

การประยุกต์ใช้อ่อนุกรมของวอลเตอร์รากับระบบระดับความเสรีหลายชั้น
แบบไม่เชิงเส้น

THE APPLICATION OF VOLTERRA SERIES FOR MDOF NONLINEAR
SYSTEM

ปริญญา บุญมาเลิศ¹ และ ธนู จุยฉาย²

^{1,2}อาจารย์, สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

1761 ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250

¹parinya.boo@kbu.ac.th, ²thanuchouychai@gmail.com

Parinya Boonmalert¹ and Thanu Chouychai²

^{1,2}Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,

Kasem Bundit University 1761 Pattanakarn Rd. Suanluang Bangkok 10250, Thailand,

¹parinya.boo@kbu.ac.th, ²thanu.cho@kbu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีการใช้อ่อนุกรมของวอลเตอร์รากับระบบระดับความเสรีหลายชั้นแบบไม่เชิงเส้น โดยได้แสดงผลในรูปแบบของเมตริกซ์เพื่อลดความซับซ้อนในการนำเสนอ เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ชัดเจนในการใช้อ่อนุกรมของวอลเตอร์รากับระบบระดับความเสรีหลายชั้น ในงานวิจัยนี้ได้แสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้อ่อนุกรมของวอลเตอร์รากับระบบระดับความเสรีสองชั้นที่ไม่เชิงเส้นแบบหนึ่งสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก โดยฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองที่ได้จากการคำนวณได้นำเสนอในรูปแบบของกราฟ จากกราฟของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองนำเสนอที่ความถี่ $\omega_{r1} = \omega_{r2}$ พบว่าความถี่ซ้ำฮาโมนิกที่ความถี่ต่ำกว่าความถี่มูลฐานครึ่งหนึ่ง ในส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สามได้นำเสนอฟังก์ชันถ่ายโอนในแนวเส้นทแยงมุมที่ $\omega_{r1} = \omega_{r2} = \omega_{r3}$ จากกราฟจะสามารถมองเห็นความถี่ซ้ำฮาโมนิกที่ความถี่ต่ำกว่าความถี่มูลฐานโดยมีค่าเป็นหนึ่งในสามของความถี่มูลฐานและพบว่าบางความถี่เข้าไปแทรกแซงความถี่มูลฐานด้วย ซึ่งความถี่แบบนี้จะไม่สามารถเห็นได้ในฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่ง และในทางปฏิบัติความถี่ซ้ำฮาโมนิก เหล่านี้อาจปรากฏในฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากการวัดสัญญาณได้

คำสำคัญ: อ่อนุกรมของวอลเตอร์รา, ระดับความเสรีหลายชั้นแบบ, ความถี่ซ้ำฮาโมนิก, ความถี่มูลฐาน

ABSTRACT

This research presents the method of using the Volterra series for MDOF nonlinear system. It is displayed in the form of a matrix to simplify the presentation. To achieve an understanding of the use Volterra series with MDOF nonlinear system. Volterra series is applied to the two degrees of freedom nonlinear system in single input multi output (SIMO). The calculated first and second-order transfer functions are presented as graphs. The graphs of the second-order transfer functions are presented at frequency $\omega_{r1} = \omega_{r2}$. It can be seen the subharmonic frequency is half of the fundamental frequency. The graphs of the third order transfer functions are presented at a diagonal line at $\omega_{r1} = \omega_{r2} = \omega_{r3}$. From the graph, it can be seen the subharmonic frequency is lower than the fundamental frequency, which is one-third of the fundamental frequency, and it is found that some frequencies interfere with the fundamental frequency. This kind of frequency cannot be seen in the first-order transfer function. In practice, this subharmonic frequency may appear in the transfer function obtained from the signal measurement.

KEYWORDS: Volterra series, MDOF, Subharmonic frequency, Fundamental frequency

1. บทนำ

โดยปรกติแล้วอนุกรมของวอลเตอร์รา [1] จะนิยมใช้กับระบบระดับความถี่ชั้นเดียวที่ไม่เชิงเส้น เนื่องจากง่ายต่อการนำเสนอฟังก์ชันถ่ายโอนลำดับต่าง ๆ ของอนุกรม แต่ในกรณีของระบบระดับความถี่หลายชั้นเมื่อนำอนุกรมของวอลเตอร์รามาใช้ จะทำให้เกิดความยุ่งยากในการนำเสนอ งานวิจัยนี้จะนำเสนอการประยุกต์ใช้ออนุกรมของวอลเตอร์รากับระบบระดับความถี่หลายชั้นที่มีสปริงไม่เชิงเส้นแบบคิวบิก เนื่องจากในความเป็นจริงทิศทางของแรงที่เกิดกับสปริงจะแปรผันไปกับระยะการยืดหดและทิศทางของการยืดหดของสปริง โดยจะเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์เพื่อลดความซับซ้อนในการนำเสนอ สำหรับการหาคำตอบของระบบสมการจะทำการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนในรูปแบบเทมเพลตไลบารี โดยจะทำการคำนวณฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบและแสดงผลลัพธ์ของกราฟฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบลำดับที่หนึ่ง สอง และสาม

