

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนเชิงตัวเลขสำหรับคานเซลลูลาร์ที่ใช้
วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM
NUMERICAL INVESTIGATION ON VIBRATION OF FUNCTIONALLY
GRADED CELLULAR BEAM

ชนนฐิยวัส รัตนวิเชียร¹ กำธรเกียรติ มุสิกเกตุ^{2*} และ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม³

¹นักศึกษา, หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโครงสร้าง คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี, คลองหก คลองหลวง ปทุมธานี 12110,

Chanonyawat_r@mail.rmutt.ac.th

^{2,3}อาจารย์, ภาควิชาวิศวกรรมโยธา สาขาวิศวกรรมโครงสร้าง คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี, คลองหก คลองหลวง ปทุมธานี 12110,

^{2*}kamtornkiat@rmutt.ac.th, ³boonchai_p@rmutt.ac.th

Chanonyawat Ruttanavichean¹, Kamtornkiat Musiket^{2*} and Boonchai Phungpaingam³

¹Student, Master of Engineering Program, Department of Civil Engineering, Faculty of
Engineering, Rajamangala University of Technology Thunyaburi, Klong Hok, Khlong Luang,
Pathumthani 12110, Thailand, Chanonyawat_r@mail.rmutt.ac.th

^{2,3}Lecturer, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Rajamangala
University of Technology Thunyaburi, Klong Hok, Khlong Luang, Pathumthani 12110, Thailand,

^{2*}kamtornkiat@rmutt.ac.th, ³boonchai_p@rmutt.ac.th

* ผู้ประพันธ์บรรณกิจ (Corresponding author)

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ทำการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนเชิงตัวเลขแบบบิสระสำหรับปัญหาในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ของคานเซลลูลาร์ (Cellular Euler-Bernoulli Beam) ที่มีคุณสมบัติวัสดุเชิงประกอบแบบสองทิศทาง BDFGM (Bi-Directional Functionally Graded Materials) ซึ่งประกอบขึ้นจากวัสดุสองชนิด คือ Aluminum และ Zirconia กฎการผสมตามแบบจำลองของกฎการผสมถูกเสนอเพื่ออธิบายการเปลี่ยนแปลงของเศษส่วนปริมาตรของวัสดุ โดยกำหนดให้ค่าดัชนีการแปรผันของโมดูลัสยืดหยุ่นและความหนาแน่นมีการแปรผันด้วยสมการแบบเอกซ์โพเนนเชียลตามแนวแกนและกฎกำลังตามความลึกของคาน ค่าความถี่ธรรมชาติสามลำดับ

แรกของการเซลล์อย่างง่ายที่ได้จากการวิเคราะห์พบว่า มีการแปรผกผันกับค่าดัชนีการแปรผันที่เพิ่มขึ้นทั้งสองทิศทางโดยดัชนีการแปรผันตามความลึกนั้น ส่งผลต่อการอัตราการลดลงของค่าความถี่ธรรมชาติมากกว่าดัชนีการแปรผันตามแนวแกน แบบจำลองที่เสนอนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อการวิเคราะห์และออกแบบวัสดุเชิงประกอบแบบสองทิศทางที่ประกอบด้วยวัสดุที่มีคุณสมบัติต่างกันมากกว่าสองชนิดเพื่อพิจารณาเลือกค่าความถี่ธรรมชาติที่เหมาะสมสำหรับปัญหาที่ต้องการต่อไป

คำสำคัญ: วัสดุเชิงประกอบแบบสองทิศทาง, คานเซลล์ลาร์, วิถีไฟไนท์เอลิเมนต์, การสั่นสะเทือน, ความถี่ธรรมชาติ, รูปร่างโหมด

ABSTRACT

This research performs a freeform numerical vibration analysis for a two-dimensional problem using the Finite Element Method of a cellular Euler-Bernoulli beam with mechanical material properties. BDFGM (Bi-Directional Functionally Graded Materials) is composed of two materials, Aluminum and Zirconia. A mixing law based on rule of mixtures is proposed to account for the variation in the volume fraction of materials. It is determined that the variation indices of elastic modulus and density vary with the exponentially along the axial direction and power law with the depth of the beam. The first three natural frequencies of the simple cellular beams obtained from the analysis are found to be inversely proportional to the variation index increasing in both directions with the variation index increasing with depth. It affects the rate of decrease of the natural frequency value more than the axial variation index. This proposed model can be applied to the analysis and design of bidirectional composites consisting of more than two materials with different properties in order to determine the appropriate natural frequency value for the desired problem.

KEYWORDS: Bi-Directional Functionally Graded Material, Cellular Beam, Finite Element Method, Vibration, Natural Frequency, Mode Shape

1. บทนำ

วัสดุเชิงประกอบแบบ Functionally Graded Materials (FGM) เป็นวัสดุชนิดหนึ่งของวัสดุเชิงประกอบ (Composite Materials) ที่มีโครงสร้างเกิดจากการประกอบกันของวัสดุผสมที่แตกต่างกันหลายประเภททำให้มีคุณสมบัติที่แตกต่างกันอย่างต่อเนื่องตามทิศทางการออกแบบ โดยมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นหรือค่าสัมประสิทธิ์ของการขยายตัวจากความร้อน และทำให้เปลี่ยนองค์ประกอบ

ของวัสดุจากโลหะเป็นเซรามิก ความแข็งแรงของแต่ละตำแหน่งจะแปรเปลี่ยนจากแข็งไปจนถึงอ่อน ทำให้โครงสร้างเชิงประกอบในลักษณะนี้สามารถลดการเกิดปัญหาความเค้นในระหว่างชั้นของส่วนผสมได้ดี ซึ่งตรงข้ามกับวัสดุเชิงประกอบแบบแซนด์วิชหรือลามิเนต (Sandwich/Laminated Composite Materials) เพราะวัสดุประเภทนี้มีการแปรผันคุณสมบัติอย่างกะทันหันบริเวณผิวสัมผัสของวัสดุในแต่ละชนิด และเมื่อมีน้ำหนักบรรทุกมากระทำหรือมีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิจะทำให้เกิดความเข้มข้นของความเค้น (Stress Concentrations) และความไม่ต่อเนื่องของความเค้นขึ้น ซึ่งจะทำให้เกิดปัญหาการแยกชั้นของวัสดุและการลื่นไถลบริเวณผิวสัมผัส (Delamination and Slipping)

