

การหาพารามิเตอร์ของระบบระดับความเสรีขั้นเดียวไม่เชิงเส้น
ที่ถูกเหนี่ยวนำให้เกิดการสั่นสะเทือนด้วยกระแสหมุนวนของกระแสลม
**DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF A NONLINEAR SINGLE
DEGREE OF FREEDOM SYSTEM INDUCED BY VORTEX-INDUCED
VIBRATIONS**

ปริญา บุญมาเลิศ¹ ธนู จุญฉาย² ทิพวัลย์ เพชรรัก³ วันชนะ ณรงค์ฤทธิเดช⁴
และ นันท์ชนก หาญตะคุ⁵

^{1,2,3}อาจารย์, สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต
1761 ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250,

¹parinya.boo@kbu.ac.th, ²thanu.cho@kbu.ac.th, ³thippawan.phe@kbu.ac.th

^{4,5}อาจารย์, คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต
1761 ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250,

⁴wanchana.nar@kbu.ac.th, ⁵nunchanok.han@kbu.ac.th

Parinya Boonmalert¹, Thanu Chouychai², Thippawan Phetrak³, Wanchana Narongritidej⁴
and Nunchanok Hantaku⁵

^{1,2,3}Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,
Kasem Bundit University 1761 Pattanakarn Rd. Suanluang, Bangkok 10250, Thailand,

¹parinya.boo@kbu.ac.th, ²thanu.cho@kbu.ac.th, ³thippawan.phe@kbu.ac.th,

^{4,5}Lecturer, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University
1761 Pattanakarn Rd. Suanluang, Bangkok 10250, Thailand,

⁴wanchana.nar@kbu.ac.th, ⁵nunchanok.han@kbu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของโครงสร้างที่เกิดการสั่นสะเทือนเนื่องจาก
ถูกเหนี่ยวนำด้วยกระแสหมุนวนของกระแสลมที่พัดผ่านและแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างของความถี่
ธรรมชาติของระบบที่ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบเชิงเส้นและระบบที่ใช้แบบจำลอง
ทางคณิตศาสตร์ไม่เชิงเส้น ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสแกนแลน ซึ่งเป็น
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไม่เชิงเส้นซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เชิงเส้น

ส่วนการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของระบบได้นำอนุกรมของวอลเตอร์รามาประยุกต์ใช้ โดยใช้เป็นแนวทางในการออกแบบเพื่อให้ได้ความถี่ธรรมชาติที่เหมาะสมตามต้องการ ผลการคำนวณตามตัวอย่างบางส่วนของสแกนแลน พบว่าการหาพารามิเตอร์ด้วยวิธีของสแกนแลน ได้ผลการคำนวณที่ถูกต้อง ส่วนพารามิเตอร์ของความแข็งดิ่งของอากาศที่ปรับปรุงเพิ่มเข้ามาสามารถหาได้ด้วยวิธีหาค่าความถี่ธรรมชาติแบบหนึ่งโดยการประยุกต์ใช้อ่อนุกรมของวอลเตอร์รา พบว่าผลการคำนวณมีค่าถูกต้องเช่นกัน จากค่าพารามิเตอร์สมมติที่ใช้ในการคำนวณพบว่าความถี่ธรรมชาติของระบบที่ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เชิงเส้นมีค่า 84.01 rad/sec เมื่อเทียบกับความถี่ธรรมชาติของระบบที่ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไม่เชิงเส้นมีค่า 85.18 rad/sec ซึ่งมีความแตกต่างกัน 1.37% ความแตกต่างที่เกิดขึ้นจากแบบจำลองไม่เชิงเส้นได้รวมเอาค่าความแข็งดิ่งของอากาศขณะที่โครงสร้างเกิดการสั่นสะเทือนเข้าไปด้วย จึงทำให้ความถี่ธรรมชาติของระบบไม่เชิงเส้นมีค่ามากกว่าค่าความถี่ของระบบเชิงเส้นที่มีแต่ค่าความแข็งดิ่งของโครงสร้างเพียงอย่างเดียว จากหลักการนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อหลีกเลี่ยงความเสียหายของโครงสร้างที่เกิดการสั่นสะเทือนที่ความถี่ธรรมชาติ เมื่อเกิดการสั่นสะเทือนที่เกิดจากลม หรือนำการสั่นสะเทือนไปใช้ให้เป็นประโยชน์ เช่น การผลิตไฟฟ้าจากกังหันลมแบบไรโบพัดเพื่อกำหนดความถี่ของกระแสไฟฟ้าที่แม่นยำ เป็นต้น