2. งานที่เกี่ยวข้อง

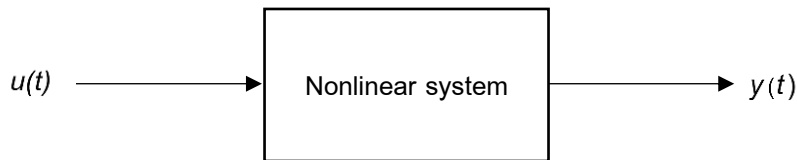
Boonmalert and Chouychai [2, 3] ได้แสดงวิธีการใช้ออนุกรมของวอลเตอร์รา และการหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นของระบบไม่เชิงเส้นของระบบระดับความเสรีขึ้นเดียวซึ่งสามารถนำไปใช้ในทางปฏิบัติได้

Peng et al [4] ได้แสดงการหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบระดับความเสรีหลายชั้นและได้แสดงการคำนวณหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบในรูปของจำนวนเชิงซ้อน

Worden and Tomlinson [5] ได้นำเสนอเทคนิคการวิเคราะห์ระบบไม่เชิงเส้นในรูปแบบต่าง ๆ ทั้งทางทฤษฎีและปฏิบัติ

3. ทฤษฎี

ระบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear system) ที่มีสัญญาณเข้าเป็น $u(t)$ จะมีสัญญาณออกของระบบเป็น $y(t)$ ดังแสดงในรูปที่ 1 โดยมีสัญญาณออกในรูปแบบอนุกรมของวอลเตอร์รา สำหรับระบบระดับความเสรีขึ้นเดียว (Single degree of freedom, SDOF) เป็น



รูปที่ 1 ระบบไม่เชิงเส้นระดับความเสรีขึ้นเดียว

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_n y(t) \quad (1)$$

โดยที่การตอบสนองลำดับที่ n ของอนุกรมของวอลเตอร์ราเป็น

$${}_n y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_n h u(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

สำหรับระบบระดับความเสรีหลายชั้น (Multi degree of freedom, MDOF) ดังแสดงในรูปที่ 2 สามารถเขียนการตอบสนองในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{y(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{{}_n y(t)\} \quad (3)$$

โดยที่ $\{y(t)\} = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_{N_0}(t) \end{bmatrix}^T$

และ $\{ {}_n y(t) \} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} {}_n y_1(t) & {}_n y_2(t) & \dots & {}_n y_{N_0}(t) \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} {}_n y_1(t) \\ {}_n y_2(t) \\ \vdots \\ {}_n y_{N_0}(t) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} {}_n h_{11}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) & {}_n h_{12}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) & \dots & {}_n h_{1N_F}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \\ {}_n h_{21}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) & {}_n h_{22}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) & \dots & {}_n h_{2N_F}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_n h_{N_0 1}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) & {}_n h_{N_0 2}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) & \dots & {}_n h_{N_0 N_F}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^n u_1(t - \tau_i) d\tau_i \\ \prod_{i=1}^n u_2(t - \tau_i) d\tau_i \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^n u_{N_F}(t - \tau_i) d\tau_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

โดยที่ ${}_n y_i(t)$ คือ สัญญาณออกที่จุด i ลำดับที่ n ของอนุกรมวอลเตอร์รา

${}_n h_{ij}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ คือ การตอบสนองแบบดล ลำดับที่ n ของอนุกรมวอลเตอร์ราที่มีสัญญาณออกที่จุด i และมีสัญญาณเข้าที่จุด j ($i = 1, 2, 3, \dots, N_0$; $j = 1, 2, 3, \dots, N_F$)