ในอดีตที่ผ่านมาพบว่ามีนักวิจัยหลายกลุ่มทำการศึกษาค้นคว้าการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนและค่าความถี่ธรรมชาติของคานที่ใช้วัสดุ Functionally Graded Material (FGM) เชิงตัวเลข อาทิเช่น ในปี ค.ศ. 2005 Kobayashi et al [1] ได้ทำการศึกษาค้นคว้าการสั่นสะเทือนของคานรูปทรงเรขาคณิตที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน จากการศึกษาค้นคว้าพบว่าการแตกร้าวที่บริเวณด้านบนของคาน ซึ่งการแตกร้าวดังกล่าวมีอิทธิพลมาจากค่าความถี่ธรรมชาติและผลจากรูปทรงเรขาคณิตที่สอดคล้อง ในปี ค.ศ. 2009 Sina et al [2] เสนอทฤษฎีคานรูปแบบใหม่ซึ่งได้รับการพัฒนาสำหรับคานคอมโพสิต ถูกนำมาใช้สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนอย่างอิสระของคาน FGM สมการเคลื่อนที่ได้มาจากหลักการของแฮมิลตัน ผลการวิจัยพบว่า ค่าที่ได้มีความแตกต่างเล็กน้อยสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติ จากทฤษฎีการเปลี่ยนรูปแบบแรงเฉือนลำดับที่หนึ่งแบบดั้งเดิม และรูปทรงเรขาคณิตที่สอดคล้องของทั้งสองวิธีนั้นเหมือนกัน ในปี ค.ศ. 2010 Simsek and Kocaturk [3] ศึกษาคุณสมบัติการสั่นสะเทือนอิสระและบังคับ แบบพหุคูณของคาน FGM โดยใช้ทฤษฎีคานรูปแบบต่าง ๆ โดยมีแรงกระทำเคลื่อนที่ และคุณสมบัติวัสดุของคานถูกสมมุติว่ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องในทิศทางของความหนาตามกฎเลขชี้กำลังหรือรูปแบบกฎกำลัง ผลการวิจัยพบว่า ปัจจัยจากผลของ Shear Deformation การกระจายตัวของวัสดุ รวมทั้งความเค้นที่เกิดขึ้นในคานได้ถูกเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยที่ผ่านมา พบว่ามีความสอดคล้องกันดี และสามารถยืนยันถึงผลกระทบของปัจจัยดังกล่าวข้างต้นที่มี ต่อผลเฉลยของการสั่นสะเทือนของคานแบบ FGM ในปี ค.ศ. 2019 Gao et al [4] ได้นำเสนอวิธี Hybrid Chebyshev Surrogate Model with Discrete Singular Method เพื่อทำการวิเคราะห์พฤติกรรมทางพลศาสตร์ของคานเชิงประกอบแบบ FGM ที่มีคุณสมบัติวัสดุที่ไม่แน่นอน จากการศึกษาค้นคว้าพบว่าความไม่แน่นอนของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเป็นพารามิเตอร์ ที่มีผลกระทบต่อพฤติกรรมทางพลศาสตร์ของคานมากที่สุด ในปี ค.ศ. 2022 Nguyen et al [5] ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมการโก่งเดาะ การดัดและการสั่นสะเทือนของคานเชิงประกอบแบบ FGM ด้วยการใช้ทฤษฎีแรงเฉือนแบบสองตัวแปรอย่างง่าย (A Simple Two-Variable Shear Deformation Theory) และได้อธิบายถึงผลกระทบของรูปร่าง ลักษณะการกระจายคุณสมบัติของวัสดุและความเครียดเฉือนต่อค่าของความถี่ธรรมชาติ น้ำหนักบรรทุกวิกฤต การโก่งตัวของคานและความเค้นที่เกิดขึ้น ในปี ค.ศ. 2022 Al-Zahrani et al [6] ได้

ทำการศึกษาวិเคราะห์การสั่นสะเทือนความถี่ธรรมชาติในระนาบ 2 มิติ ของ Functionally Graded Strip Beam ซึ่งมีคุณสมบัติโมดูลัสการเปลี่ยนแปลงของวัสดุทั้งตามแนวแกน และตามความลึกของหน้าตัด โดยใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ (โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS) จากผลการศึกษาพบว่า คุณสมบัติโมดูลัสการเปลี่ยนแปลงของวัสดุตามแนวแกนจะมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติมากกว่า คุณสมบัติโมดูลัสการเปลี่ยนแปลงของวัสดุตามความลึกของหน้าตัด

นอกจากนี้ วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM ยังมีคุณสมบัติโดดเด่นอีกหลายด้าน เช่น มีความแข็งแรงสูง น้ำหนักเบา และมีความต้านทานความร้อนสูง เป็นต้น ด้วยคุณสมบัติดังกล่าวจึงทำให้วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM ถูกนำไปประยุกต์ใช้งานอย่างแพร่หลาย ไม่ว่าจะเป็นด้านวิศวกรรมการบินและอวกาศ วิศวกรรมยานยนต์ วิศวกรรมไฟฟ้า ชีวการแพทย์ และการนำมาใช้เป็นวัสดุทางเลือกที่ใช้ในงานโครงสร้าง เป็นต้น [7-9]

การศึกษาวงจรกรรมของโครงสร้างที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบแบบ FGM จึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจอย่างมาก เนื่องจากได้นำข้อดีของวัสดุทั้งสองชนิดมาใช้ประโยชน์ร่วมกัน ถึงแม้ว่าจะมีงานวิจัยจำนวนมากที่ศึกษาพฤติกรรมของคานเชิงประกอบแบบ FGM ที่มีการแปรผันคุณสมบัติของวัสดุตามทิศทางความลึก หรือตามทิศทางแนวแกนของหน้าตัด (Axially FGM) อย่างไรก็ตามหนึ่งแต่การเสนอแบบจำลองเชิงประกอบแบบ FGM ที่มีการแปรผันคุณสมบัติของวัสดุทั้งสองทิศทาง (Bi-Directional FGM) นั้นยังมีจำนวนไม่มากนัก งานวิจัยในครั้งนี้จึงมุ่งเน้นไปที่การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free Vibrations) ของคานเซลล์ูลาร์ที่ใช้วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM ในสองมิติด้วยวิธีเชิงตัวเลข (Two-Dimensional Numerical Analysis) เพื่อศึกษาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุในสองทิศทางด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) โดยทำการกำหนดให้การเปลี่ยนแปลงโมดูลัสยืดหยุ่นและความหนาแน่นของวัสดุอยู่ในรูปฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของคานโดยตรง

2. การวิเคราะห์การสั่นสะเทือน (Vibration Analysis)

สมการในรูปแบบแข็ง (Strong Form) ของวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาทางพลศาสตร์ในสองมิติ (2D Elastic Dynamics) ภายหลังจากการใส่สมการเงื่อนไขขอบของการเคลื่อนที่ (Dirichlet BCs) และแรงกระทำ (Neumann BCs) โดยอาศัยหลักของการเปลี่ยนรูปร่างเสมือน (Principle of Virtual Displacement) แล้วนั้น จะเปลี่ยนไปอยู่ในรูปแบบอ่อน (Weak Form) ที่สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1)

$$\int_{\Omega} \rho \delta u \ddot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega = \int_{\Gamma_N} \delta u \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u b d\Omega \quad (1)$$

เมื่อ δu และ $\delta \epsilon$ หมายถึงการเคลื่อนที่และความเครียดเสมือนตามลำดับ อาศัยเทคนิคการแบ่งออกเป็นส่วยย่อย ๆ (Discretization) ด้วยวิธีเศษถ่วงน้ำหนักตกค้างของกาเลอร์กิน (Galerkin Weighted Residual Method) Weak Form ในสมการที่ (1) จะถูกเปลี่ยนรูปไปเป็นระบบสมการซึ่งสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของสมการสัญลักษณ์เมทริกซ์ ได้เป็น