คำสำคัญ: การสั่นสะเทือน, กระแสหมุนวน, ความถี่ธรรมชาติ, อนุกรมของวอลเตอร์รา

ABSTRACT

This study presents a method for identifying the nonlinear parameters of a structure subjected to wind-induced vibrations caused by vortex shedding. It highlights the differences in natural frequencies between systems modeled using linear and nonlinear mathematical approaches. In this research, the Scanlan model, a nonlinear aerodynamic model, was selected due to its ability to provide more accurate results than linear models. To estimate the nonlinear parameters of the system, the Volterra series was applied as a theoretical framework to design for a target natural frequency. Partial results based on the Scanlan model showed that this parameter estimation method produced accurate outcomes. Furthermore, the aerodynamic stiffness parameter, which was additionally considered in the nonlinear model, was determined using the damped natural frequency method in conjunction with the Volterra series, also yielding precise results. Using assumed parameter values, the natural frequency of the system based on the linear model was found to be 84.01 rad/sec, while the nonlinear model produced a natural frequency of 85.18 rad/sec, reflecting a 1.37% difference. This discrepancy arises from the inclusion of aerodynamic stiffness during

structural vibration in the nonlinear model, which increases the system's natural frequency compared to the linear model that only accounts for structural stiffness. This principle can be applied to avoid structural damage caused by resonance when the structure vibrates at its natural frequency due to wind excitation. Alternatively, it can be used constructively—for example, in bladeless wind turbines where controlled vibrations are used to generate electricity with high precision in determining the output frequency.

KEYWORD: Vibrations, Vortex Shedding, Natural Frequency, Volterra Series

1. บทนำ

การสั่นสะเทือนของโครงสร้างที่ถูกเหนี่ยวนำด้วยกระแสหมุนวนของกระแสม (Vortex-Induced Vibrations) กำลังเป็นสิ่งที่ได้รับความสนใจของนักวิจัย เนื่องจากสิ่งก่อสร้างหลายอย่างที่อยู่กลางแจ้งเมื่อมีกระแสลมพัดผ่านด้วยความเร็วลมที่มากพอจะทำให้เกิดการหมุนวนของอากาศทางด้านหลังของสิ่งก่อสร้างนั้นและที่ความเร็วลมที่เหมาะสมการหมุนวนนั้นจะมีการสับตัวไปมา (Vortex shedding) [1] ในลักษณะของคลื่นและเหนี่ยวนำให้สิ่งก่อสร้างนั้นเกิดการสั่นสะเทือนในแนวตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของกระแสลมได้ จากปรากฏการณ์ของการเกิดการสั่นสะเทือนนี้อาจส่งผลให้สิ่งก่อสร้างเสียหายได้ หรือในอีกทางหนึ่งอาจนำการสั่นสะเทือนนั้นมาใช้ประโยชน์ได้ เช่น นำมาใช้ผลิตพลังงานไฟฟ้าโดยใช้กังหันลมแบบไร้ใบแทนกังหันลมที่มีใบที่มีอยู่ในปัจจุบันเป็นต้น งานวิจัยนี้จะนำเสนอการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสแกนแลน ซึ่งเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไม่เชิงเส้นและประยุกต์ใช้อัลกอริทึมของวอลเตอร์ราเพื่อใช้หาความถี่ธรรมชาติและ ความถี่ธรรมชาติแบบหมุนวนของระบบระดับความถี่ขึ้นเดียวที่มีมวลที่มีความยาวหนึ่งหน่วย เพื่อใช้เป็นแนวทางในการออกแบบโครงสร้างให้เหมาะสมกับการใช้งานในอนาคต

2. งานที่เกี่ยวข้อง

Scanlan [2] ได้ทำการทดลองและนำเสนอแบบจำลองการสั่นสะเทือนที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของกระแสหมุนวนของของไหลที่เป็นแบบจำลองไม่เชิงเส้นซึ่งให้ผลการคำนวณใกล้เคียงความเป็นจริง

Traivivatana et al [3] ได้แสดงให้เห็นการเกิดกระแสหมุนวนจากการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอกที่ตัวเลขเรย์โนลด์ต่าง ๆ โดยทำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปรับขนาดเอลิเมนต์หลายครั้ง

Manshadi et al [4] ได้ประยุกต์ใช้การสั่นสะเทือนของเสาที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของกระแสลมมาใช้แทนกังหันลมซึ่งจะไม่ต้องใช้ใบกังหันเพื่อเป็นแนวทางในการผลิตไฟฟ้า โดยการ

ออกแบบได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เชิงเส้นของระบบระดับความถี่ขึ้นเดียว โดยพิจารณาการเหนี่ยวนำของกระแสหมุนวนของลมที่ทำให้เกิดการสั่นสะเทือนแบบสองทิศทาง

Steffen [5] ได้ทำการศึกษาการสั่นสะเทือนที่ความถี่ต่ำของอาคารสูงระดับเกินกว่า 200 m ที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของกระแสหมุนวนของลม

3. ทฤษฎี

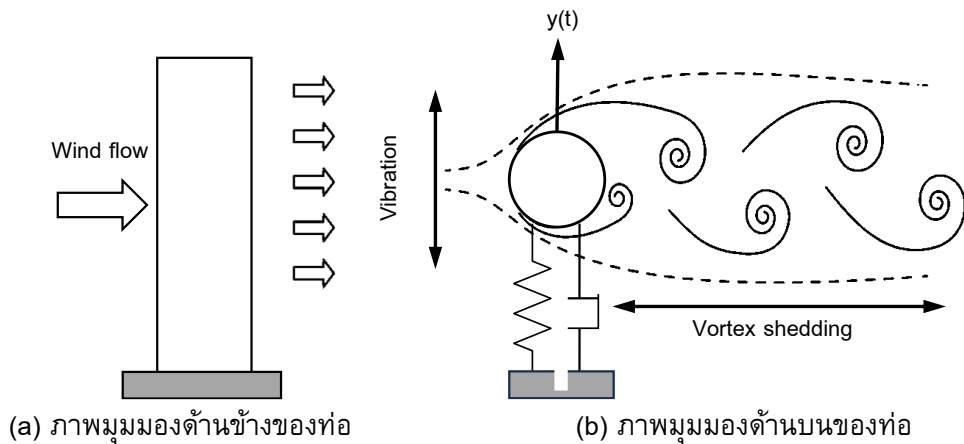
ปรากฏการณ์การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นจากการเหนี่ยวนำของกระแสหมุนวนของของไหลได้ถูกนำมาศึกษาในงานทางด้านวิศวกรรมเครื่องกลและวิศวกรรมโยธาเนื่องจากการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นนี้อาจส่งผลให้สิ่งก่อสร้างเสียหายได้หรือในอีกทางหนึ่งอาจนำการสั่นสะเทือนนั้นมาใช้ประโยชน์ได้จากการศึกษาพบว่าเมื่อเกิดการไหลผ่านวัตถุที่มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 1 ที่ความเร็วของการไหลมากเพียงพอจะทำให้ด้านหลังของวัตถุเกิดกระแสหมุนวน และกระแสหมุนวนนี้จะเหนี่ยวนำวัตถุให้เกิดการสั่นสะเทือน โดยที่ความถี่ของกระแสหมุนวนนี้จะหาได้จากตัวเลขสเตรฮาาล (Strouhal Number, St) [6] ที่เป็นฟังก์ชันของตัวเลขเรย์โนลด์ เป็น

$$St(Re) = \frac{fD}{u} \quad (1)$$

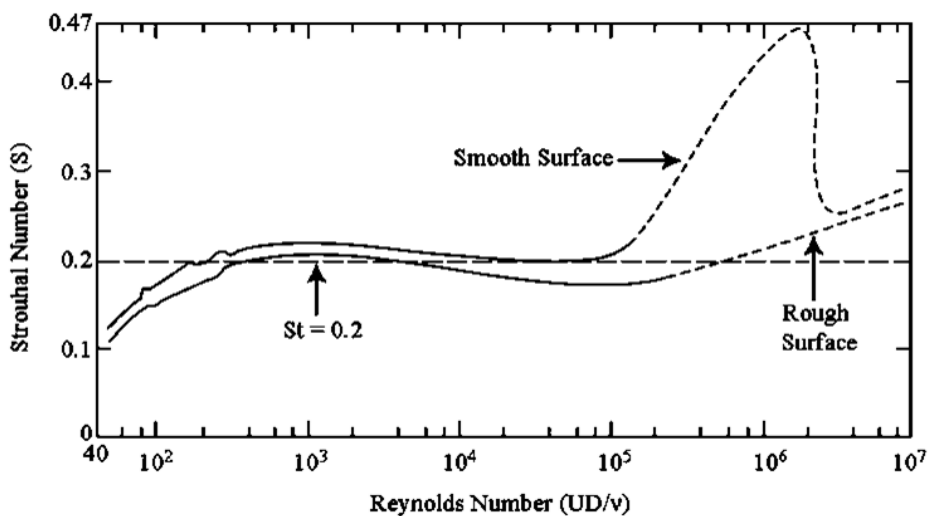
โดยที่ f เป็นความถี่ของกระแสหมุนวนของของไหล, D เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของท่อ, u เป็นความเร็วของของไหล และ St เป็นตัวเลขสเตรฮาาลซึ่งขึ้นอยู่กับตัวเลขเรย์โนลด์ (Reynolds Number, Re) จึงทำให้การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นแปรผันกับความเร็วของกระแสการไหล ขนาดของวัตถุ และ ชนิดของของไหลที่ไหลผ่านวัตถุ โดยมีความสัมพันธ์ของตัวเลขสเตรฮาาลและตัวเลขเรย์โนลด์ ดังแสดงในรูปที่ 2

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu} \quad (2)$$

โดยที่ ρ คือความหนาแน่นของของไหล, μ คือ ความหนืดพลวัตของของไหล (Dynamic Viscosity) และ ν คือความหนืดจลนศาสตร์ (Kinematic Viscosity)



รูปที่ 1 ของไหลไหลปะทะท่อกลมเกิดกระแสหมุนวนและแบบจำลองของระบบมวลสปริงและตัวหน่วง



รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขสเตรฮาและตัวเลขเรย์โนลด์ [7]

