

## การออกแบบตัวควบคุม $H_\infty$ คงทนด้วยเงื่อนไขบังคับโพลบริเวณ เชิงพาราโบลา

### ROBUST $H_\infty$ CONTROLLER DESIGN WITH PARABOLIC POLE CONSTRAINTS

อดิศักดิ์ กาญจนหฤทัย

อาจารย์ประจำ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า วิทยาลัยวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยรังสิต

#### บทคัดย่อ

จุดมุ่งหมายของบทความนี้คือ การศึกษาปัญหาของการออกแบบตัวควบคุมสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนด้วยเงื่อนไขบังคับโพลเชิงพาราโบลา ปัญหาที่เราพิจารณานี้เป็นการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะภายใต้ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นที่ทำให้ระบบวงรอบปิดเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับสมรรถนะ  $H_\infty$  ของฟังก์ชันถ่ายโอนจากสัญญาณขาเข้าไปยังสัญญาณออกที่พิจารณา และเงื่อนไขบังคับโพลเชิงพาราโบลาที่กำหนด จากนั้นจะให้เงื่อนไขในการคำนวณหาตัวควบคุม ซึ่งสามารถแสดงในพจน์ของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น สุดท้ายแสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองของตัวควบคุมที่นำเสนอ กับตัวควบคุมที่ได้รับจากการออกแบบที่มีอยู่

**คำสำคัญ:** การควบคุมสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทน, การวางตำแหน่งโพล

#### ABSTRACT

The aim of this paper is to investigate the problem of robust  $H_\infty$  controller design with parabolic pole constraints. The problem we address is to design a state feedback controller such that, for all admissible parameter uncertainties, the closed-loop system satisfies not only the pre-specified  $H_\infty$  norm constraint on the transfer function from the disturbance input to the system output, but also the pre-specified parabolic pole constraint. The conditions for the existence of desired controllers are derived in terms of a linear matrix inequality (LMI). From the simulation results, the system responses with the proposed controller and the existing controller are compared.

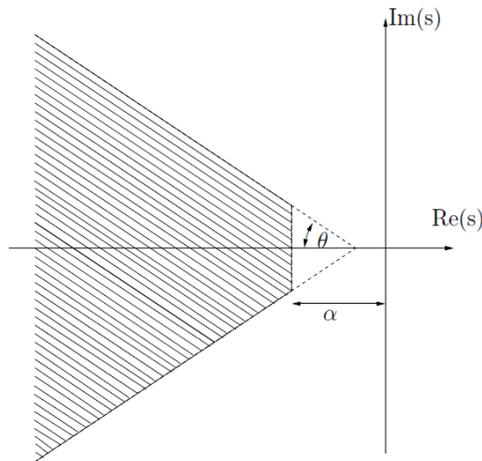
**KEYWORDS:** robust  $H_\infty$  control, pole placement

## 1. บทนำ

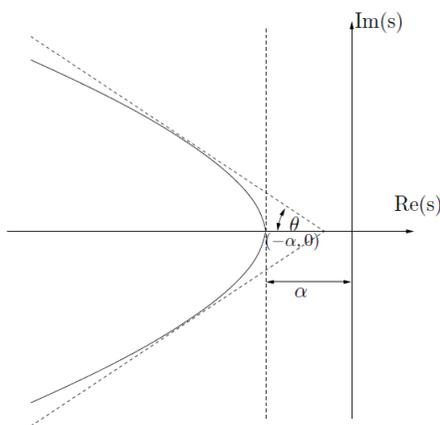
ปัญหาของการควบคุมสมรรถนะ  $H_\infty$  ได้รับความสนใจเป็นอย่างมากเช่น การลดทอนสัญญาณรบกวน (disturbance attenuation) การสร้างเสถียรภาพคงทน (robust stabilization) ของระบบที่มีความไม่แน่นอน เป็นต้น ปัญหาดังกล่าวพิจารณาการควบคุมสมรรถนะ  $H_\infty$  ซึ่งทำการออกแบบตัวควบคุมซึ่งนำเสนอโดย Doyle และคณะ [1] แต่ปัญหาคือผลของความไม่แน่นอน ทำให้การออกแบบที่ได้ไม่สามารถรับประกันในส่วนของสมรรถนะ  $H_\infty$  ที่ต้องการได้ ดังนั้นปัญหาของการควบคุมสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทน (robust  $H_\infty$  control) ได้รับความศึกษาในลำดับต่อมา แต่การออกแบบตัวควบคุมโดยใช้สมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนนี้ ไม่คำนึงถึงผลตอบสนองชั่วคราวและตำแหน่งโพลวงรอบปิด และเป็นที่ยอมรับกันว่าสิ่งที่ต้องการอันดับแรกในการควบคุม คือการสร้างเสถียรภาพและสำหรับระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรตามเวลา การสร้างเสถียรภาพมีความสัมพันธ์กับตำแหน่งโพลของระบบวงรอบปิดโดยตรง ซึ่งหมายความว่า ตำแหน่งโพลของระบบวงรอบปิดเป็นตัวกำหนดผลตอบสนองชั่วคราวให้มีความรวดเร็วหรือช้า หรือมีการแกว่ง (oscillation) มากหรือน้อยตามต้องการ ขึ้นกับตำแหน่งโพล ซึ่งสามารถแสดงบริเวณของตำแหน่งโพลที่ต้องการได้ในรูปที่ 1 จากบริเวณพื้นที่ที่ต้องการพบว่า เราสามารถกำหนดขอบเขตของช่วงเวลาเข้าที่ (settling time) ได้จากการวางตำแหน่งโพลให้มีค่าส่วนจริงน้อยกว่าขนาด  $-\alpha$  หรือสามารถกำหนดค่าพุ่งเกินสูงสุด (maximum overshoot) และให้มีการแกว่ง (oscillation) มากหรือน้อยตามต้องการ เนื่องจากคุณลักษณะทั้งสองนี้มีความสัมพันธ์กับอัตราหน่วง (damping ratio) นอกจากนี้เราสามารถกำหนดผลตอบสนองของระบบวงรอบปิดให้มีความเร็วหรือช้าได้ตามต้องการ เนื่องจากเราเลือกกำหนดจากโพลเด่น (dominant poles) ให้อยู่ห่างจากแกนจินตภาพ (imaginary axis) ที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่า ผลตอบสนองชั่วคราวมีความสัมพันธ์กับตำแหน่งโพลที่อยู่บริเวณดังกล่าว อย่างไรก็ตาม บริเวณที่ใช้ในการกำหนดตำแหน่งโพลที่นิยมใช้มีหลายลักษณะเช่น บริเวณวงกลม วงรี ส่วนวงบริเวณพาราโบลา และบริเวณแนวตั้ง เป็นต้น ซึ่งมีนักวิจัยเป็นจำนวนมากได้ศึกษาการออกแบบตัวควบคุมที่กำหนดโพลให้อยู่ในบริเวณดังกล่าว ทั้งที่รวมและไม่รวมผลของความไม่แน่นอน [2]-[5]