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (2)$$

เมื่อ M คือเมทริกซ์ของมวล (Mass Matrix) และ C คือ เมทริกซ์ของแรงต้านทานการสั่นสะท้อน (Damping Matrix)

$$M = \int_{\Omega} N^T \rho N d\Omega \quad (3)$$

$$C = \int_{\Omega} N^T c N d\Omega \quad (4)$$

โดยที่ K คือสติฟเนสเมทริกซ์หลักของระบบ F และ u คือเวกเตอร์ของแรงกระทำภายนอกและการเปลี่ยนตำแหน่งของโหนดตามลำดับ เครื่องหมายจุดด้านบนตัวแปร u หมายถึงลำดับของอนุพันธ์เทียบกับเวลาของการเปลี่ยนตำแหน่งนั่นเอง

สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะท้อนเพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequencies) รวมถึงรูปร่างที่สอดคล้องกับความถี่ดังกล่าว (Mode Shapes) นั้น เทอมที่เกี่ยวข้องกับแรงภายนอกและแรงต้านทานการสั่นสะท้อนจะถูกกำจัดออกไปจากสมการที่ (2) และสามารถลดรูปลงเป็นสมการอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ (Homogeneous Differential Equation) ได้ตั้งสมการที่ (5)

$$\bar{K}\bar{u} + M\ddot{\bar{u}} = 0 \quad (5)$$

สมการที่ (5) ดังกล่าวมีผลเฉลยทั่วไปในรูปของสมการเอ็กโปเนนเชียลที่เป็นฟังก์ชันของเวลาและความถี่เชิงมุม (ω ; Angular Frequency)

$$u = U \exp(j\omega t) \quad (6)$$

โดยที่ $j = \sqrt{-1}$ และ U คือขนาดของการเคลื่อนที่ของโหนด (Amplitude of Displacement) นั้นเอง หากนำผลเฉลยทั่วไปในสมการที่ (6) แทนค่ากลับลงไปในสมการอนุพันธ์ลำดับสองข้างต้น จะทำให้สมการเปลี่ยนเป็นสมการ Eigenvalue Problems ซึ่งสามารถเขียนแสดงใหม่ได้ดังสมการที่ (7) นั้นเอง ถ้าทราบค่าของ ω ก็จะสามารถคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดที่สอดคล้องได้

$$(\bar{K} - \omega^2 M)\bar{u} = 0 \quad (7)$$

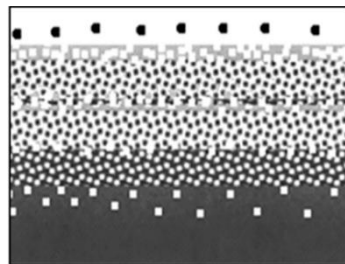
เมื่อ $\omega = \sqrt{k/m}$ คือความถี่เชิงมุม (Angular Frequency) ในหน่วย rad/sec

3. วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM (Functionally Graded Materials)

วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM ได้รับการเสนอครั้งแรกในช่วงทศวรรษ 1980 โดยนักวิทยาศาสตร์ชาวญี่ปุ่น เพื่อใช้ในการบินอวกาศ จากสาเหตุที่วัสดุคอมโพสิตแบบดั้งเดิมที่ลองใช้ในโครงการล้มเหลวเนื่องจากการแยกตัว (Delamination) และการหลุดลอก (Salling) ของวัสดุโลหะกับเซรามิกที่ใช้และปัญหาเกี่ยวกับความเสียหายในรูปแบบการแตกร้าว (Cracking) ได้มีการพัฒนาวัสดุที่สามารถทนต่อความแตกต่างของอุณหภูมิที่สูงได้ โดยได้ค้นพบว่าปัญหาเหล่านั้นมักเกิดขึ้นจากความไม่ต่อเนื่องของส่วนผสมจึงทำให้เกิดความเค้นสะสมในระหว่างชั้นส่วนผสม การทำให้ส่วนเชื่อมต่อระหว่างวัสดุสองชนิดด้วยส่วนต่อประสานแบบค่อยเป็นค่อยไป จะสามารถแก้ไขปัญหาดังกล่าวได้ จากแนวความคิดดังกล่าวข้างต้น ทำให้มีการพัฒนาวัสดุคอมโพสิตชนิดใหม่ ๆ โดยทดลองใส่วัสดุชนิดที่สองเข้าไปในวัสดุหลักเพื่อให้วัสดุชนิดที่สองค่อย ๆ เพิ่มขึ้นเป็นเปอร์เซ็นต์ในวัสดุหลักจาก 0% เป็น 100% ด้วยวิธีอื่นเทอร์เฟซและพัฒนากระบวนการสร้างวัสดุสมบัติเชิงฟังก์ชัน ที่เรียกกันในที่สุดว่า Functionally Graded Materials (FGM) ดังแสดงในรูปที่ 1



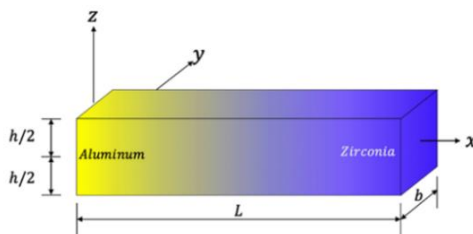
(a) วัสดุคอมโพสิตลามิเนตแบบดั้งเดิม



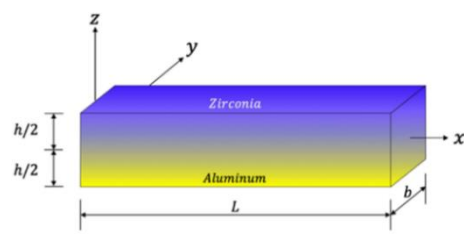
(b) วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM

รูปที่ 1 การกระจายสัดส่วนของคุณสมบัติวัสดุ [10]

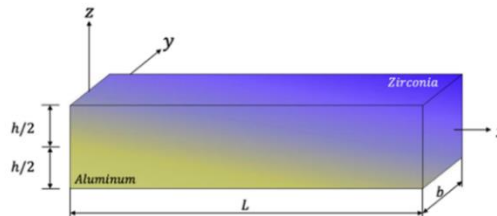
เมื่อพิจารณาคานแบบออยเลอร์-เบอร์นูลลี (Euler-Bernoulli) ที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอซึ่งมีความยาว L ความกว้าง b และความสูง h ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนต x, y, z ที่มีจุดกำเนิดด้านซ้ายตรงกึ่งกลางความสูงของคาน และใช้วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM ซึ่งมีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นไม่คงที่ โดยจะแปรผันอย่างต่อเนื่องและมีทิศทางในการแปรผันคุณสมบัติของวัสดุ เช่น โมดูลัสยืดหยุ่น ความหนาแน่นของวัสดุ อัตราส่วนปัวซอง สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน เป็นต้น เป็นไปได้ใน 3 รูปแบบด้วยกันคือ แปรผันตามความยาวของคาน (รูปที่ 2(a)) แปรผันตามความลึกหรือตามขวางของหน้าตัดคาน (รูปที่ 2(b)) และแปรผันสองทิศทางทั้งตามแนวแกนและตามความลึกของหน้าตัดคาน (รูปที่ 2(c))