ที่ตัวเลขสเตรฮาที่มีค่าประมาณ 0.2 ตัวเลขเรย์โนลด์จะมีค่าอยู่ในช่วง 300 ถึง 10^5 การสันนิษฐานที่เกิขึ้นนี้อาจสร้างความเสียหายให้กับสิ่งปลูกสร้างได้และเพื่อป้องกันความเสียหายต่อสิ่งปลูกสร้างประเภทอาคารสูงและสะพานที่อยู่ในท้องที่ที่มีกระแสลมแรง การศึกษาเกี่ยวกับการสันนิษฐานแบบนี้ยังต้องอาศัยผลการทดลองมาช่วยในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับของไหลยังต้องอาศัยการทดลองเป็นหลัก โครงสร้างตามรูปที่ 2 ประกอบจะใช้แบบจำลองเชิงเส้นตามสมการที่ (3)

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_s\dot{y}(t) + \omega_s^2 y(t) = \frac{\rho u^2 DC_L}{2m} \sin(\omega t + \theta) \quad (3)$$

แต่สแกนเลนได้เสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสั่นสะเทือนที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของกระแสหมุนวนที่เกิดจากกระแสลม โดยเป็นแบบจำลองของระบบระดับความเสรีขึ้นเดียวต่อหนึ่งหน่วยความยาว ดังสมการที่ (4)

$$m[\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_s\dot{y}(t) + \omega_s^2 y(t)] = \rho u^2 D \left[\gamma \left(1 - \varepsilon \frac{y^2(t)}{D^2} \right) \frac{\dot{y}(t)}{u} + \beta \frac{y(t)}{D} + \frac{1}{2} C_L \sin(\omega t + \theta) \right] \quad (4)$$

โดยที่ m คือ มวลต่อความยาวของระบบ

$y(t)$ คือ การกระจัด

ζ คือ สัมประสิทธิ์ของตัวหน่วง (Damping Coefficient)

ω_s คือ ความถี่ธรรมชาติทางกลของระบบ

ρ คือ ความหนาแน่นของอากาศ (Air Density)

u คือ ความเร็วเฉลี่ยของของไหล (Mean Wind Velocity)

D คือ ความกว้างของมวลที่ปะทะกับของไหล

γ คือ สัมประสิทธิ์การหน่วงพลศาสตร์ (Aerodynamic Damping Coefficient)

ε คือ สัมประสิทธิ์การตอบสนองเชิงพลศาสตร์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear Aerodynamic Response Coefficient)

ω คือ ความถี่ของกระแสหมุนวนของของไหล (Frequency of Vortex Shedding)

β คือ สัมประสิทธิ์ความแข็งตึงเชิงพลศาสตร์ (Aerodynamic Stiffness Coefficient)

C_L คือ สัมประสิทธิ์ของแรงยก (Lift Coefficient) ซึ่งสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ของแรงยก F_L ดังนี้

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho u^2 DL} \quad (5)$$

สแกนแลนได้แสดงการหาค่าคงที่ γ และ ε ได้จากการทดลอง โดยพิจารณาว่าเมื่อระบบเกิดการสั่นสะเทือนในสถานะคงตัว (Steady State) แล้ว การสั่นสะเทือนจะอยู่ในรูปของฮาโมนิคแบบเดียวกับระบบเชิงเส้น เป็น

$$y(t) = Y \cos(\omega t) \quad (6)$$

และที่ความถี่พ้อง (Resonance) $\omega = \omega_s$ ซึ่งความถี่ของการสั่นสะเทือนจะสอดคล้องกับตัวเลขสเตรอาลเป็น

$$\frac{\omega A}{u} = 2\pi St \quad (7)$$

โดยที่ St คือ ตัวเลขสเตรอาล และ A คือ พื้นที่หน้าตัดต่อความยาวของระบบ เมื่อการสั่นสะเทือนอยู่ในสถานะคงตัว แสดงว่าพลังงานสูญเสียรวมในหนึ่งรอบของการสั่นสะเทือนเป็นศูนย์นั่นคือ

$$\int_0^T F_d \dot{y}(t) dt = 0 \quad (8)$$

โดยที่ F_d คือ แรงที่เกิดจากการหน่วงมีค่าเป็น

$$F_d = \left[2m\zeta\omega_s - \rho u B \gamma \left(1 - \varepsilon \frac{y^2(t)}{D^2} \right) \right] \dot{y}(t) \quad (9)$$

ขนาดของแอมพลิจูดของการสั่นสะเทือนในสมการที่ (6) จะหาได้โดยแทนสมการที่ (9) ในสมการที่ (8) จะได้

$$Y = \frac{2D}{\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{R\zeta}{\gamma}} \quad (10)$$

โดยที่ $R = \frac{4\pi m S_t}{\rho A D}$ และค่าคงที่ γ และ ε สามารถหาได้จากการทดลองโดยการปรับค่าตัวหน่วงสองครั้ง ซึ่งจะทำให้ได้ ค่าแอมพลิจูดในสมการที่ (10) สองค่า ซึ่งจะทำให้สามารถหาค่า γ ได้จาก

$$\gamma = \frac{R \left[\zeta_1 - \frac{Y_1^2}{Y_2^2} \zeta_2 \right]}{1 - \frac{Y_1^2}{Y_2^2}} \quad (11)$$