อย่างไรก็ตาม การรวมปัญหาการควบคุมสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนและการวางตำแหน่งโพลในบริเวณที่ต้องการเพื่อให้ระบบวงรอบปิดมีเสถียรภาพคงทนพร้อม ๆ กันนั้นยังสามารถปรับปรุงผลตอบสนองชั่วคราวได้ตามต้องการมีจำนวนไม่มากนัก [6]-[12] ดังนั้นบทความนี้จึงนำเสนอการออกแบบตัวควบคุมสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนด้วยเงื่อนไขบังคับโพลบริเวณเชิงพาราโบลา เพื่อให้ระบบวงรอบปิดมีเกณฑ์สมรรถนะตามที่กำหนดและสำหรับการเลือกพิจารณาเงื่อนไขบังคับโพลบริเวณพาราโบลารูปที่ 2 เรามีเหตุผลดังต่อไปนี้

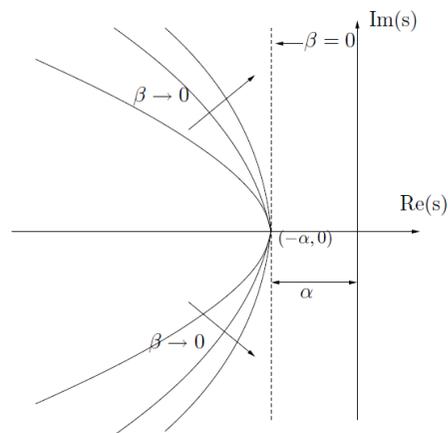
จากคุณสมบัติของฟังก์ชันพาราโบลา  $\beta y^2 < -2(x + \alpha)$  เมื่อให้ค่า  $\beta \rightarrow 0$  จะเห็นว่าเราสามารถกำหนดโพลให้อยู่ด้านซ้ายมือของแกน  $x < -\alpha$  และทำนองเดียวกันเราพบด้วยว่าแกนตั้งกล่าวจะมีการเลื่อนไปเป็นแกนจินตภาพตั้งแสดงในรูปที่ 3 เมื่อให้  $\alpha = 0$  นอกจากนี้การออกแบบตัวควบคุมที่นำเสนอนี้ จะสามารถกลับคืนสู่การออกแบบตัวควบคุมสมรรถนะ  $\mathcal{H}_\infty$  มาตรฐานเมื่อให้ค่า  $\beta \rightarrow 0$  และ  $\alpha = 0$  สำหรับการออกแบบตัวควบคุมสมรรถนะ  $\mathcal{H}_\infty$  มาตรฐานนี้ สามารถคำนวณได้โดยใช้เงื่อนไขบังคับ LMI ที่ถูกนำเสนอโดย Boyd และคณะ [13]



รูปที่ 1 พื้นที่ที่ต้องการวางตำแหน่งโพล (พื้นที่แรงงา)



รูปที่ 2 พื้นที่  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$



รูปที่ 3 พื้นที่  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$  เมื่อมีการปรับค่า  $\beta$

นอกจากนี้อาจมีคำถามอีกว่า ความแตกต่างของบริเวณส่วนวงและพาราโบลาต่างกันอย่างไร คำตอบคือจากรูปที่ 2 บริเวณพาราโบลาเป็นเพียงการประมาณของบริเวณส่วนวง แต่จะแตกต่างกัน ถ้ามีการเลือกใช้บริเวณส่วนวงแทนพาราโบลาเมื่อให้  $\theta = 90^\circ$  และทั้งสองบริเวณจะกลับคืนสู่แกนจินตภาพเมื่อ  $\theta = 90^\circ$  และ  $-\alpha = 0$  การออกแบบตัวควบคุมที่รวมทั้งสมรรถนะ  $\mathcal{H}_\infty$  คงทนกับเงื่อนไขขั้วบังคับโพลบริเวณส่วนวงพร้อม ๆ กันที่นำเสนอไม่สามารถหาได้จากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเพียงชุดเดียว ซึ่งเห็นได้จาก Chilali และ Gahinet [9] ได้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมที่รวมทั้งสมรรถนะ  $\mathcal{H}_\infty$  และเงื่อนไขขั้วบังคับบริเวณส่วนวง ซึ่งเป็นการหาส่วนร่วม (intersection) ของผลเฉลยที่ได้จากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น 2 ชุด แต่ตัวควบคุมในบทความนี้จะหาจากผลเฉลยของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเพียงชุดเดียวแทน

ลำดับเนื้อหาในบทความนี้เป็นดังนี้ ตอนที่ 2 กล่าวถึงการกำหนดปัญหาที่พิจารณา ตอนที่ 3 กล่าวถึงบทตั้ง (Lemma) ที่จำเป็นต้องใช้ในการวิเคราะห์สมรรถนะคงทนพร้อมด้วยการกล่าวถึงนิยามของระบบที่มีการรวมผลของสมรรถนะ  $\mathcal{H}_\infty$  และเงื่อนไขขั้วบังคับโพลบริเวณพาราโบลาที่กำหนด และทฤษฎีที่ได้ ตอนที่ 4 กล่าวถึงทฤษฎีที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมสถานะป้อนกลับ ตอนที่ 5 นำเสนอตัวอย่างเชิงเลข และสุดท้าย ตอนที่ 6 กล่าวถึงบทสรุป

สัญกรณ์ (Notation) ที่ใช้ในบทความนี้มีดังนี้  $\mathbb{R}$  แทนด้วยเซตของจำนวนจริง  $\mathbb{R}^n$  แทนด้วยเซตของเวกเตอร์ค่าจริงที่มีมิติ  $n$  และ  $\mathbb{R}^{m \times n}$  แทนด้วยเซตของเมทริกซ์ที่มีค่าจริงซึ่งมีมิติขนาด  $m \times n$  สำหรับเมทริกซ์  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A'$  แทนด้วยการสลับเปลี่ยน (transpose) ของเมทริกซ์  $A$  เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity) แทนด้วยสัญลักษณ์  $I$  สำหรับเมทริกซ์สมมาตรค่าจริง (real symmetric matrix)  $A$ , นิพจน์  $A > 0$  แทนด้วยเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite) ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มีค่าเจาะจง (eigenvalue ของเมทริกซ์  $A$  แทนด้วย  $\lambda(A)$ ) เป็นค่าบวกทุกตัว สมรรถนะ  $\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[G(j\omega)]$  และ  $\sigma_{\max}[\cdot]$  แทนด้วยค่าเอกฐานที่ใหญ่ที่สุด (largest singular value) ของ  $[\cdot]$

## 2. การกำหนดปัญหา

พิจารณาระบบที่มีความไม่แน่นอนซึ่งมีโครงสร้างดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \Delta A & B_w + \Delta B_w & B_u + \Delta B_u \\ C_z + \Delta C_z & D_{zw} + \Delta D_{zw} & D_{zu} + \Delta D_{zu} \\ C_y + \Delta C_y & D_{yw} + \Delta D_{yw} & D_{yu} + \Delta D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_w & \tilde{B}_u \\ \tilde{C}_z & \tilde{D}_{zw} & \tilde{D}_{zu} \\ \tilde{C}_y & \tilde{D}_{yw} & \tilde{D}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