(a) แปรผันตามความยาวแนวแกน



(b) แปรผันตามความลึก



(c) แปรผันทั้ง 2 ทิศทาง

รูปที่ 2 การแปรผันคุณสมบัติของวัสดุเชิงประกอบ FGM

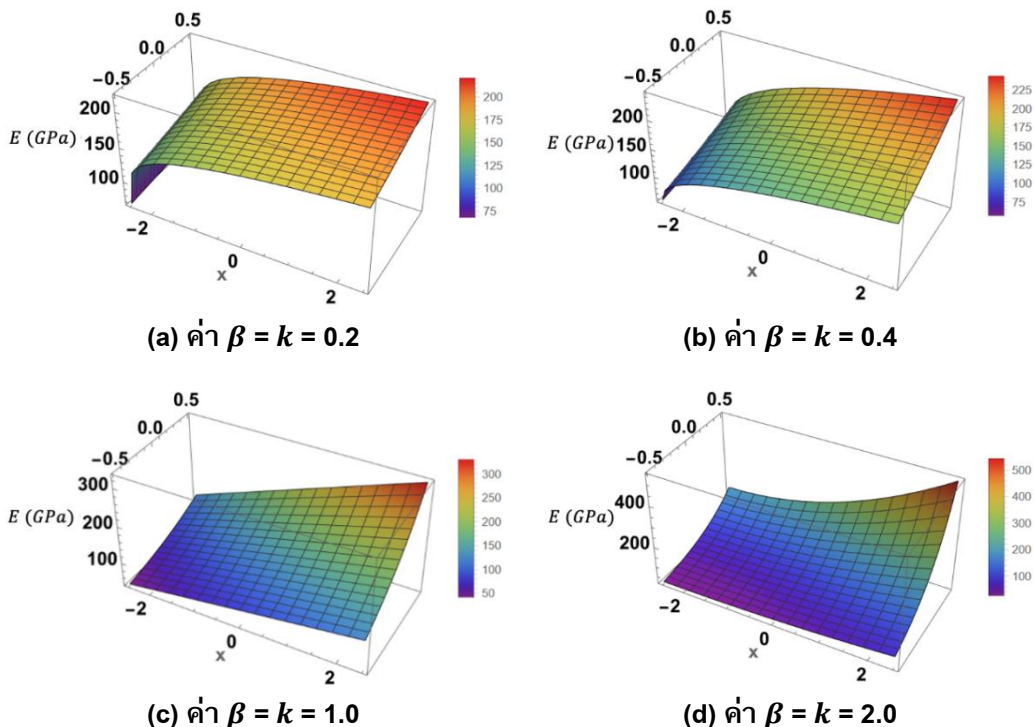
โดยในงานวิจัยครั้งนี้ จะใช้วัสดุเชิงประกอบแบบ FGM ที่กระจายคุณสมบัติของวัสดุแบบสองทิศทาง (Bi-Directional FGM) ตามรูปที่ 2(c) ทั้งในทิศทางตามยาว (ทิศทาง x) และตามขวาง (ทิศทาง z) ของหน้าตัดวัสดุ ด้วยเหตุนี้ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (E) และความหนาแน่น (ρ) ของคาน BDFGM ซึ่งแปรผันของวัสดุตามทิศทางความยาวของคานจะถูกจำลองด้วยสมการเอ็กซ์โปเนนเชียล ซึ่งถูกควบคุมด้วยดัชนีการแปรผัน (Gradient index) β และความแปรผันตามทิศทางความหนาของคานจะถูกจำลองโดยใช้สมการกฎของกำลัง (Power Law) ที่ควบคุมโดยดัชนีการแปรผัน k [11] สมการที่แสดงการกระจายตัวคุณสมบัติของวัสดุทั้งสองทิศทางสำหรับงาน วิจัยในครั้งนี้ แสดงได้ดังสมการที่ (8) และสมการที่ (9) สำหรับโมดูลัสความยืดหยุ่น และความหนาแน่น ตามลำดับ

$$E(x, y) = e^{\frac{\beta}{L}x} [E_z (\frac{2z+h}{2h})^k + E_a \{1 - (\frac{2z+h}{2h})^k\}] \quad (8)$$

$$\rho(x, y) = e^{\frac{\beta}{L}x} [\rho_z (\frac{2z+h}{2h})^k + \rho_a \{1 - (\frac{2z+h}{2h})^k\}] \quad (9)$$

เมื่อ E_z และ ρ_z คือ โมดูลัสความยืดหยุ่นและความหนาแน่นของเซอร์โคเนีย ณ ตำแหน่งมุมซ้ายบน ($z = +\frac{h}{2}$) และ E_a และ ρ_a คือ โมดูลัสความยืดหยุ่นและความหนาแน่นของอลูมิเนียมที่มุมซ้ายล่าง ($z = -\frac{h}{2}$) ตามลำดับ h คือความหนา และ L คือความยาวของคาน

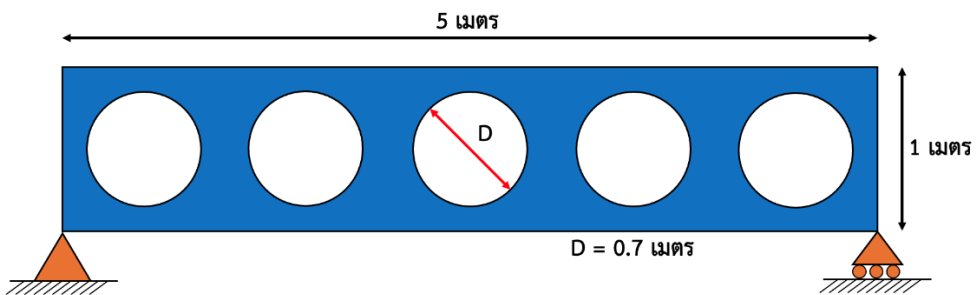
จากตารางที่ 1 ในกรณีนี้ใช้วัสดุแบบ BDFGM โดยมี Aluminum อยู่ด้านล่างและ Zirconia อยู่ด้านบน เมื่อพิจารณาถึงคานที่มีความยาว $L = 5$ เมตร และความหนา $h = 1$ เมตร การเปลี่ยนแปลง Elastic Modulus ที่ค่าดัชนีการแปรผันต่าง ๆ ความแปรผันของวัสดุภายในขอบเขตของคาน BDFGM ที่เป็นไปตามกฎกำลังระหว่างขอบเขตความหนา $-\frac{h}{2} < z < +\frac{h}{2}$ และในเวลาเดียวกันกฎเอ็กซ์โปเนนเชียลภายในขอบเขตแกน $-0 < x < L$ ตามลำดับ ลักษณะการกระจายตัวความเข้มข้นของ Aluminum และ Zirconia ตามสมการที่ (8) และสมการที่ (9) ตลอดพื้นที่หน้าตัดคานที่ศึกษา สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การเปลี่ยนแปลงโมดูลัสยืดหยุ่นเมื่อค่า $\beta = k = 0.2, 1.0, 2.0$

4. วิธีการและผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์ปัญหาความถี่ธรรมชาติของคานาเซลล์ูลาร์ (Cellular Beam) ภายใต้สมมุติฐานของความเค้นในระนาบ 2 มิติ ที่มีความยาว 5 เมตร สูง 1 เมตร (อัตราส่วนความยาวต่อความสูงคานาเท่ากับ 5:1) คานามีรูเจาะจำนวนทั้งสิ้น 5 รู ตามความยาวของคานา โดยรูเจาะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง ขนาด 0.7 เมตร คานาเซลล์ูลาร์เชิงประกอบแบบ FGM สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ ถูกกำหนดให้ใช้วัสดุสองชนิด คือ อลูมิเนียม (Aluminum) และ เซอร์โคเนีย (Zirconia) โดยค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ (Young's modulus) และความหนาแน่น (Density) แปรผันไปในทิศทางตามความยาวและความหนาของวัตถุ (Bi-Directional Functionally Graded Material) ดังแสดงในสมการที่ (8) และสมการที่ (9) โดยกำหนดให้อัตราส่วนปัวซองมีค่าคงที่เท่ากับ 0.28 เนื่องจากการแปรผันที่ส่งผลต่อการวิเคราะห์ทั้งแบบสถิตยศาสตร์และพลศาสตร์นั้น น้อยกว่าการแปรผันของโมดูลัสยืดหยุ่น [12] คุณสมบัติวัสดุของคานา แสดงในตารางที่ 1 กรณีตัวอย่างนี้กำหนดให้เป็นคานาอย่างง่าย (Simple Beam) ที่มีฐานรองรับ (Support) ที่ปลายคานาทางด้านซ้ายเป็นแบบยึดหมุน (Hinged Support) และในขณะที่ปลายคานาด้านขวามีแบบลูกกลิ้ง (Roller Support) ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4



รูปที่ 4 โมเดลของคานาเซลล์ูลาร์

ตารางที่ 1 คุณสมบัติของวัสดุ

คุณสมบัติ (Properties)	หน่วย (Unit)	อลูมิเนียม (Aluminum: Al)	เซอร์โคเนีย (Zirconia: ZrO_2)
E	GPa	70	200
ρ	kg/m ³	2702	5700

4.1 Mesh Convergence

โดยทั่วไปแล้วการสร้างโครงตาข่ายด้วยขนาดที่ละเอียดจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้เข้าใกล้ Exact Solution แต่เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็มากขึ้นเช่นกันสำหรับปัญหาขนาดใหญ่ ดังนั้นจำเป็นต้องมีการเลือกขนาดโครงตาข่ายให้มีความเหมาะสมเพื่อลดเวลาของการคำนวณในขณะที่ยังคงมีความแม่นยำของผลลัพธ์ในระดับที่ยอมรับได้ สามารถทำได้ด้วยการพิจารณาขนาดที่ลดลงของโครงตาข่าย (Element Size) กับการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ธรรมชาติในแต่ละโหมดรูปร่าง (Mode Shapes) ดังแสดงในตารางที่ 2 ซึ่งมีการลู่อเข้าหาผลเฉลยที่ขนาดของโครงตาข่ายมีค่าเป็น 0.0015625 มม. ซึ่งจะได้นำไปใช้สำหรับการวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติในหัวข้อต่อไป

ตารางที่ 2 ขนาดโครงตาข่ายที่เหมาะสมที่ทำให้ความถี่ธรรมชาติลู่อเข้าหาผลเฉลย

Ele. Size (mm.)	ความถี่ธรรมชาติ (รอบต่อวินาที)			
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
0.025	8.1435	14.6970	22.7410	35.9940
0.0125	8.0529	14.2810	22.4580	35.5730
0.00625	7.9635	13.9050	22.1800	35.1580
0.003125	7.9118	13.7010	22.0200	34.9180
0.0015625	7.8754	13.5630	21.9070	34.7500
0.00078125	7.8754	13.5629	21.9031	34.7498

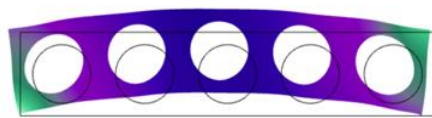
4.2 Model Validation

เนื่องจากไม่สามารถหาค่าผลเฉลยแม่นยำตรงทางทฤษฎี (Close-to-Exact Solution) ของคานตัวอย่างที่มีคุณสมบัติวัสดุแบบ BDFGM นี้ได้ จึงต้องสร้างแบบจำลองของปัญหาสำหรับใช้ในการตรวจสอบแบบจำลอง BDFGM ที่สร้างขึ้น โดยกำหนดให้วัสดุสำหรับตรวจสอบ มีคุณสมบัติ Isotropic ที่มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (Elastic Modulus) และอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio) มีค่าเป็น 30 GPa และ 0.28 ตามลำดับ สามารถทำได้โดยการกำหนดค่าดัชนีการแปรผันทั้งสองทิศทางในสมการที่ (8) และสมการที่ (9) ให้มีค่าเท่ากับศูนย์ เพื่อเปรียบเทียบความถี่ธรรมชาติจำนวน 6 ค่าแรกที่ได้จากการวิเคราะห์กับค่าที่อ้างอิงจาก [13] ผลการเปรียบเทียบดังกล่าวแสดงไว้ในตารางที่ 3 ความถี่ธรรมชาติทั้งหกลำดับซึ่งได้จากการวิเคราะห์กับค่าอ้างอิงนั้น ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ โดยค่าความถี่ธรรมชาติลำดับแรกมาก มีความคลาดเคลื่อนเพียง 3.78 เปอร์เซ็นต์ เท่านั้น

ตารางที่ 3 ความถี่ธรรมชาติ 6 ลำดับแรกเปรียบเทียบกับค่าอ้างอิง

	ความถี่ธรรมชาติ (รอบต่อวินาที)					
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
COMSOL	154.98	621.67	970.24	1269.40	1803.80	2183.10
Ref [13]	149.30	597.80	931.10	1221.30	1732.80	2095.80
Error %	3.78	3.99	4.20	3.94	4.10	4.17

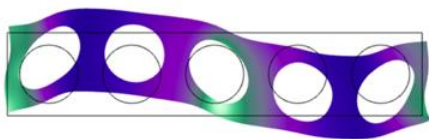
ในการนี้ของรูปร่างโหมด (Mode Shapes) 4 ลำดับแรกที่ได้จากการวิเคราะห์นั้น ผลการตรวจสอบแบบจำลองที่เสนอ ให้รูปร่างที่สอดคล้องกันกับผลจากการอ้างอิง [13] และเป็นรูปร่างโหมดที่เกิดขึ้นได้จริง ดังแสดงในรูปที่ 5



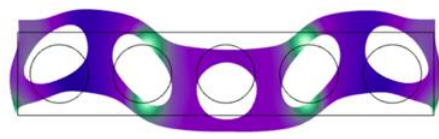
(a) Mode Shape 1



(b) Mode Shape 2



(c) Mode Shape 3



(d) Mode Shape 4

รูปที่ 5 Mode Shapes 4 ลำดับแรกที่เกิดขึ้น

4.3 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Results)

ผลจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับคานาเซลล์ูลาร์อย่างง่ายในระนาบสองมิติซึ่งประกอบไปด้วยวัสดุผสมระหว่างอลูมิเนียมและเซอร์โคเนียที่มีการแปรผันในสองทิศทางโดยค่าดัชนีการแปรผันของวัสดุตามความยาวแนวแกน (β) และตามความลึกของคานา (k) มีค่าอยู่ระหว่าง $0.2 < \beta < 2$ และ $0.2 < k < 2$ ตามลำดับ ทำการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequencies) ใน 3 ลำดับแรกที่เป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงของค่าดัชนีการแปรผัน โดยผลการวิเคราะห์ดังกล่าว แสดงไว้ในตารางที่ 4 ถึง 6 ตามลำดับ

เมื่อค่าดัชนีการแปรผันของวัสดุตามแนวแกน β มีค่าเพิ่มขึ้นนั้น พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติสามลำดับแรกของคานเชลูลาร์มีค่าลดลง และในขณะเดียวกัน ค่าดัชนีการแปรผันของวัสดุตามความลึก k มีแนวโน้มที่ส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติของคานในลักษณะเดียวกันเมื่อคุณสมบัติของคานมีการเปลี่ยนจากอลูมิเนียม (ด้านซ้ายมือของคาน) ไปเป็นเซอร์โคเนีย (ด้านขวามือของคาน) ซึ่งจะไม่สอดคล้องกับความจริงที่ว่าความถี่ธรรมชาติจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและความแข็งแกร่ง (Rigidity) ของคานมีค่าเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตาม ในกรณีศึกษาครั้งนี้ มวลหรือความหนาแน่นของวัสดุมีค่าไม่คงที่หากแต่เพิ่มขึ้นตามค่าดัชนีของการแปรผันด้วยเช่นเดียวกัน หากพิจารณาโดยอาศัยทฤษฎีของการสั่นสะเทือนที่กล่าวว่า ความถี่ของการสั่นสะเทือนเป็นปฏิภาคโดยตรงกับโมดูลัสยืดหยุ่นและความแข็งแกร่งของวัสดุ แต่ในขณะเดียวกันก็เป็นปฏิภาคผกผันกับมวลหรือความหนาแน่นของวัสดุ [14] จากหลักความจริงข้อนี้ อาจกล่าวได้ว่า ความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนแบบอิสระที่เพิ่มขึ้นจากการเพิ่มของโมดูลัสยืดหยุ่นจะถูกหักล้างกับค่าที่ลดลงอันเนื่องมาจากมวลหรือความหนาแน่นที่มากขึ้น เมื่อพิจารณาค่าความถี่ธรรมชาติจากตารางที่ 4 ถึง 6 นั้นพบว่า การเพิ่มขึ้นของความหนาแน่นวัสดุ FGM นั้น ส่งผลต่อการลดลงของค่าความถี่ธรรมชาติของคานเชลูลาร์มากกว่าการเพิ่มขึ้นของค่าโมดูลัสยืดหยุ่นอย่างชัดเจน

ตารางที่ 4 ความถี่ธรรมชาติลำดับแรก (Hz)

β	k					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
0.2	80.62	79.23	77.50	75.46	73.15	59.24
0.4	80.22	78.81	77.06	74.99	72.66	58.70
0.6	79.77	78.34	76.56	74.47	72.12	58.11
0.8	79.28	77.82	76.01	73.90	71.53	57.49
1	78.75	77.26	75.43	73.29	70.90	56.83
2	75.62	73.96	71.98	69.73	67.24	53.16

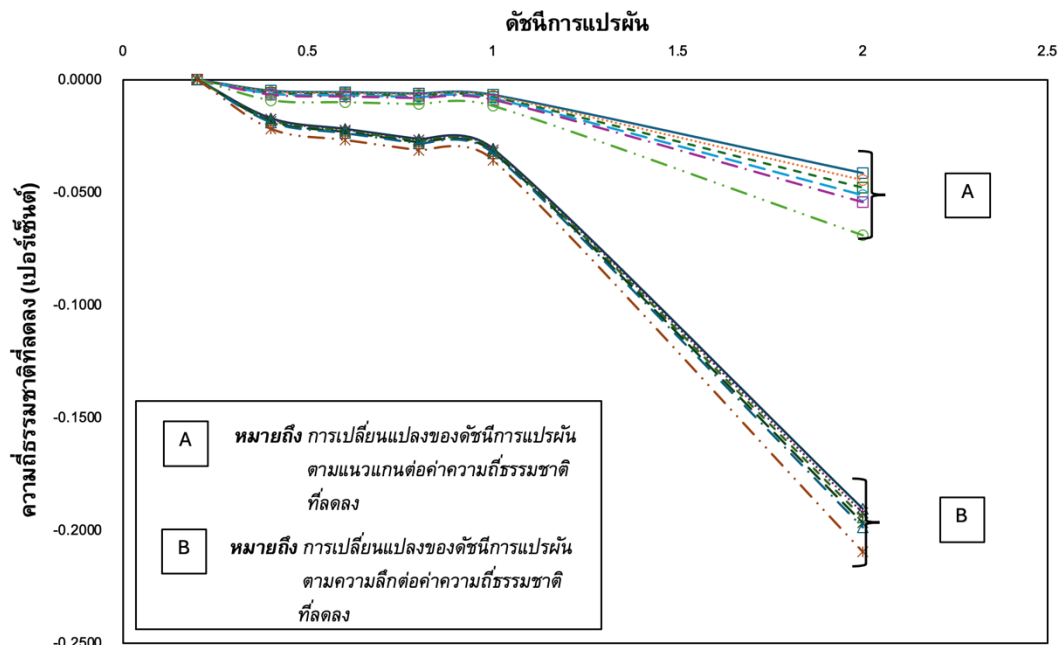
ตารางที่ 5 ความถี่ธรรมชาติลำดับสอง (Hz)

β	k					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
0.2	145.95	141.72	137.37	132.92	128.38	104.90
0.4	142.08	137.98	133.77	129.48	125.09	102.39
0.6	138.35	134.38	130.33	126.18	121.95	100.02
0.8	134.76	130.94	127.03	123.04	118.97	97.77
1	131.34	127.66	123.90	120.06	116.14	95.67
2	116.65	113.67	110.62	107.49	104.28	87.02