โดยที่ Y_1 เป็นแอมพลิจูดเมื่อระบบมีอัตราส่วนการหน่วงเป็น ζ_1 และ Y_2 เป็นแอมพลิจูดเมื่อระบบมีอัตราส่วนการหน่วงเป็น ζ_2 ส่วน ε หาได้จาก

$$\varepsilon = \frac{2D}{Y} \sqrt{1 - R \frac{\zeta}{\gamma}} \quad (12)$$

ซึ่งค่าของ Y และ ζ จะใช้ผลจากการทดลองของครั้งที่หนึ่งหรือสองก็ได้

ในงานวิจัยนี้จะนำเสนอการหาค่า β จากความถี่มูลฐาน ซึ่งจะหาได้โดยการใช้อุนุกรมของวอลเตอร์รา โดยปรับสมการที่ (4) ใหม่เป็น

$$\ddot{y}(t) + \left[2\zeta\omega_s - p\gamma \left(1 - \varepsilon \frac{y^2(t)}{D^2} \right) \right] \dot{y}(t) + \left(\omega_s^2 - \frac{pu\beta}{D} \right) y(t) = \frac{1}{2} puC_L \sin(\omega t + \theta) \quad (13a)$$

หรือ

$$\ddot{y}(t) + \left[2\zeta\omega_s - p\gamma \left(1 - \varepsilon \frac{y^2(t)}{D^2} \right) \right] \dot{y}(t) + \left(\omega_s^2 - \frac{pu\beta}{D} \right) y(t) = Ff(t) \quad (13b)$$

โดยที่

$$p = \frac{puD}{m} \quad (14a)$$

แอมพลิจูดของแรงเป็น

$$F = \frac{1}{2} puC_L \quad (14b)$$

และ

$$f(t) = \sin(\omega t + \theta) \quad (14c)$$

เมื่อสัญญาณเข้าของระบบเป็น $Ff(t)$ สัญญาณออกของระบบในรูปของอนุกรมของวอลเตอร์ราเป็น

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^n y^n(t) \quad (15)$$

แทนสมการที่ (15) ในสมการที่ (13b) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} F^n \ddot{y}_n(t) + \left[2\zeta\omega_s - p\gamma \left(1 - \frac{\varepsilon}{D^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n2=1}^{\infty} F^{(n1+n2)} y_{n1}(t) y_{n2}(t) \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} F^n \dot{y}_n(t) \\ + \left(\omega_s^2 - \frac{pu\beta}{D} \right) \sum_{n=1}^{\infty} F^n y_n(t) = Ff(t) \end{aligned} \quad (16a)$$

หรือ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} F^n \ddot{y}_n(t) + 2\delta\Omega \sum_{n=1}^{\infty} F^n \dot{y}_n(t) + \frac{p\gamma\varepsilon}{D^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n2=1}^{\infty} \sum_{n3=1}^{\infty} F^{(n1+n2+n3)} y_{n1}(t) y_{n2}(t) \dot{y}_{n3}(t) \\ + \Omega_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} F^n y_n(t) = Ff(t) \end{aligned} \quad (16b)$$

โดยที่

$$\Omega_n^2 = \omega_s^2 - \frac{pu\beta}{D} \quad (17a)$$

และ

$$\delta\Omega_n = \frac{2\zeta\omega_s - p\gamma}{2} \quad (17b)$$

ที่สัมประสิทธิ์ F^1 สัญญาณของระบบเชิงเส้นได้

$$\ddot{y}_1(t) + 2\delta\Omega_n \dot{y}_1(t) + \Omega_n^2 y_1(t) = f(t) \quad (18a)$$

$$y_1(t) = H_1[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (18b)$$

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{(\Omega_n^2 - \Omega^2) + j2\delta\Omega_n\Omega} \quad (18c)$$

จากสมการที่ (18) $H_1[]$ เป็นโอเปอเรเตอร์เชิงเส้น, $H_1(\Omega)$ พังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่งของระบบ และสัญญาณ $y_1(t)$ เป็นสัญญาณแบบฮาร์มอนิกที่มีความถี่เป็น $\Omega_d = \Omega_n \sqrt{1-\delta^2}$ ซึ่งจะทำให้หาค่าของ β ได้จาก

$$\beta = \frac{D}{pu}(\omega_s^2 - \Omega_n^2) \quad (19)$$

โดยที่

$$\Omega_n^2 = \Omega_d^2 + \left(\zeta\omega_s - \frac{p\gamma}{2}\right)^2 \quad (20)$$