โดย  $x \in \mathbb{R}^n$  แทนด้วยตัวแปรสถานะ (state variables)  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  แทนด้วยสัญญาณรบกวนขาเข้า (input disturbance)  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  แทนด้วยสัญญาณเข้าควบคุม (control input)  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  แทนด้วยสัญญาณออกควบคุม (regulated output)  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  แทนด้วยสัญญาณออกของระบบ (system output)

กำหนดให้เมทริกซ์  $\tilde{A}, \tilde{B}_w, \tilde{B}_u, \tilde{C}_z, \tilde{C}_y, \tilde{D}_{zw}, \tilde{D}_{zu}, \tilde{D}_{yw}, \tilde{D}_{yu}$  มีขนาดของมิติที่สอดคล้องกัน และเราสมมุติด้วยว่าระบบที่พิจารณาสามารถควบคุมได้และสังเกตได้ และเมทริกซ์  $\Delta A, \Delta B_u, \Delta B_w, \Delta C_z, \Delta C_y, \Delta D_{zw}, \Delta D_{zu}, \Delta D_{yw}, \Delta D_{yu}$  แทนด้วยความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในเมทริกซ์ตัวแปรสถานะ สัญญาณรบกวนขาเข้าและสัญญาณเข้าควบคุม ความแน่นอนที่พิจารณานี้เป็นความไม่แน่นอนที่มีขอบเขตและไม่แปรตามเวลาซึ่งมีโครงสร้างดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B_w & \Delta B_u \\ \Delta C_z & \Delta D_{zw} & \Delta D_{zu} \\ \Delta C_y & \Delta D_{yw} & \Delta D_{yu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ H_z \\ H_y \end{bmatrix} \Delta [E \quad E_w \quad E_u] \quad (2)$$

โดย  $\Delta \in \mathbb{R}^{k \times l}$  แทนด้วยเมทริกซ์ที่มีความไม่แน่นอนซึ่งมีขอบเขตที่สอดคล้อง  $\Delta'(t)\Delta(t) \leq I$  และเมทริกซ์  $H, H_z, H_y, E, E_w, E_u$  เป็นเมทริกซ์คงที่ที่มีขนาดสอดคล้องกัน

ปัญหาที่พิจารณาในบทความนี้เป็น การหาตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ (state feedback controller) ที่สอดคล้องกับเกณฑ์สมรรถนะต่อไปนี้

- I. สามารถวางโพลของระบบวงรอบปิดให้อยู่ในบริเวณเชิงพาราโบลา  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$  ดังในรูปที่ 2
- II. สมรรถนะ  $\mathcal{H}_\infty$  ของฟังก์ชันถ่ายโอนวงรอบปิด  $T_{zw}(s)$  จาก  $w(t)$  ไปยัง  $z(t)$  เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ  $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$  โดย  $\gamma > 0$  แทนด้วยค่าคงที่ที่กำหนดและ  $T_{zw}(s) = C_{cl}(\Delta)[sI - A_{cl}(\Delta)]^{-1}B_{cl}(\Delta) + D_{cl}(\Delta)$  ในสมการที่ (12)

### 3. การวิเคราะห์สมรรถนะคงทน

อันดับแรก เราเริ่มด้วยการกล่าวถึงบทตั้งที่สำคัญที่ต้องใช้ประกอบการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

**บทตั้งที่ 1:** กำหนดให้  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  แทนด้วยเมทริกซ์ขนาดมิติเท่ากับ  $n \times n$  และค่าคงที่  $\alpha \geq 0, \beta > 0$  โพลทั้งหมดของระบบวงรอบปิดจะอยู่ภายในบริเวณพาราโบลา  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$  ที่ต้องการ ( $\lambda(A) \subset \tilde{P}(\alpha, \beta)$ ) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอน  $Q > 0$  ที่ทำให้

$$\beta A'QA + A'Q + QA + 2\alpha Q < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A'Q + QA + 2\alpha Q & \sqrt{\beta}A' \\ \sqrt{\beta}A & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

**พิสูจน์:** ดูใน [2] และ [12]

**บทตั้งที่ 2:** กำหนดให้  $\gamma > 0$  แทนด้วยค่าคงที่ และ  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$  แทนด้วยบริเวณพาราโบลา ระบบในสมการที่ (1) ที่ให้สัญญาณเข้าควบคุม  $u(t) = 0$  และไม่รวมผลของความไม่แน่นอนจะสอดคล้องกับเกณฑ์สมรรถนะทั้งสอง ถ้าอสมการเมทริกซ์ต่อไปนี้ มีเมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร (symmetric positive definite matrix)  $Q > 0$  ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} M & \sqrt{\beta}A' \\ \sqrt{\beta}A & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{3}$$

โดย  $M = A'Q + QA + 2\alpha Q + (QB_w + C_z'D_{zw})(\gamma^2 I - D'_{zw}D_{zw})^{-1}(B_w'Q + D'_{zw}C_z) + C_z'C_z$  นอกจากนี้เมื่อใช้ส่วนเติมเต็มของชัวร์ (Schur complement) [13] สมการที่ (3) สามารถแสดงในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} A'Q + QA + 2\alpha A & \sqrt{\beta}A' & QB_w & C_z' \\ \sqrt{\beta}A & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ B_w'Q & 0 & -\gamma^2 & D'_{zw} \\ C_z & 0 & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

**พิสูจน์:** เมื่อใช้ส่วนเติมเต็มของชัวร์ เราจะได้อสมการเมทริกซ์เชิงกำลังสอง (quadratic matrix inequality) จากสมการที่ (3) ดังนี้

$$\begin{aligned} & \beta A'QA + A'Q + QA + 2\alpha Q + (QB_w + C'_z D_{zw}) \\ & \times (\gamma^2 I - D'_{zw} D_{zw})^{-1} \cdot (B_w Q + D'_{zw} C_z) + C'_z C_z < 0 \end{aligned} \quad (5)$$

เราพบว่าเกณฑ์สมรรถนะ (I.) ที่ต้องการเกี่ยวกับบริเวณพาราโบล่าจะเป็นไปตามต้องการเมื่อใช้บทตั้งที่ 1 ดังนี้

$$\beta A'QA + A'Q + QA + 2\alpha Q < -\Gamma < 0 \quad (6)$$

โดย  $\Gamma = (QB_w + C'_z D_{zw})(\gamma^2 I - D'_{zw} D_{zw})^{-1}(B_w Q + D'_{zw} C_z) + C'_z C_z > 0$  เมทริกซ์  $B_w$  มีค่าลำดับชั้นตามแถวเต็มอัตรา (full row rank) และเมทริกซ์  $(\gamma^2 I - D'_{zw} D_{zw}) > 0$  ทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียนสมการที่ (5) ให้ได้ดังนี้

$$A'Q + QA + (QB_w + C'_z D_{zw})(\gamma^2 I - D'_{zw} D_{zw})^{-1}(B_w Q + D'_{zw} C_z) + C'_z C_z + \Sigma < 0 \quad (7)$$