$u_j(t)$ คือ สัญญาณเข้าที่จุด j

N_0 คือ จำนวนสัญญาณออกที่ทำการวัด

N_F คือ จำนวนสัญญาณเข้าที่ทำการวัด

ในระบบไม่เชิงเส้นระดับความถี่หลายชั้นตามรูปที่ 2 นั้นสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบเชิงเส้นได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณออกต่อสัญญาณเข้าจุดต่อจุด ซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & \dots & \dots & H_{1N_F}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & \dots & \dots & H_{2N_F}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{N_0 1}(\omega) & H_{N_0 2}(\omega) & \dots & \dots & \dots & H_{N_0 N_F}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5)$$

โดยที่ $H_{ij}(\omega)$ คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนแบบเชิงเส้นของระบบที่มีสัญญาณออกที่จุด i และมีสัญญาณเข้าที่จุด j ซึ่งจะหาได้จาก

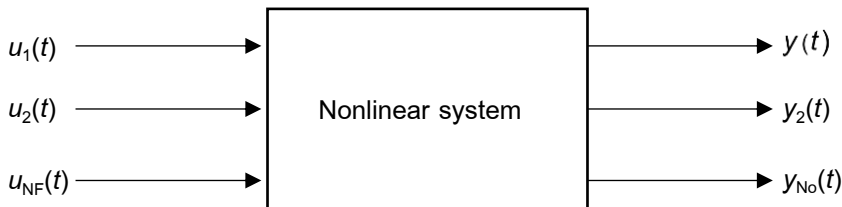
$$H_{ij}(\omega) = \frac{Y_i(\omega)}{U_j(\omega)} \quad (6)$$

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนไม่เชิงเส้นลำดับที่ n ใด ๆ ของระบบจะหาได้จากอนุกรมของวอลเตอร์รา

เพื่อความเข้าใจที่ชัดเจนขึ้น ในงานวิจัยนี้จะขอยกตัวอย่างโดยทำการพิจารณาระบบระดับความเสรีสองขั้นที่ไม่เชิงเส้น แบบหนึ่งสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก (Single input multi output, SIMO) ดังแสดงในรูปที่ 3 ซึ่งระบบมีสปริงไม่เชิงเส้นในรูปแบบสมการกำลังสาม (Cubic spring) สมการการเคลื่อนที่ของระบบที่อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์เป็น

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 y_1^2(t) + \gamma_1 y_1^3(t) - \beta_2 (\Delta y)^2 - \gamma_2 (\Delta y)^3 \\ \beta_2 (\Delta y)^2 + \gamma_2 (\Delta y)^3 + \beta_3 y_2^2(t) + \gamma_3 y_2^3(t) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

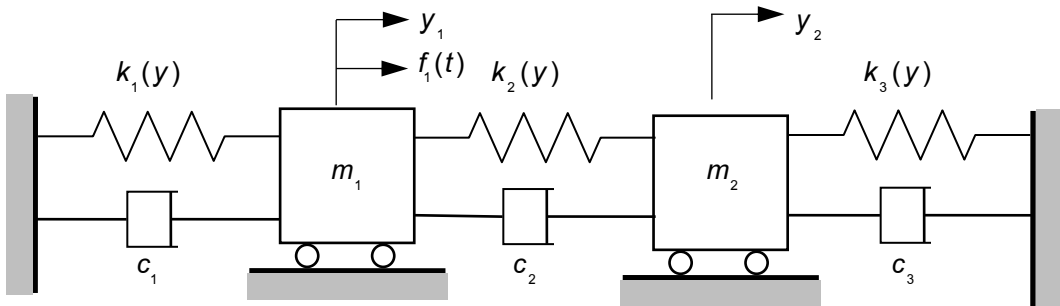
โดยที่ $\Delta y = y_2 - y_1$; $(\Delta y)^2 = y_2^2 - 2y_1 y_2 + y_1^2$; $(\Delta y)^3 = y_2^3 - 3y_1 y_2^2 + 3y_1^2 y_2 - y_1^3$, และ β_i ; γ_i ; ($i = 1, 2, 3$) เป็นค่าคงที่ของสปริงไม่เชิงเส้นในเทอมควอดราติก และคิงบิก ตามลำดับ



รูปที่ 2 ระบบไม่เชิงเส้นระดับความเสรีหลายขั้น

ถ้าให้สัญญาณเข้าเป็น $f_1(t) = Ff(t)$ โดยที่แรงมีแอมพลิจูดเป็น F และมีสัญญาณเข้าเป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $f(t)$ สัญญาณออกของระบบในรูปแบบของอนุกรมของวอลเตอร์ราจะเป็น

$$\{y(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} F^n \{ {}_n y(t) \} = \sum_{n=1}^{\infty} F^n \begin{Bmatrix} {}_n y_1(t) \\ {}_n y_2(t) \end{Bmatrix} \quad (8)$$



$$k_1(y) = k_1 + \beta_1 y + \gamma_1 y^2; \quad k_2(y) = k_2 + \beta_2 y + \gamma_2 y^2; \quad k_3(y) = k_3 + \beta_3 y + \gamma_3 y^2$$