ในทางปฏิบัติ Ω_d จะหาได้จากคาบเวลาของการสั่นสะเทือน ซึ่งหาได้จาก

$$\Omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad (21)$$

โดยที่ T_d เป็นคาบเวลาของการสั่นสะเทือน
จากสมการ (16) ที่สัมพันธ์ F^2 ได้

$$\ddot{y}_2(t) + 2\delta\Omega_n\dot{y}_2(t) + \Omega_n^2 y_2(t) = 0 \quad (22a)$$

$$y_2(t) = H_1[0] = 0 \quad (22b)$$

และสัญญาณออกอันดับที่สามหาจาก สมการ(15) ที่สัมพันธ์ F^3 ได้

$$\ddot{y}_3(t) + 2\delta\Omega_n\dot{y}_3(t) + \Omega_n^3 y_3(t) = -\frac{p\gamma\epsilon}{D^2} y_1^2(t)\dot{y}_1(t) \quad (23a)$$

$$y_3(t) = -\frac{p\gamma\epsilon}{D^2} H_1[y_1^2(t)\dot{y}_1(t)] \quad (23b)$$

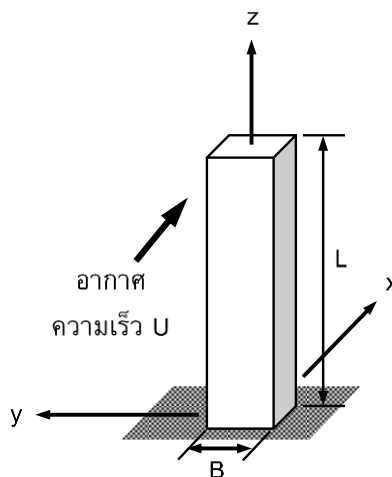
จะเห็นได้ว่าสัญญาณออกในลำดับถัด ๆ ไปของอนุกรมของวอลเตอร์รา จะมีเฉพาะเทอมที่เป็นเลขคี่ เท่านั้น และไม่มีความต้องการหาเนื่องจาก สามารถหาพารามิเตอร์ได้ครบแล้ว และสัญญาณออกในลำดับสูงของอนุกรมของวอลเตอร์ราจะมีความถี่ในลำดับสูง ซึ่งเป็นความถี่ซูเปอร์ฮาร์โมนิก (Super Harmonic) จึงไม่น่าสนใจ

4. ผลการคำนวณ

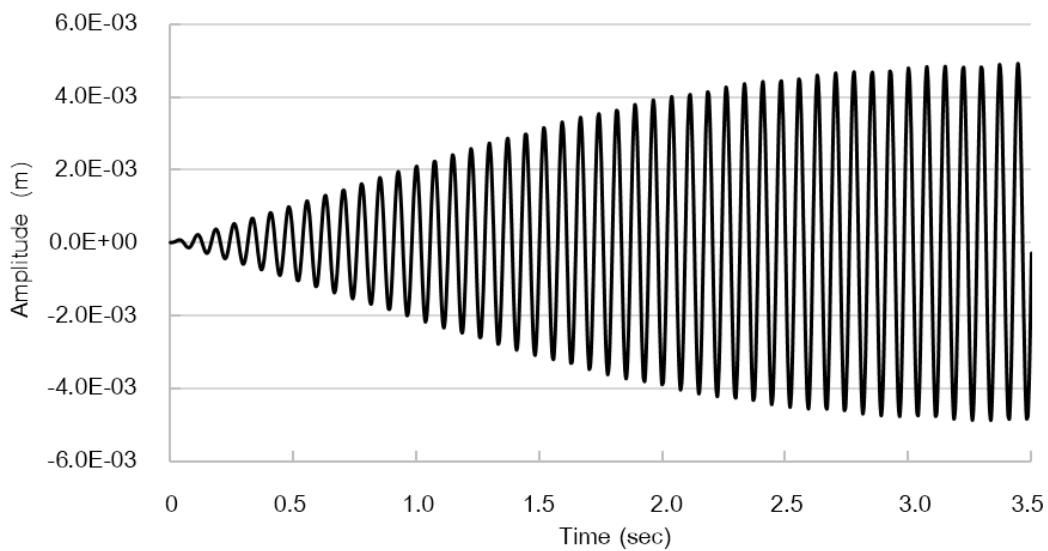
การทดสอบความถูกต้องของวิธีการที่นำเสนอ จะใช้ข้อมูลบางส่วน โดยอ้างอิงการทดลองของสแกนแลน ซึ่งในการทดลองของสแกนแลนได้ทำการทดลองกับแท่งคานที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส กว้าง $B = D = 0.3$ m, ยาว $L = 0.984$ m, มวล $m = 6.085$ kg/m, ความแข็งตึงของสปริง $k = 42.95$ kN/m, สัดส่วนความหน่วง 0.002 , ความถี่ธรรมชาติของระบบเมื่อเกิดการสั่นสะเทือนจากกระแสลมเป็น 11.3 Hz และมีค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังนี้ $\gamma = 6.27$, $\beta = -5.7$, $\varepsilon = 1082.2$ โดยมีกระแสลมที่มีความหนาแน่นของอากาศ $\rho = 1.225$ kg/m³ และความเร็วลมเฉลี่ย $u = 8.5$ m/s ไหลผ่าน ดังรูปที่ 3 ในการคำนวณจะสมมติว่าระบบมีมุมเฟส $\theta = 0$ ซึ่งจะทำให้สมการ (3) เป็น

$$\ddot{y}(t) + [-0.448951 + 154813y^2(t)]\dot{y}(t) + 7256.55y(t) = 0.0545437 \sin(\omega t + \theta) \quad (24)$$