โดย  $\Sigma = \beta A'QA + 2\alpha Q > 0, \beta > 0, \alpha \geq 0$  สำหรับการพิสูจน์ว่าสมการเมทริกซ์ในสมการที่ (4) เป็นไปตามเกณฑ์สมรรถนะ (II.) หรือไม่นั้น การพิสูจน์ของ  $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$  คล้ายกับทฤษฎีที่ 1 ใน [11]

**บทตั้งที่ 3: [14]** กำหนดให้เมทริกซ์  $G, H, E$  เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดมิติสอดคล้องกัน และให้เมทริกซ์  $G = G'$  ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตร จะได้ว่า  $G + H\Delta E + E'\Delta'H' < 0$  สำหรับเมทริกซ์ที่มีความไม่แน่นอน  $\Delta$  ใด ๆ โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข  $\Delta'\Delta \leq I$  ก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่สเกลาร์  $\epsilon > 0$  ที่ทำให้  $G + \epsilon HH' + \epsilon^{-1} E'E < 0$

**นิยามที่ 1:** ระบบที่มีความไม่แน่นอนในสมการที่ (1) ที่เมื่อกำหนดให้สัญญาณเข้าควบคุม  $u(t) = 0$  จะเป็นไปตามเกณฑ์สมรรถนะทั้งสองข้างต้น ถ้ามีเมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร  $Q > 0$  ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & \sqrt{\beta}\tilde{A}' \\ \sqrt{\beta}\tilde{A} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

โดย  $\tilde{M} = \tilde{A}'Q + Q\tilde{A} + 2\alpha Q + (Q\tilde{B}'_w + \tilde{C}'_z\tilde{D}'_{zw})(\gamma^2 I - \tilde{D}'_{zw}\tilde{D}_{zw})^{-1}(\tilde{B}'_w Q + \tilde{D}'_{zw}\tilde{C}_z) + \tilde{C}'_z\tilde{C}_z$   
 อย่างไรก็ตาม ถ้าความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในสมการที่ (2) สอดคล้องกับนิยามที่ 1 เราจะได้  
 เงื่อนไขของอสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีที่ 1:** พิจารณาระบบเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอนและไม่รวมผลของสัญญาณเข้าควบคุม และ  
 กำหนดให้โพลวงรอบปิดอยู่ในบริเวณ  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$  รวมทั้งสมรรถนะ  $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$  ระบบใน  
 สมการที่ (1) จะเป็นไปตามเกณฑ์สมรรถนะ (I.) และ (II.) ก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่สเกลาร์  $\epsilon > 0$  และ  
 เมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} N & \sqrt{\beta}PA' & B_w & PC'_z & PE' & PE' & \epsilon H & 0 \\ \sqrt{\beta}AP & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta}\epsilon H \\ B'_w & 0 & -\gamma^2 & D'_{zw} & E'_w & 0 & 0 & 0 \\ C'_z P & 0 & D_{zw} & -I & 0 & 0 & \epsilon H_z & 0 \\ EP & 0 & E_w & 0 & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 \\ EP & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon I & 0 & 0 \\ \epsilon H' & 0 & 0 & \epsilon H'_z & 0 & 0 & -\epsilon I & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta}\epsilon H' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

โดย  $N = AP + PA' + 2\alpha P$

**พิสูจน์:** เริ่มด้วยการคูณสมการที่ (8) ทั้งด้านหน้าและหลังด้วยเมทริกซ์  $U = \text{diag}\{P, I\}$  ซึ่งได้

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & \sqrt{\beta}P\tilde{A}' \\ \sqrt{\beta}\tilde{A}P & -P \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \tilde{M} & \sqrt{\beta}\tilde{A}' \\ \sqrt{\beta}\tilde{A} & -Q^{-1} \end{bmatrix} U \quad (10)$$

โดย  $\tilde{P} = P\tilde{A}' + \tilde{A}P + 2\alpha P + (\tilde{B}'_w + P\tilde{C}'_z\tilde{D}'_{zw})(\gamma^2 I - \tilde{D}'_{zw}\tilde{D}_{zw})^{-1}(\tilde{B}'_w + \tilde{D}'_{zw}\tilde{C}_z P) + P\tilde{C}'_z\tilde{C}_z P$   
 และ  $P = Q^{-1}$  และจากนิยามที่ 1 เราสามารถแสดงให้เห็นว่าสมการที่ (9) สมมูลกันกับสมการที่  
 (10) ซึ่งเมื่อใช้บทตั้งที่ 3 เราสามารถเขียนสมการที่ (10) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} N & \sqrt{\beta}PA' & B_w & PC'_z \\ \sqrt{\beta}AP & -P & 0 & 0 \\ B'_w & 0 & -\gamma^2 I & D'_{zw} \\ C_z P & 0 & D_{zw} & -I \end{bmatrix} + H\tilde{\Delta}E + (H\tilde{\Delta}E)' < 0 \quad (11)$$

$$\text{โดย } H = \begin{bmatrix} H' & 0 & 0 & H'_z \\ 0 & \sqrt{\beta}H' & 0 & 0 \end{bmatrix}', \tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} EP & 0 & E_w & 0 \\ EP & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จากการใช้บทตั้งที่ 3 และส่วนเติมเต็มของชูร์โดยตรงกับสมการที่ (11) เราจะได้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในสมการที่ (9)

#### 4. การออกแบบตัวควบคุม

เราพิจารณาระบบที่มีความไม่แน่นอนในสมการที่ (1) และต้องการวางตำแหน่งโพลวงรอบปิดของระบบดังกล่าวในบริเวณพาราโบลา  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$  รวมทั้งสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับสมรรถนะ  $\mathcal{H}_\infty$  ที่กำหนดไว้พร้อม ๆ กัน โดยตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ  $u = Kx$  ดังนั้นเราจะได้ระบบวงรอบปิดดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl}(\Delta) & B_{cl}(\Delta) \\ C_{cl}(\Delta) & D_{cl}(\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{โดย } A_{cl}(\Delta) = A + B_u K + H\Delta(E + E_u K), B_{cl}(\Delta) = B_w + H\Delta E_w,$$

$$C_{cl}(\Delta) = C_z + D_{zu} K + H_z \Delta(E + E_u K), D_{cl}(\Delta) = D_{zw} + H_z \Delta E_w, C_y = I_n$$

และกำหนดให้  $D_{yw} = D_{yu} = 0$  จากสมการที่ (12) เราสามารถแยกโครงสร้างของส่วนที่เกิดจากความไม่แน่นอนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_u K & B_w \\ C_z + D_{zu} K & D_{zw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ H_z \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} E + E_u K & E_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

**ทฤษฎีที่ 2:** พิจารณาระบบในสมการที่ (12) ซึ่งมีผลของความไม่แน่นอน กำหนดให้โพลทั้งหมดของระบบวงรอบปิดอยู่ภายในบริเวณ  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$  และมีสมรรถนะ  $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$  ระบบนี้จะ

