตารางที่ 2 นั้นจะแสดงเวลาเป็นวินาทีในการอินทิเกรตในกรณี 1, 2, 4 และ 8 เธรดตามลำดับ ส่วนในรูปที่ 5 จะแสดง Speedup ของการใช้งานเธรดในจำนวนเธรดต่างๆ กัน โดยในคลัสเตอร์แบบ 32 โหนดนั้นจะสามารถลดเวลาในการประมวลผลไปได้ถึง 48.56% ในแบบ 4 เธรดหรือลดเวลาได้ 98.71% เมื่อเทียบกับการประมวล



รูปที่ 5 การเปรียบเทียบค่า Speedup ในการอินทิเกรตด้วยวิธีการต่างๆ



รูปที่ 6 เปรียบเทียบระยะเวลาในการประมวลผลการอินทิเกรตในรูปแบบต่างๆ

ผลแบบปกติซึ่งใช้โหนดเดียวและเธรดเดียว ซึ่งผู้วิจัยคาดว่าประสิทธิภาพที่เพิ่มขึ้นอย่างมากรุนั้นมีสาเหตุมาจากการใช้หน่วยประมวลผลแบบ Multi-core ที่ดีขึ้น และการแบ่งการประมวลผลที่เล็กลงทำให้เกิด Cache Hit ที่เพิ่มขึ้น

รูปที่ 6 แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลเป็นวินาที ระหว่างการแบ่งงานแบบคงที่ การใช้ตัวแบ่งงาน และการใช้ตัวแบ่งงานกับโอเพนเอ็มพีในจำนวน 4 เธรด ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดที่ผู้วิจัยได้ทำการทดลองกับโอเพนเอ็มพี โดยแสดงในรูปแบบของ

แผนภูมิแท่ง จะเห็นว่าการใช้ตัวกระจายงานนั้นจะใช้เวลาที่น้อยกว่าการที่ไม่มีตัวกระจายงานในคลัสเตอร์ขนาด 4 โหนดขึ้นไป และนอกจากนั้นการใช้ตัวกระจายงานแบบมี 4 เธรดด้วยจะลดเวลาที่ใช้ในการประมวลผลได้ในคลัสเตอร์ทุกขนาดได้อีกประมาณ 50%

6. อภิปรายผลและสรุป

ทางผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแก้สมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า โดยได้เริ่มจากการแบ่งงานแบบเท่าๆ กัน (Fix-Size Job Partitioning) และได้พัฒนาให้มีประสิทธิภาพในการแบ่งงานที่ดีขึ้นโดยการทำให้ตัวกระจายงาน (Job Distributor) โดยได้เลือกการกระจายงานขนาด 2 บน LAM-MPI 7.1 และสุดท้ายได้พัฒนาโดยใช้เธรดโดยการควมรวมโอเพนเอ็มพีเข้ามาช่วยเพื่อให้การประมวลผลบนหลายหน่วยประมวลผลในแต่ละโหนดทำงานได้ดีขึ้น โดยมีค่า Speedup เทียบกับการประมวลผลแบบอนุกรมถึง 66.98 เท่า บน 32 โหนด และใช้ 4 เธรดในแต่ละโหนด จากข้อมูลตัวอย่างหลายๆ ชุดทางผู้วิจัยได้ตรวจสอบแล้วว่าการอินทิเกรตแบบขนานนั้นทำได้ถูกต้องแม่นยำซึ่งผู้วิจัยคาดว่าน่าจะอำนวยความสะดวกให้นักกรณิทยาที่ศึกษาโครงสร้างใต้เปลือกโลกโดยโมเดลทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมาก

ข้อมูลที่ได้จากการอินทิเกรตจะนำไปเปรียบเทียบกับตารางค่าการเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้าของวัตถุต่างๆ เพื่อหาวัสดุที่อยู่ภายใต้พื้นโลกในแต่ละชั้นเมื่อมีการประสานงานในการสำรวจครบเรียบร้อยแล้วจะนำไปสร้างเป็นโมเดลในรูปแบบ Visualization ในแต่ละพื้นที่เพื่อนำไปใช้งานในด้านอื่นๆ ต่อไป