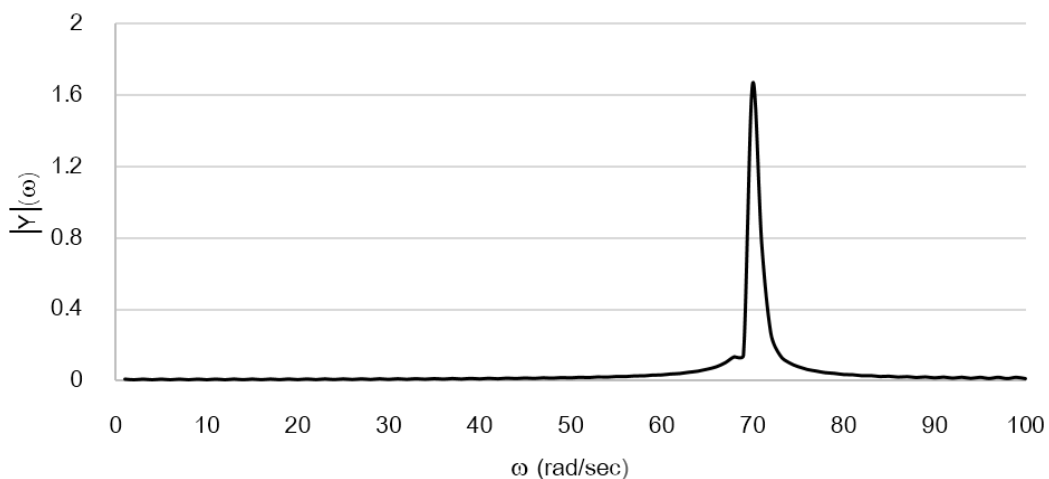
ผลลัพธ์ของการสั่นสะเทือนของระบบตามสมการ (24) หาได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธีรุงเงกุตต้า (Runge-Kutta Method) [8] โดยได้สัญญาณออกของระบบในโดเมนเวลาและในโดเมนความถี่ ดังรูปที่ 4 และ 5 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อระบบเริ่มต้นจากจุดหยุดนิ่งที่ $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ สัญญาณออกของระบบจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้น จนกระทั่งเสถียรที่เวลาประมาณ 3 วินาที



รูปที่ 3 รูปแบบของปัญหาที่ใช้ในการทดสอบ



รูปที่ 4 สัญญาณออกของระบบในโดเมนเวลา



รูปที่ 5 สัญญาณออกของระบบในโดเมนความถี่

เมื่อได้ผลลัพธ์การสั่นสะเทือนของระบบตามรูปที่ 4 และ 5 แล้ว จะสามารถหาพารามิเตอร์ต่าง ๆ ได้ โดย γ และ ε หาได้จากสมการที่ (11) และ (12) ตามลำดับ โดยทำการทดลองสองครั้งโดยปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวหน่วงทั้งสองครั้งให้ไม่เท่ากัน และทำการวัดขนาดของแอมพลิจูดทั้งสองครั้งได้ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ผลการคำนวณขนาดของแอมพลิจูดที่เปลี่ยนไปกับค่าของ ζ

ครั้งที่	ζ	Y
1	0.001	0.000548158
2	0.002	0.000541817

เมื่อนำค่าของ ζ และแอมพลิจูด Y ที่ได้ไปแทนในสมการที่ (11) และ (12) จะทำให้ได้ค่าของ γ และ ε เป็น $\gamma = 6.27$ และ $\varepsilon = 1082.2$ ซึ่งตรงกับค่าในตัวอย่างที่สมมติไว้ ส่วนค่าของ β จะสามารถหาได้โดยการวัดคาบเวลาของความถี่มูลฐาน จากรูปที่ 5 ในช่วงที่สัญญาณเสถียรแล้วได้ $T = 0.0736$ วินาที แล้วนำค่าคาบเวลานี้ไปคำนวณหาค่า Ω_d จากสมการที่ (21) แล้วนำไปคำนวณหาค่า β จากสมการที่ (19) จะได้ค่า $\beta = -5.7$ ซึ่งมีค่าถูกต้อง จากสมการที่ (24) สัญญาณอันดับที่หนึ่งของอนุกรมของวอลเตอร์ราเป็น

$$\ddot{y}_1(t) - 0.448951\dot{y}_1(t) + (85.18538)^2 y_1(t) = 0.0818f(71t) \quad (25)$$

จะเห็นได้ว่าความถี่ธรรมชาติของระบบทางกลที่สมมติในครั้งแรกมีค่าเป็น

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}} = 84.01 \text{ rad / sec} \quad (26)$$

แต่ด้วยการเคลื่อนที่ตัดแนวขวางกับกระแสลมจึงเกิดความแข็งแรงที่ติดจากอากาศเพิ่มขึ้น จึงทำให้ความถี่ธรรมชาติเปลี่ยนไปเป็นตามสมการ (17a) จึงทำให้ความถี่ธรรมชาติของระบบเปลี่ยนไปเป็น 85.18 rad/s ซึ่งมีความแตกต่างจากเดิมไป 1.37% ถ้าต้องการประยุกต์ไปใช้กับงานที่ต้องการให้เกิดความถี่พ้องจะทำได้โดยกำหนดพารามิเตอร์ของระบบใหม่ โดยพิจารณาจากสมการ (16) โดยกำหนดให้ $\Omega_n = \omega$ และกำหนดค่าความแข็งแรงของสปริงใหม่เป็น

$$k = m\omega^2 + \rho u^2 \beta \quad (27)$$

ถ้าเปลี่ยนค่าความแข็งแรงใหม่ตามสมการ (27) จะได้สมการใหม่เป็น

$$\ddot{y}_1(t) - 2.93706\dot{y}_1(t) + 5041y_1(t) = 0.0545437 \sin(71t) \quad (28)$$