สอดคล้องกับเกณฑ์สมรรถนะ (I.) และ (II.) ก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่สเกลาร์  $\epsilon > 0$ , เมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  และ เมทริกซ์  $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} N_{cl} & A'_{cl} & B_w & C'_{cl} & E'_{cl} & E'_{cl} & \epsilon H & 0 \\ A_{cl} & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta} \epsilon H \\ B'_w & 0 & -\gamma^2 I & D'_{zw} & E'_w & 0 & 0 & 0 \\ C_{cl} & 0 & D_{zw} & -I & 0 & 0 & \epsilon H_z & 0 \\ E_{cl} & 0 & E_w & 0 & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 \\ E_{cl} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon I & 0 & 0 \\ \epsilon H' & 0 & 0 & \epsilon H'_z & 0 & 0 & -\epsilon I & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} \epsilon H' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

โดย  $N_{cl} = PA' + AP + B_u Y + Y' B'_u + 2\alpha P$ ,  $A_{cl} = \sqrt{\beta}(AP + B_u Y)$ ,  $C_{cl} = C_z P + D_{zu} Y$  และ  $E_{cl} = EP + E_u Y$ .

ดังนั้นอัตราขยายของตัวควบคุมสถานะป้อนกลับหาได้จาก

$$K = YP^{-1} \quad (15)$$

**พิสูจน์:** ทำการเปลี่ยนตัวแปรเป็น  $Y = KP$  และแทนตัวแปร  $A_{cl} = \sqrt{\beta}(A + B_u K)P$ ,  $N_{cl} = P(A + B_u K)' + (A + B_u K)P + 2\alpha P$ ,  $C_{cl} = (C_z + D_{zu} K)P$  และ  $E_{cl} = (E + E_u K)P$  เหล่านี้ลงในสมการที่ (9) จะได้ผลลัพธ์โดยตรงไปตรงมาดังในสมการที่ (14)

จากทฤษฎีที่ 2 เราจะได้ตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่เป็นไปตามเกณฑ์สมรรถนะ (I.)-(II.) ภายใต้ความไม่แน่นอน  $\Delta$  ดังนั้นปัญหาการออกแบบที่พิจารณาสามารถแสดงในรูปของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดดังต่อไปนี้

minimize  $\gamma$

subject to สมการที่ (14) และ  $P = P^T > 0$

จากปัญหานี้ เราสามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดเชิงคอนเวกซ์ (convex optimization)

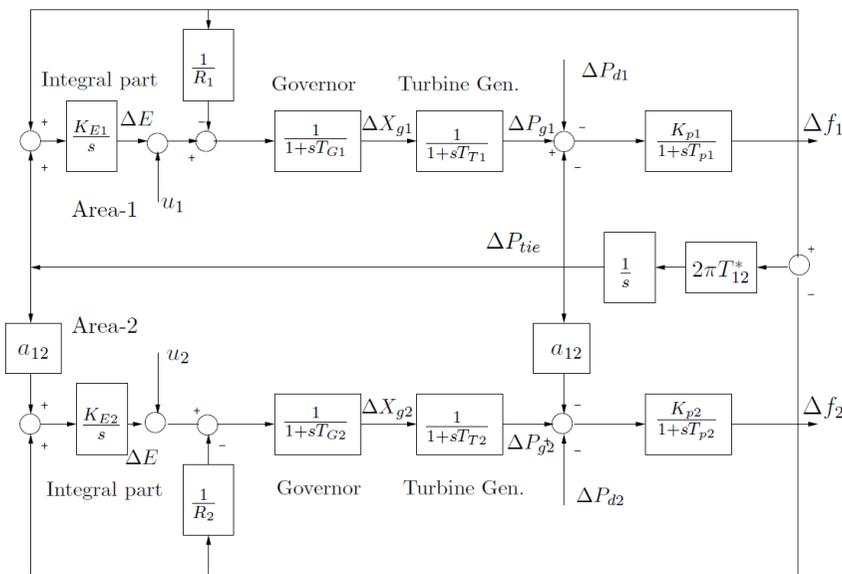
5. ผลการจำลองเชิงเลข

ในผลการจำลองเชิงเลขนี้เราเลือกใช้แบบจำลองของระบบไฟฟ้ากำลัง 2 พื้นที่ ในรูปที่ 4 (รายละเอียดของความหมายของตัวแปรของระบบไฟฟ้ากำลังนี้หาได้จาก [15] และเมทริกซ์ในสมการที่ 1 แสดงในภาคผนวก) เพื่อแสดงถึงประสิทธิภาพของการออกแบบตัวควบคุมที่นำเสนอซึ่งสอดคล้องกับ 2 เกณฑ์สมรรถนะที่กล่าวไปแล้วสำหรับการควบคุมความถี่เนื่องจากโหลด (load-frequency control) พร้อมกันนี้ เราศึกษาผลของความคงทนที่มีต่อความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นและผลตอบสนองเชิงเวลาที่มีการปรับปรุงให้ดีขึ้น โดยใช้การวัดเชิงเปรียบเทียบสมรรถนะดังต่อไปนี้

$$N_{ubp} = \left[ \sum_{j=0}^k [x_{np}(t) - x_{ubp}(t)]^2 \right]^{1/2}, \quad N_{lbp} = \left[ \sum_{j=0}^k [x_{np}(t_k) - x_{lbp}(t_k)]^2 \right]^{1/2} \tag{16}$$

$$\Sigma_{ubp} = \sum_{j=0}^k |x_{np}(t_k) - x_{ubp}(t_k)|, \quad \Sigma_{lbp} = \sum_{j=0}^k |x_{np}(t_k) - x_{lbp}(t_k)|$$

โดย  $x_{np}(t_k)$ ,  $x_{ubp}(t_k)$ , และ  $x_{lbp}(t_k)$  แทนด้วยค่าปกติ ค่าขอบเขตบนและค่าขอบเขตล่างของตัวแปรสถานะ  $x(t_k)$  ที่เวลา  $t_k$  ตามลำดับ



รูปที่ 4 ระบบไฟฟ้ากำลังที่มี 2 พื้นที่

ในบทความนี้เราสมมุติว่าสัญญาณเข้าระบบ ( $w$ ) เป็นการเปลี่ยนแปลงของโหลดที่เป็นขั้นบันได (step load change) ขนาดเท่ากับ 0.1 pu. ( $\Delta P_{d1} = 0.1$  pu.) ของความต้องการโหลด (load demand) สำหรับพื้นที่ที่ 1 ในระบบไฟฟ้ากำลัง

จากผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ที่ใช้ MATLAB LMI Control Toolbox เพื่อทำการออกแบบตัวควบคุมที่ต้องการ เราจะได้รับ  $\varepsilon = 0.1117$  และ  $\|T_{zw}(s)\| \leq \gamma = 251.31$  และโพลวงรอบปิดของระบบไฟฟ้ากำลังที่มีความไม่แน่นอนในบริเวณพาราโบลา  $\tilde{P}(0.5, 0.0075)$  ที่ต้องการตามลำดับ (ค่าอัตราขยายที่ได้จากการออกแบบตัวควบคุมในแต่ละวิธี ถูกแสดงในตารางที่ 1 ในภาคผนวก) ผลตอบสนองเชิงเวลา  $\Delta f_1(t), \Delta f_2(t), ACE_1(t), ACE_2(t)$  สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 5 ถึง รูปที่ 8 ซึ่งแสดงขอบเขตบนและล่างของการแปรเปลี่ยนของพารามิเตอร์ และค่าปกติของพารามิเตอร์ (nominal parameter)

ตารางที่ 2 การวัดเชิงเปรียบเทียบสมรรถนะคงทนของวิธีต่าง ๆ

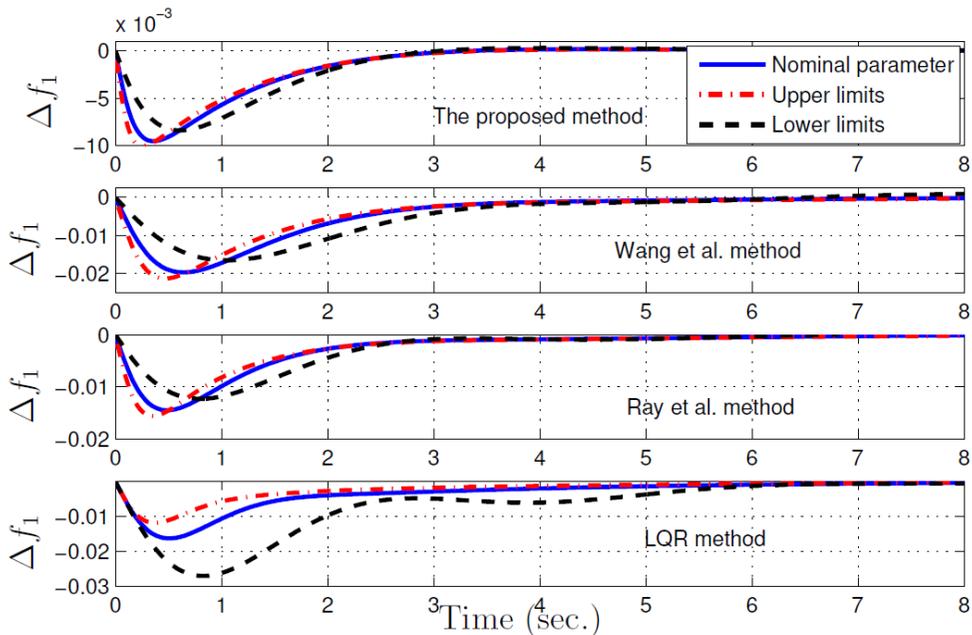
States	Methods	$N_{ubp}$	$N_{lbp}$	$\Sigma_{ubp}$	$\Sigma_{lbp}$
$\Delta f_1(t)$	Proposed method	<b>0.0102</b>	<b>0.0238</b>	<b>0.1326</b>	<b>0.3857</b>
	Wang et al. [16]	0.0394	0.0873	0.693	1.7318
	LQR methods	0.075	0.2334	1.3953	4.2656
	Ray et al. [15]	0.0226	0.0509	0.3209	0.8732
$\Delta f_2(t)$	Proposed method	<b>0.0024</b>	<b>0.0060</b>	<b>2.1802</b>	<b>2.1525</b>
	Wang et al. [16]	0.0205	0.0715	3.8282	4.9753
	LQR methods	0.0284	0.1197	3.1027	3.6970
	Ray et al. [15]	0.0083	0.0293	2.1930	2.4618

จากการวัดเชิงเปรียบเทียบสมรรถนะในสมการที่ (16) ซึ่งแสดงในตารางที่ 2 เราพบว่า ค่าเบี่ยงเบนของค่าปกติกับขอบเขตบน และค่าปกติกับค่าขอบเขตของผลตอบสนองเชิงเวลา  $\Delta f_1(t)$  และ  $\Delta f_2(t)$  ที่ได้จากวัดโดยใช้  $N_{ubp}, N_{lbp}, \Sigma_{ubp}$  และ  $\Sigma_{lbp}$  ของวิธีที่นำเสนอ มีค่าต่ำที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่น ๆ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่นำเสนอคงทนต่อความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นจากรูปผลตอบสนองเชิงเวลา จะเห็นได้ชัดว่าการแปรเปลี่ยนจากค่าปกติของพารามิเตอร์ในระบบที่มีความไม่แน่นอนมีค่าน้อยกว่าอย่างเห็นได้ชัด เมื่อเปรียบเทียบกับตัวควบคุม LQR ( $Q = I_9, R = I_2$ ), Ray et al. [15], Wang et al. [16] ตามลำดับ นอกจากนี้ ผลตอบสนองเชิงเวลาของตัวควบคุมที่นำเสนอมูลค่าพุ่งเกินสูงสุดน้อยกว่า ตามด้วยเวลาพุ่งขึ้นและเวลาเข้าที่มีการ

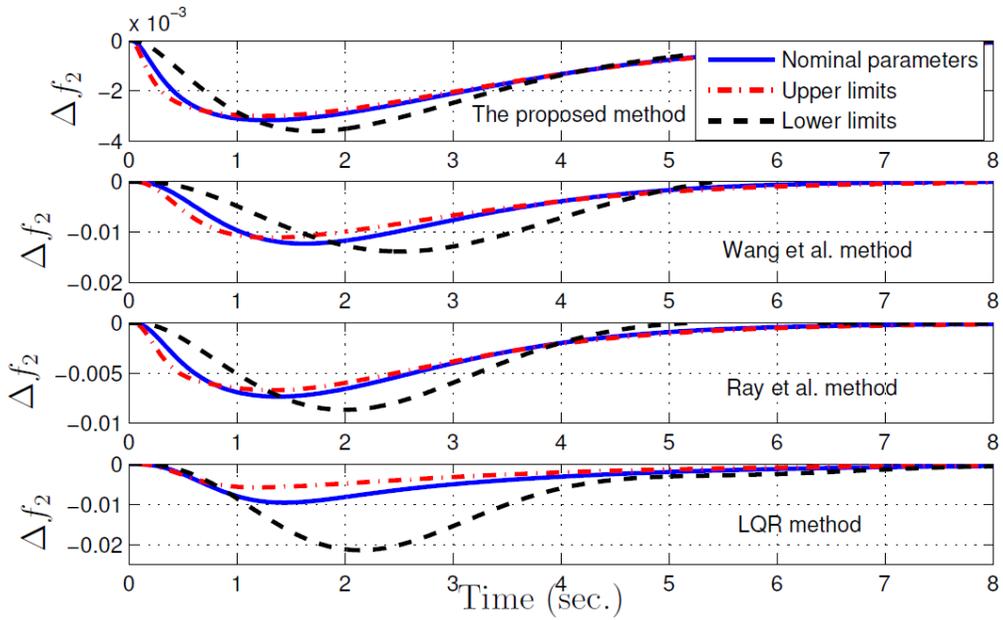
ปรับปรุงให้ดีขึ้นอย่างเห็นได้ชัดซึ่งเป็นสัมพันธ์กับตำแหน่งโพลในบริเวณที่ต้องการ พร้อมกันนี้ตำแหน่งโพลทั้งหมดที่รวมผลของความไม่แน่นอนก็ยังอยู่ภายในบริเวณ  $\tilde{P}(\alpha, \beta)$  ในรูปที่ 9