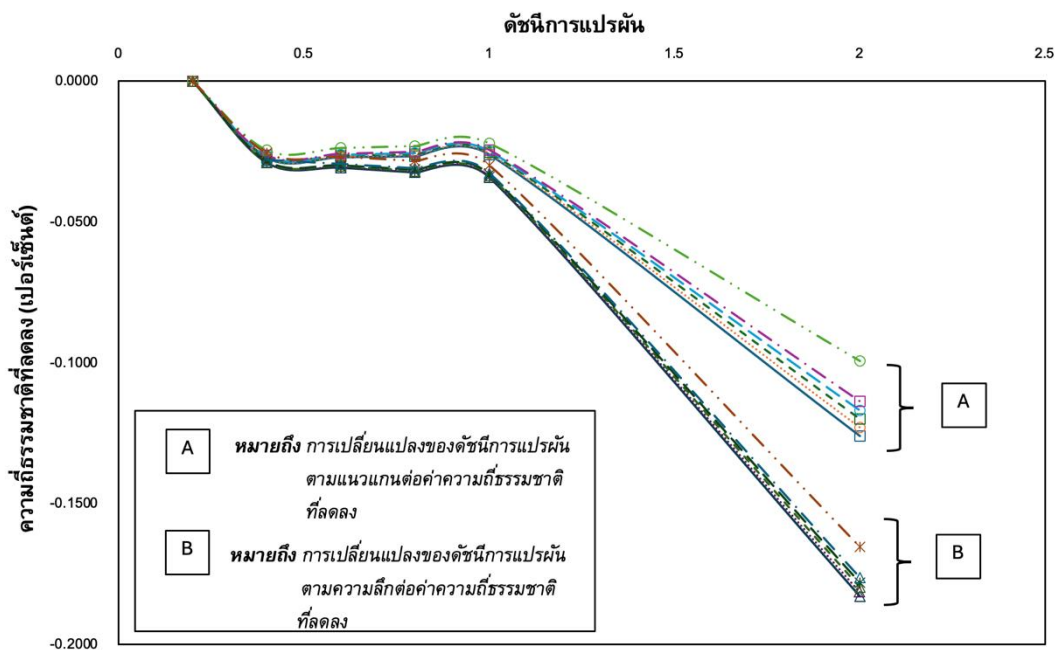
ตารางที่ 6 ความถี่ธรรมชาติลำดับสาม (Hz)

β	k					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
0.2	227.02	224.89	222.06	218.54	214.40	186.31
0.4	226.10	223.98	221.16	217.65	213.52	185.49
0.6	225.34	223.23	220.42	216.92	212.79	184.81
0.8	224.73	222.63	219.82	216.33	212.21	184.25
1	224.27	222.18	219.37	215.88	211.76	183.83
2	223.73	221.68	218.90	215.43	211.31	183.37

สำหรับอัตราการลดลงของความถี่ธรรมชาติทั้งสามกรณีนั้น สามารถพิจารณาได้จากกราฟรูปที่ 6 ที่แสดงถึงผลกระทบของดัชนีการแปรผันที่มีต่ออัตราการลดลงของความถี่ธรรมชาติทั้งสามลำดับแรก จากกราฟสามารถจำแนกได้เป็น 2 ช่วงคือ ช่วงที่ดัชนีการแปรผันมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่งและมากกว่าหนึ่ง ในช่วงแรกนี้ เมื่อ β มีค่าแปรผันเพิ่มขึ้นจาก 0.2-1.0 และพิจารณาสำหรับแต่ละค่าของ k พบว่าอัตราการลดลงเมื่อ $\beta, k = 1.0$ นั้นมีค่าใกล้เคียงกันสำหรับความถี่ธรรมชาติสามลำดับคือ 0.89, 2.44 และ 0.31 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ ในขณะที่เมื่อค่าของ k แปรผันเพิ่มขึ้นและพิจารณาสำหรับแต่ละค่าของ β นั้นพบว่า มีค่าเท่ากับ 3.26, 3.28 และ 2.0 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ

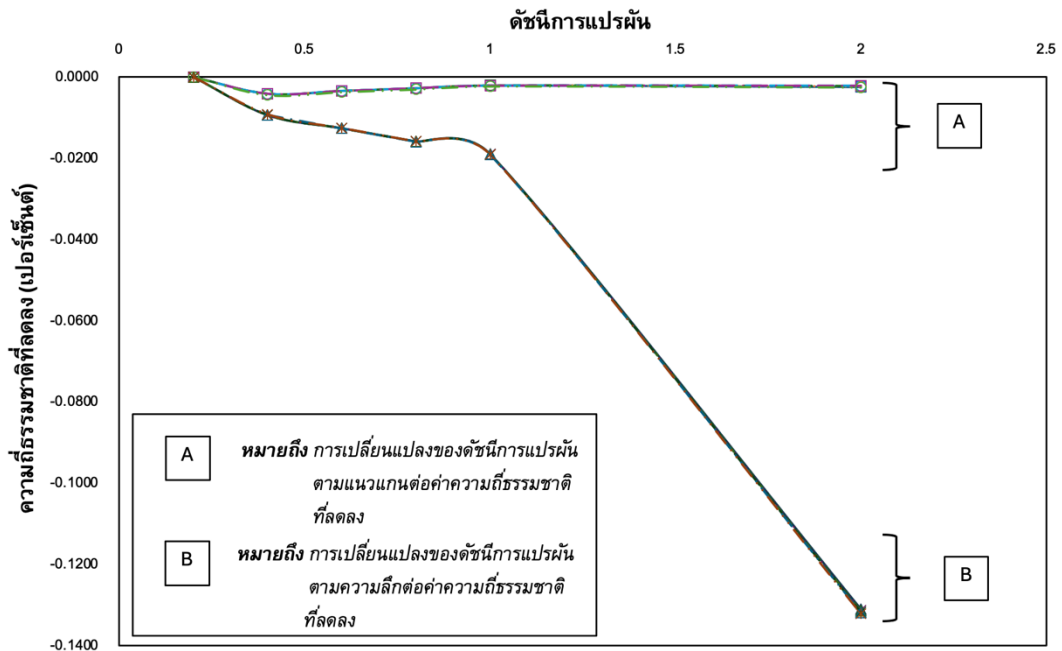


(a) ผลกระทบของดัชนีการแปรผันต่อความถี่ธรรมชาติลำดับแรก



(b) ผลกระทบของดัชนีการแปรผันต่อความถี่ธรรมชาติลำดับที่สอง

รูปที่ 6 ผลกระทบของดัชนีการแปรผันต่ออัตราการลดลงของความถี่ธรรมชาติ



(c) ผลกระทบของดัชนีการแปรผันต่อความถี่ธรรมชาติลำดับที่สาม

รูปที่ 6 ผลกระทบของดัชนีการแปรผันต่ออัตราการลดลงของความถี่ธรรมชาติ (ต่อ)

สำหรับกรณีที่สอง อัตราการลดลงของความถี่ธรรมชาติดังกล่าวในช่วงที่ดัชนีการแปรผันทั้งสองทิศทางมีค่ามากกว่าหนึ่งนั้นพบว่า มีค่าที่สูงกว่ากรณีแรก กล่าวคือ เมื่อ β แปรผันเพิ่มขึ้นและพิจารณาสำหรับแต่ละค่าของ k อัตราการลดลงเมื่อ β , $k = 2.0$ นั้น มีค่าเท่ากับ 6.9, 10.0 และ 0.4 เปอร์เซ็นต์และเมื่อ k แปรผันเพิ่มขึ้นและพิจารณาแต่ละค่าของ β นั้นพบว่ามีค่าเท่ากับ 20.9, 16.55 และ 13.22 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ โดยอัตราการลดลงของค่าความถี่ธรรมชาติทั้งสามลำดับแรกเมื่อดัชนีการแปรผันตามแนวแกนเพิ่มขึ้นนั้น มีค่าน้อยกว่าอัตราการลดลงของความถี่ธรรมชาติเมื่อค่าดัชนีการแปรผันตามความถี่เพิ่มขึ้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ดัชนีการแปรผันตามความถี่ของคานาเซลลูลาร์ส่งผลต่ออัตราการลดลงของความถี่ธรรมชาติในสามลำดับแรกมากกว่าดัชนีการแปรผันตามแนวแกนอย่างมีนัยสำคัญนั่นเอง