รูปที่ 3 ระบบระดับความเสรีสองขั้นที่มีสปริงไม่เชิงเส้น

เมื่อแทนสมการ (8) ในสมการ (7) แล้วทำการเทียบสัมประสิทธิ์ F^1 (ที่ $n = 1$) ซึ่งจะได้

$$[M] \{ {}_1 \ddot{y}(t) \} + [C] \{ {}_1 \dot{y}(t) \} + [K] \{ {}_1 y(t) \} = \{ f(t) \} = {}_1 H^{-1} [{}_1 y(t)] \quad (9)$$

โดยที่ ${}_n H [\quad]$ คือ โอเปอเรเตอร์ (Operator) ของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่ n ของระบบ

${}_n H^{-1} [\quad]$ คือ โอเปอเรเตอร์ผกผัน (Inverse operator) ของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่ n ของระบบ

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่งของระบบสามารถเขียนได้เป็น

$$[{}_1 H(\omega)] = \begin{bmatrix} {}_1 H_{11}(\omega) & {}_1 H_{12}(\omega) \\ {}_1 H_{21}(\omega) & {}_1 H_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (10)$$

เมื่อ

$${}_1 H_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{ri}}{j\omega - \lambda_{ri}} + \sum_{r=1}^N \frac{A_{ri}^*}{j\omega - \lambda_{ri}^*} \quad (11)$$

โดยที่ $j = \sqrt{-1}$

A_{ri} คือ ค่าคงที่ที่ฐานนิยม i

$$\lambda_{ri} = -\zeta_{ri}\omega_{ri} \pm j\omega_{ri}\sqrt{1-\zeta_{ri}^2}$$

ω_r = ความถี่ธรรมชาติไม่ถูกหน่วงที่ฐานนิยม i

A_{ri}^*, λ_{ri}^* คือ สังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate) ของ A_{ri} และ λ_{ri} ตามลำดับ

p คือ จุดที่วัดสัญญาณออก (output)

q คือ จุดที่วัดสัญญาณเข้า (input)

สัญญาณออกของระบบในรูปของการประสาน (Convolution) เป็น

$${}_1y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_1h_{11}(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (12)$$

$${}_1y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_1h_{21}(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (13)$$

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สอง สามารถหาได้โดยแทนสมการ (8) ใน (7) แล้วทำการเทียบสัมประสิทธิ์ของ F^2 (ที่ $n = 2$) ซึ่งจะได้

$$[M]\{ {}_2\ddot{y}(t) \} + [C]\{ {}_2\dot{y}(t) \} + [K]\{ {}_2y(t) \} = - \begin{bmatrix} \beta_1({}_1y_1^2(t)) - \beta_2(\Delta y)^2 \\ \beta_2(\Delta y)^2 + \beta_3({}_1y_2^2(t)) \end{bmatrix} \quad (14)$$

หรือ

$$\{ {}_2y(t) \} = -{}_1H \begin{bmatrix} \beta_1({}_1y_1^2(t)) - \beta_2(\Delta y)^2 \\ \beta_2(\Delta y)^2 + \beta_3({}_1y_2^2(t)) \end{bmatrix} = -{}_1H \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

และในรูปของการประสานเป็น

$${}_2y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_1h_{11}(\tau)u_1(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} {}_2h_{11}(\tau_1, \tau_2)f(t-\tau_1)f(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (16)$$

$${}_2y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_1h_{21}(\tau)u_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} {}_2h_{21}(\tau_1, \tau_2)f(t-\tau_1)f(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (17)$$

เมื่อแทน $u_1(t)$ และ $u_2(t)$ จากสมการ (15) ในสมการ (16), (17) และแทนสมการ (12), (13) ในสมการ (16), (17) จะได้

$$\begin{aligned} {}_2y_1(t) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} {}_1h_{11}(\tau) [\beta_1 {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{11}(\xi_2 - \tau) \\ & - \beta_2 \{ {}_1h_{21}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) - 2 {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) \\ & + {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{11}(\xi_2 - \tau) \}] f(t - \xi_1) f(t - \xi_2) d\tau d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} {}_2y_2(t) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} {}_1h_{21}(\tau) [\beta_3 {}_1h_{21}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) \\ & + \beta_2 \{ {}_1h_{21}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) - 2 {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) \\ & + {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{11}(\xi_2 - \tau) \}] f(t - \xi_1) f(t - \xi_2) d\tau d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (19)$$