แต่อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้ยังสามารถพัฒนาต่อยอดให้เร็วขึ้นได้อีก เนื่องจากการทำงานแบบเธรดที่ผู้วิจัยใช้อยู่นั้นจะต้องมีการสร้างและทำลายเธรดทุกครั้งที่มีการประมวลผลซึ่งอาจจะใช้หน่วยประมวลผลและทรัพยากรบางส่วนจึงมีความคิดที่จะใช้ Thread Pool เพื่อลดปัญหานี้ในอนาคต นอกจากนั้นผู้วิจัยยังไม่ได้ศึกษาว่ามีการใช้ระบบเครือข่ายมากเพียงใด และสามารถลดการติดต่อสื่อสารระหว่างโหนดได้หรือไม่ นอกจากนี้ทางผู้วิจัยนั้นยัง

ไม่ได้เก็บข้อมูลด้านเวลาที่ใช้ในการสื่อสารระหว่างโหนดซึ่งในอนาคตทางผู้วิจัยอาจพัฒนาวิธีการสื่อสารระหว่างโหนดที่ใช้เวลาน้อยลงเพื่อให้เวลาโดยรวมนั้นลดลง

7. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยชิ้นนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ทางผู้วิจัยขอขอบคุณ รศ. ดร. โชคชัย เหลืองสุขสันต์ อาจารย์ประจำมหาวิทยาลัย Louisiana Technology ที่อนุญาตให้ใช้คลัสเตอร์ขนาด 32 โหนดแบบ Dual Core Xeon สำหรับการทดลองและวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Iris Instruments, "SYSCAL Kid Specification," [Online]. Available: http://www.iris-instruments.com/Pdf/%20file/Kid_Gb.pdf
- [2] B. Banerjee, B. J. Sengupta, and B. P. Pal, "Apparent resistivity of a multilayered earth having exponential varying conductivity," *Geophysical Prospecting*, vol. 28, pp.435-452, 1980.
- [3] P. C. Dhanasekaran and M. Poddar, "A FORTRAN program to compute vertical magnetic field of a horizontal rectangular loop on n-layered earth for em depth sounding," *Computer and Geosciences*, vol.10 Issue 7, pp.385-396, 1984.
- [4] S. Yooyuanyong and Chumchob, "Mathematical modeling of electromagnetic sounding for a conductive 3-D circular cylinder body embedded in half-space," *Proceeding of the third Asian Mathematical Conference*, pp.590-603, 2000.
- [5] J. Chen and D. W. Oldenburg, "Magnetic and electrical fields of direct currents in a layered earth," *Exploration Geophysics*, vol. 35, pp. 157-163, 2004.
- [6] B. Dolwithayakul, C. Chantrapornchai and S.

- Yooyeunyong, "Solving Magnetic Sounding Integral Equations from Multilayer Earth Using Message Passing Interface," *Proceeding of ANSCSE 2010*, pp.31-36, 2010.
- [7] B. Dolwithayakul, C. Chantrapornchai, and S. Yooyeunyong, "Magnetic Sounding from Multilayered Earth Equations Solver Using Job Distributor Based on Message Passing Interface," *ECTI-CON 2010*, pp. 308-312, 2010.
- [8] J. C. Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field," *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, vol. 155, pp. 459-512, 1865.
- [9] R. A. Serway and J. W. Jewett, *Principle of Physics: a calculus-based text*, Tomson, 2006, pp. 809 – 812.
- [10] A. Jeffrey, *A Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*, Academic Press, London, 1995.
- [11] A. D. Chave, "Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion," *Geophysics*, vol. 48, pp.1671-1686, 1983.
- [12] H. S. Kim and K. Lee, "Response of a multilayered earth with a layer having exponential vary resistivity," *Geophysics*, vol. 61, pp.180-191, 1996.
- [13] S. S. Raghuvanshi and B. Singh, "Resistivity sounding on a horizontally stratified varying resistivities," *Geophysical Prospecting*, vol. 34, pp.409-423, 1986.
- [14] GNU Organization, "Full documentation for GNU Scientific Library," 2009 [Online]. Available: www.gnu.org
- [15] M. Bebendorf and R Kriemann, "Fast parallel solution of boundary integral equations and related problems," *Comput Vis. Sci*, vol. 8, pp.121-135, 2005.
- [16] M. J. Quinn, *Parallel Programming in C with MPI and OpenMP*, McGraw-Hill, 2004, pp. 318-335.
- [17] S. Rjasanow and O. Steinbach, *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*, Springer, 2007, pp.135-160.