## 6. บทสรุป

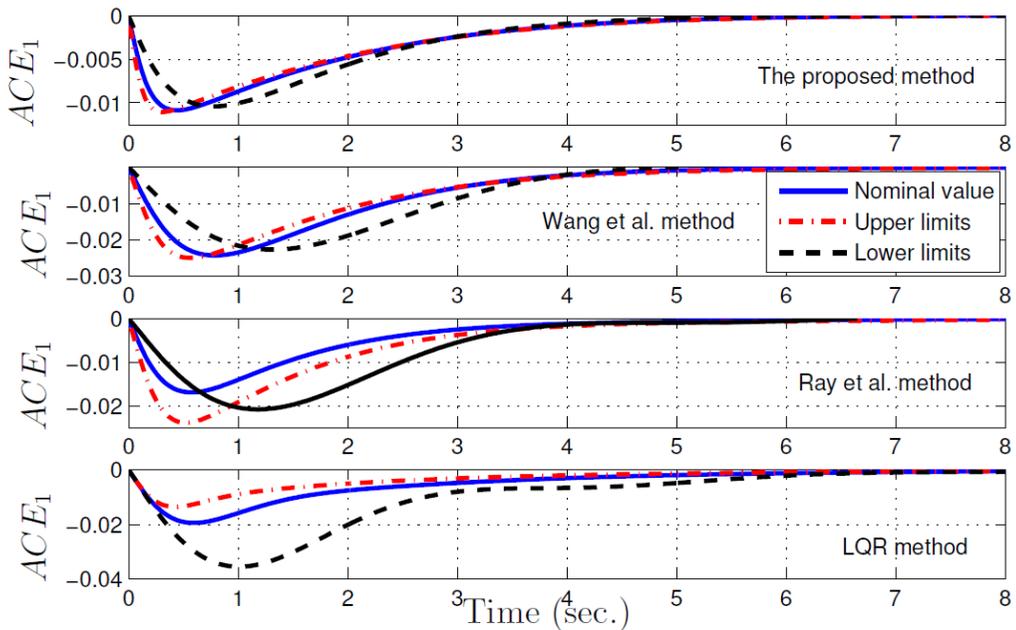
บทความนี้เกี่ยวกับการออกแบบตัวควบคุมสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนด้วยเงื่อนไขบังคับโพลเชิงพาราโบลาโดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น จุดมุ่งหมายของบทความนี้เพื่อออกแบบตัวควบคุมที่คงทนพร้อมทั้งยังสามารถปรับปรุงผลตอบสนองพลวัตของระบบที่มีความไม่แน่นอน และเราแสดงถึง เงื่อนไขสำหรับการหาตัวควบคุมที่ต้องการจากผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสุดท้ายผลการจำลองเชิงเลข แสดงให้เห็นว่า ตัวควบคุมที่นำเสนอสามารถปรับปรุงผลตอบสนองชั่วคราวที่ดีมากยิ่งขึ้นอย่างชัดเจน โดยเฉพาะในด้านของเวลาเข้าที่และค่าสูงสุดพุ่งเกินเมื่อเปรียบเทียบกับตัวควบคุมที่มีอยู่ (LQR, Ray et al. [15], และ Wang et al. [16])



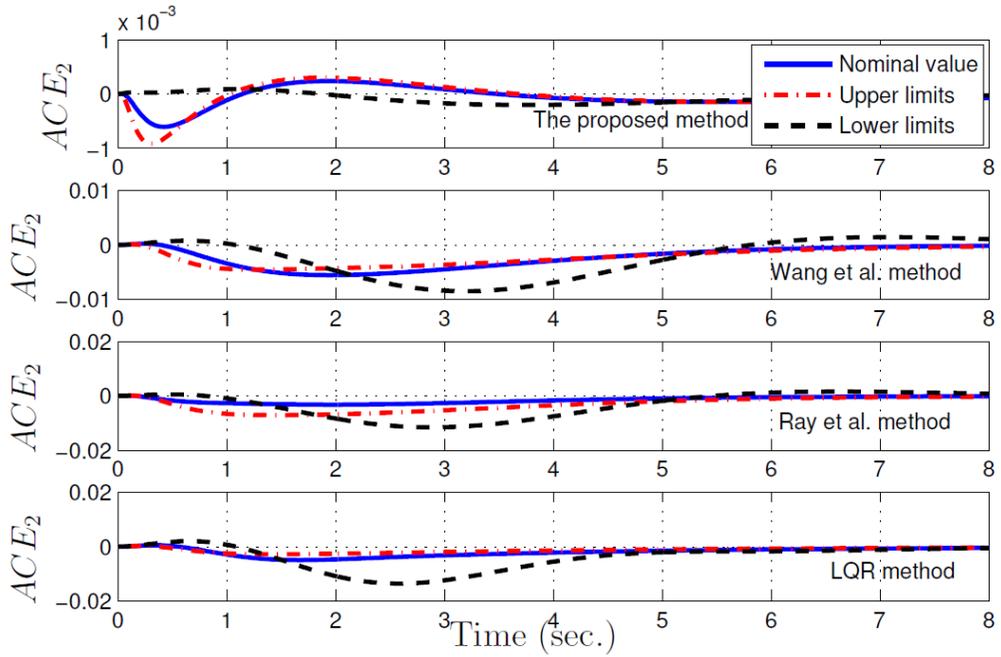
รูปที่ 5 ผลตอบสนองเชิงเวลาของ  $\Delta f_1(t)$