5. สรุปและวิจารณ์ผล

งานวิจัยนี้เป็นการนำเสนอการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของคานาเซลลูลาร์ในระนาบสองมิติที่ประกอบขึ้นจากวัสดุสองชนิดที่มีการแปรผันคุณสมบัติของวัสดุทั้งทิศทาง (ตามความแนวแกนและตามความถี่ของคานา) ด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยโครงตาข่ายขนาดเล็กมากพอที่ให้ความแม่นยำของผลลัพธ์ในระดับที่ยอมรับได้ แต่เนื่องจากตัวอย่างปัญหาไม่สามารถหา

ค่าผลเฉลยแม่นยำตรงทางทฤษฎีได้ จึงต้องสร้างแบบจำลองสำหรับใช้ในการตรวจสอบโมเดลที่สร้างขึ้น ผลจากการตรวจสอบโมเดลที่เสนอกับค่าอ้างอิงพบว่ามีค่าความแตกต่างของค่าความถี่ธรรมชาติลำดับแรกเพียง 3.78 เปอร์เซ็นต์ เท่านั้น ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ และให้ผลของรูปร่างโหมดที่สอดคล้องกันกับผลการอ้างอิงที่เกิดขึ้นได้จริง

ผลการศึกษาการวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติใน 3 ลำดับแรก พบว่า เมื่อค่าดัชนีการแปรผันคุณสมบัติของวัสดุตามความลึกที่มีค่าเพิ่มขึ้นนั้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติของคานาเซลลูลาร์มีค่าลดลง และในขณะเดียวกันค่าดัชนีการแปรผันของวัสดุตามแนวแกนก็ส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติของคานาในลักษณะเช่นเดียวกัน แต่ดัชนีการแปรผันคุณสมบัติตามความลึกจะส่งผลต่อการอัตราการลดลงของค่าความถี่ธรรมชาติมากกว่าดัชนีการแปรผันคุณสมบัติของวัสดุตามแนวแกน แบบจำลอง BDFGM ที่เสนอในงานวิจัยนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อการวิเคราะห์และออกแบบวัสดุเชิงประกอบแบบสองทิศทางที่ประกอบด้วยวัสดุที่มีคุณสมบัติต่างกันมากกว่าสองชนิดรวมทั้งวัสดุเชิงประกอบแบบสามมิติเพื่อพิจารณากำหนดค่าความถี่ธรรมชาติที่เหมาะสมสำหรับปัญหาที่ต้องการเพื่อลดความเสี่ยงของการเกิดเรโซแนนซ์ต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรีสำหรับการสนับสนุนเวลาและแหล่งข้อมูลสำหรับการสืบค้นบทความอื่น ๆ ตลอดจนขอขอบคุณสำนักงานกลางศูนย์ความเป็นเลิศด้านฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และภาควิชาวิศวกรรมวัสดุ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่สนับสนุนซอฟต์แวร์ COMSOL Multiphysics อันเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยในครั้งนี้

References

- [1] Kobayashi Y, Harada A, Yamada G. Reduced-order nonlinear modal equations of plates based on the finite element method. JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing. 2002;45(1):79-86.
- [2] Sina SA, Navazi HM, Haddadpour H. An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. Materials & Design 2009;30(3):741-7.
- [3] Simsek M, Kocaturk T. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. Composite Structures 2009;90(4):465-73.

- [4] Gao K, Li R, Yang, J. Dynamic characteristics of functionally graded porous beams with interval material properties. *Engineering Structures* 2019;197:109441. doi: 10.1016/j.engstruct.2019.109441.
- [5] Nguyen N, Nguyen T, Nguyen T, Vo T. A new two-variable shear deformation theory for bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded porous beams. *Composite Structures*. 2022;282:115095. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.115095.
- [6] Al-Zahrani MA, Asiri SA, Ahmed KI, Eltaher MA. Free vibration analysis of 2D functionally graded strip beam using finite element method. *Journal of Applied and Computational Mechanics* 2022;8(4):1422-30.
- [7] Sharma NK, Bhandari M, Dean A. Applications of functionally graded materials (FGMs). *International Journal of Engineering Research & Technology* 2014;2(3):334-9.
- [8] Wang M, Zhang P, Fei Q. Computational evaluation of effects of fiber shape on transverse properties of polymer composites considering voids under dynamic loading. *Journal of Aerospace Engineering* 2019;32(4):04019049.
- [9] Taraghi P, Showkati H, Firouzsafari SE. The performance of steel conical shells reinforced with CFRP laminates subjected to uniform external pressure. *Construction and Building Materials* 2019;214:484-96.
- [10] Mahamood RM, Akinlabi ET. Functionally graded materials. *Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*. Cham, Switzerland: Springer; 2017. doi: 10.1007/978-3-319-53756-6_2.
- [11] Nejad MZ, Hadi A. Non-local analysis of free vibration of bi-directional functionally graded Euler–Bernoulli nano-beams. *International Journal of Engineering Science* 2016;105:1-11.
- [12] Li X. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. *Journal of Sound and vibration* 2008;318(4-5):1210-29.
- [13] Musiket K, Phungpaingam B, Piyaphipat S. Free and forced vibration analyses by n-sided polygonal cell-based strain-smoothed finite element for two-dimensional problem. *RMUTP Research Journal Sciences and Technology* 2023;17(2):53-66. (In Thai)
- [14] Simsek M. Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions. *Composite Structures* 2015;133:968-78.

ประวัติผู้เขียนบทความ



ชนนัญยวัส รัตนวิเชียร ตำแหน่ง นักศึกษาวิศวกรรมศาสตร์ (สาขาวิชาวิศวกรรมโครงสร้าง) คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี คลองหก คลองหลวง ปทุมธานี 12110 โทรศัพท์: 085-118-2890 Email: Chanonyawat_r@mail.rmUTT.ac.th



กำธรเกียรติ มุสิเกต ตำแหน่ง อาจารย์ประจำหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (สาขาวิชาวิศวกรรมโครงสร้าง) คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี คลองหก คลองหลวง ปทุมธานี 12110 โทรศัพท์: 087-380-8222 Email: Kamtornkiat@rmUTT.ac.th



บุญชัย ฝั่งไผ่งาม ตำแหน่ง อาจารย์ประจำหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (สาขาวิชาวิศวกรรมโครงสร้าง) คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี คลองหก คลองหลวง ปทุมธานี 12110 โทรศัพท์: 089-783-0318 Email: Boonchai_p@rmUTT.ac.th

Article History:

Received: June 24, 2024

Revised: September 5, 2024

Accepted: September 12, 2024