สมการ (28) จะใช้เป็นสมการสำหรับกำหนดความถี่ธรรมชาติของระบบได้เนื่อง จากความถี่ของระบบเป็น ความถี่มูลฐาน แต่จากสมการ (28) จะเห็นว่าสัญญาณออกของระบบไม่เสถียร เนื่องจากมีเทอมของตัวห่วยเป็นลบ แต่สัญญาณออกของระบบโดยรวมตามรูปที่ 4 มีความเสถียร เนื่องจากเทอมไม่เชิงเส้นอันดับสูง ๆ รวมอยู่ด้วย

5. สรุป

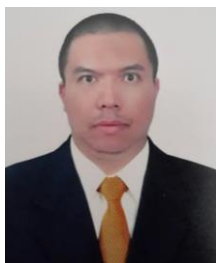
จากการคำนวณตามตัวอย่างที่ใช้ตามข้อมูลของแสกนแลนพบว่าการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้น γ และ ε ของแสกนแลน โดยใช้วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ของการหน่วงของระบบทางกลสามารถทำได้ ในทางปฏิบัติจริงเนื่องจาก $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ ซึ่งสามารถปรับ ζ ได้โดยปรับค่า c , m หรือ k ตัวหนึ่งตัวใด ก็ได้ ส่วนค่า β หาได้โดยวัดคาบเวลาของสัญญาณการสั่นสะท้อนเมื่อระบบอยู่ในสถานะทรงตัวมัน (Steady State Response) ความแม่นยำของการวัดคาบเวลา จะทำให้ได้ผลของพารามิเตอร์ β ถูกต้อง ทั้งการวัดขนาดของแอมพลิจูดและคาบเวลาถ้าทำการวัดซ้ำหลาย ๆ ครั้งแล้วนำค่าที่ได้มาเฉลี่ยก็จะทำให้ค่าที่ได้มีความแม่นยำและน่าเชื่อถือมากขึ้น อย่างไรก็ตามพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นจะแปรผันไปตามความเร็วลม และรูปร่างหน้าตัดของโครงสร้าง ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไม่เชิงเส้น จะใช้ได้เฉพาะเจาะจงกับระบบที่กำหนดเท่านั้น ไม่สามารถใช้ได้กับทุก ๆ ระบบได้

References

- [1] White FM. Viscous fluid flow. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book; 1991.
- [2] Scanlan RH. State-of-the-art methods for calculating flutter, vortex-induced, and buffeting response of bridge structures. Final report. Washington, DC: Federal Highway Administration, Offices of Research & Development Structures and Applied Mechanics Division; 1981. Report No. FHWA/RD-80/50.
- [3] Traivivatana S, Boonmarlert P, Theeraek P, Phongthanapanich S, Dechaumphai P. Combined adaptive meshing technique and characteristic-based split algorithm for viscous incompressible flow analysis. Applied Mathematics Mechanics 2007;28(9): 1163-72.
- [4] Manshadi MD, Ghassemi M, Mousavi SM, Mosavi AH, Kovacs L. Predicting the parameters of vortex bladeless wind turbine using deep learning method of long short-term memory. Energies 2021;14(16):4867. doi: 10.3390/en14164867.

- [5] Steffen F. Wind-induced vibration in high-rise buildings [master's dissertation]. Lund: Lund University; 2016.
- [6] Chaiyapinunt S. Fluid mechanics. 3th ed. Bangkok: Chulalongkorn University Press; 2014. (In Thai)
- [7] Adeyanju AA, Boucher D. Theoretical analysis of the bladeless wind turbine performance. Journal of Scientific Research & Reports 2020;26(10):93-106.
- [8] Chapra SC, Canale RP. Numerical methods for engineering. 7th ed. New York: McGraw-Hill Book; 2015.

ประวัติผู้เขียนบทความ



ปริญญ์ บุญมาเลิศ ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: parinya.boon@kbu.ac.th



ธนู จุ้ยฉาย ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ 1203 E-mail: thanu.cho@kbu.ac.th



ทิพวัลย์ เพชรรัก ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ 1203 E-mail: thippawan.phe@kbu.ac.th



วันชนะ ณรงค์ฤทธิเดช ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำ
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777
ต่อ 1203 E-mail: wanchana.nar@kbu.ac.th



นันทชนก หาญตะคุ ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำ
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777
ต่อ 1203 E-mail: nunchanok.han@kbu.ac.th

Article History:

Received: November 22, 2024

Revised: July 2, 2025

Accepted: July 3, 2025