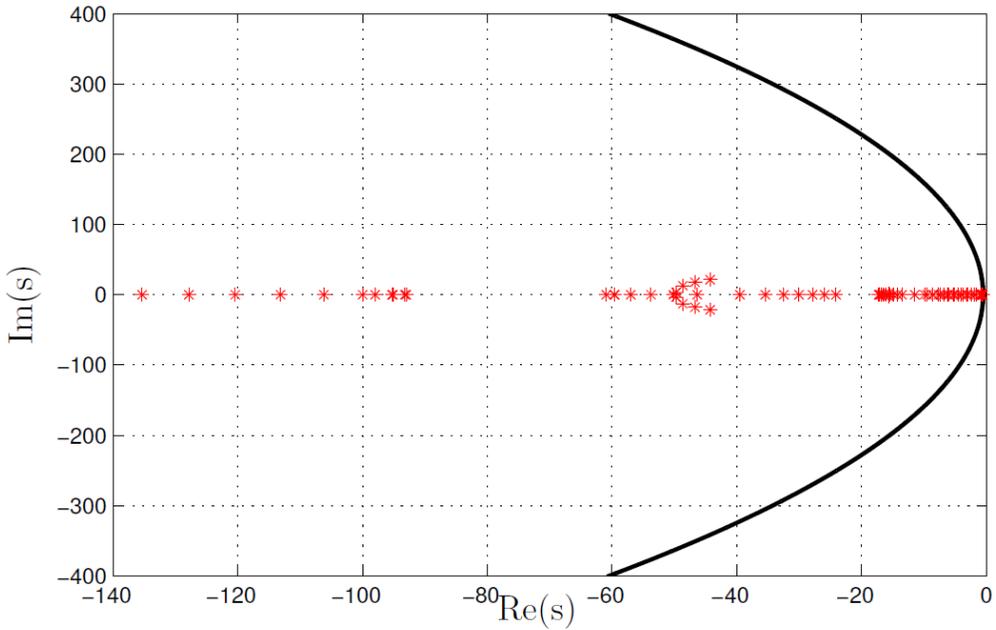
รูปที่ 6 ผลตอบสนองเชิงเวลาของ  $\Delta f_2(t)$



รูปที่ 7 ผลตอบสนองเชิงเวลา  $ACE_1(t) = \Delta f_1(t) + \Delta P_{ie}(t)$



รูปที่ 8 ผลตอบสนองเชิงเวลา  $ACE_2(t) = \Delta f_2(t) - \Delta P_{tie}(t)$



รูปที่ 9 ตำแหน่งของโพลวงรอบปิด

## เอกสารอ้างอิง

- [1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. (1989). "State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems," **IEEE Trans. Automat Control**. 1989 (34) : pp. 831-847.
- [2] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. (1992). "Controller design with regional pole constraints," **IEEE Trans. Automatic Control**. 1992 (37) : pp. 54-69.
- [3] G. Garcia and J. Bernussou. (1994) "Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback," **IEEE Trans. Automat Control**. 1995 (40) : pp. 184-190.
- [4] K. Furuta and S. B. Kim. (1987). "Pole assignment in a specified disk," **IEEE Trans. Automatic Control**. 1987 (32) : pp. 423-427.
- [5] A. Kanchanaharuthai and N. Jutong. (2004). "Robust load-frequency controller design for interconnected power systems with circular pole constraints via LMI approach," **Proceedings of the SICE Annual Conference**. Sapporo. Japan. August. 2004 : pp. 344-349.
- [6] M. Chilali and P. Gahinet. (1996). " $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints," **IEEE Trans. Automatic Control**. 1996 (41) : pp. 385-367.
- [7] R. K. Yedavalli and Y. Liu. " $\mathcal{H}_\infty$  control with regional stability constraints," **Automatica**. 1995 (31) : pp. 611-615.
- [8] Z. Wang. (1998). "Robust  $\mathcal{H}_\infty$  state feedback control with regional pole constraints: an algebraic Riccati equation approach," **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**. 1998 (120) : pp. 289-291.
- [9] Z. Wang, H. Zeng, D. W. C. Ho, and H. Unbehauen. (2002). "Multiobjective control of a four-link flexible manipulator: a robust  $\mathcal{H}_\infty$  approach". **IEEE Trans. Control Systems Technology**. 2002 (10) : pp. 866-875.
- [10] A. Kanchanaharuthai and P. Ngamsom. (2005). "Robust  $\mathcal{H}_\infty$  load-frequency control for interconnected power systems with  $D$ -stability constraints via LMI approach," **Proceedings of the 2005 American Control Conference**. Portland. Oregon. July 2005 : pp. 4387-4392.

- [11] A. Kanchanaharuthai, P. Ngamsom and V. Tipsuwanporn. (2005). "Robust  $\mathcal{H}_\infty$  load-frequency control design with regional pole constraints via LMI approach," **Proceedings of the SICE Annual Conference**. Okayama. Japan. August 2005.
- [12] Z. Wang, H. Zeng, D. W. C. Ho, and H. Unbehauen. (2006). "Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter design with variance constraints and parabolic pole assignment," **IEEE Signal Processing Letters**. 2006(13) : pp. 137-140.
- [13] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. (1994). **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia. PA: SIAM.
- [14] L. Xie. (1996). "Output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of systems with parameter uncertainty," **Int. J. Control**. 1996(63) : pp. 741-750.
- [15] G. Ray, A. N. Prasad, G. D. Prasad. "A new approach to the design of the robust load-frequency controller for large scale power systems," **Electric Power Systems Research**. 1999(51) : pp. 13-22.
- [16] Y. Wang, R. Zhou, and C. Wen. (1993). "Robust load-frequency controller design for power systems," **IEE Proc. Gener. Transm. Distrib.**, 1993(140) : pp. 11-16.

### ภาคผนวก

#### ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุม

เมทริกซ์ในสมการที่ (1) ซึ่งใช้ในการออกแบบตัวควบคุมที่นำเสนอ เช่น  $A, B_w, B_u$  หาได้จาก [15]

$$C_z = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, C_y = I_9, D_{zw} = 0_{9 \times 2}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, D_{yw} = 0_{9 \times 2}, D_{yu} = 0_{9 \times 2} \text{ และผลความไม่แน่นอนเป็นดังนี้}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_z = 0_{5 \times 6}, E_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.375 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.375 \end{bmatrix}, E_w = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -0.025 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.26 & 0 & -0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -0.025 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.26 & 0 & -0.375 & 0 & -0.375 \end{bmatrix}$$

ตารางที่ 1 ค่าอัตราขยายที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมในแต่ละวิธี

วิธีที่นำเสนอ	$K_{LMI} = \begin{bmatrix} -52.8 & -46.7 & -6.7 & 3.1 & 37.6 & 31.5 & 2.0 & -30 & 10.3 \\ -37.4 & 25.7 & 2.1 & -8.4 & -84.4 & -82.9 & -8.9 & -4.5 & -57.7 \end{bmatrix}$
Wang et al.[16]	$K_{WANG} = \begin{bmatrix} 2.07 & 4.2 & 1.7 & -3.9 & -0.5 & -0.46 & -0.02 & 1.2 & 0.04 \\ -0.56 & -0.46 & -0.02 & 3.9 & 2.07 & 4.25 & 1.72 & -0.05 & 1.2 \end{bmatrix}$
Ray et al.[15]	$K_{SVD} = \begin{bmatrix} 7.5 & 9.8 & 2.6 & -5.2 & -3.7 & -4.7 & 0.014 & 6.3 & -2.5 \\ -3.7 & -4.7 & -0.014 & 5.2 & 7.5 & 9.8 & 2.6 & -2.5 & 6.3 \end{bmatrix}$
LQR	$K_{LQR} = \begin{bmatrix} 11.4 & 15.1 & 9.4 & -6.1 & -0.33 & -0.27 & -0.007 & 9.05 & 0 \\ -0.33 & -0.27 & -0.007 & 6.1 & 11.4 & 15.1 & 9.4 & 0 & 9.05 \end{bmatrix}$