เมื่อเทียบสมการ (18), (19) กับสมการ (16), (17) จะได้การตอบสนองแบบดลอันดับที่สองเป็น

$$\begin{aligned} {}_2h_{11}(\xi_1, \xi_2) = & - \int_{-\infty}^{\infty} {}_1h_{11}(\tau) [\beta_1 {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{11}(\xi_2 - \tau) \\ & - \beta_2 \{ {}_1h_{21}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) - 2 {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) \\ & + {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{11}(\xi_2 - \tau) \}] d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} {}_2h_{21}(\xi_1, \xi_2) = & - \int_{-\infty}^{\infty} {}_1h_{21}(\tau) [\beta_3 {}_1h_{21}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) \\ & + \beta_2 \{ {}_1h_{21}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) - 2 {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{21}(\xi_2 - \tau) \\ & + {}_1h_{11}(\xi_1 - \tau) {}_1h_{11}(\xi_2 - \tau) \}] d\tau \end{aligned} \quad (21)$$

และเมื่อใช้การแปลงของฟูริเยร์สองมิติจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองเป็น

$$\begin{aligned} {}_2H_{11}(\omega_1, \omega_2) = & {}_1H_{11}(\omega_1 + \omega_2) [(\beta_1 - \beta_2) {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{11}(\omega_2) \\ & - 2\beta_2 {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{21}(\omega_2) + \beta_2 {}_1H_{21}(\omega_2) {}_1H_{21}(\omega_2)] \end{aligned} \quad (22)$$

$${}_2H_{21}(\omega_1, \omega_2) = {}_1H_{21}(\omega_1 + \omega_2) \left[2\beta_2 {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{21}(\omega_2) - \beta_2 {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{11}(\omega_2) \right. \\ \left. - (\beta_2 + \beta_3) {}_1H_{21}(\omega_1) {}_1H_{21}(\omega_2) \right] \quad (23)$$

สัญญาณออกอันดับที่สามของอนุกรมวอลเตอร์รา หาได้จากการเทียบสัมประสิทธิ์ F^3 (ที่ $n = 3$) ได้

$$\{ {}_3y(t) \} = -{}_1H \left[\begin{aligned} & 2(\beta_1 - \beta_2) {}_1y_1(t) {}_2y_1(t) + (\gamma_1 - \gamma_2) {}_1y_1^3(t) \\ & 2(\beta_2 + \beta_3) {}_1y_2(t) {}_2y_2(t) + (\gamma_2 + \gamma_3) {}_1y_2^3(t) \\ & + 2\beta_2 \{ {}_2y_2(t) {}_2y_2(t) - {}_1y_1(t) {}_2y_2(t) - {}_2y_1(t) {}_1y_2(t) \} \\ & + 2\beta_2 \{ {}_1y_1(t) {}_2y_1(t) - {}_1y_1(t) {}_2y_2(t) - {}_2y_1(t) {}_1y_2(t) \} \\ & - \gamma_2 \{ {}_1y_1^3(t) - 3 {}_1y_1(t) {}_1y_2^2(t) + 3 {}_1y_1^2(t) {}_1y_2(t) \} \\ & + \gamma_2 \{ {}_1y_1^3(t) - 3 {}_1y_1(t) {}_1y_2^2(t) + 3 {}_1y_1^2(t) {}_1y_2(t) \} \end{aligned} \right] \quad (24)$$

เมื่อทำให้อยู่ในรูปของการประสานโดยใช้หลักการเดียวกันกับสมการ (20), (21) จะทำให้ได้สัญญาณแบบดลอันดับที่สามและเมื่อใช้การแปลงของฟูริเยร์แบบสามมิติจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สามเป็น

$${}_3H_{11}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -{}_1H_{11}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \left[\begin{aligned} & 2(\beta_1 - \beta_2) {}_1H_{11}(\omega_1) {}_2H_{11}(\omega_2, \omega_3) \\ & + (\gamma_1 - \gamma_2) {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{11}(\omega_2) {}_1H_{11}(\omega_3) \\ & - 2\beta_2 \{ {}_1H_{21}(\omega_1) {}_2H_{21}(\omega_2, \omega_3) - {}_1H_{11}(\omega_1) {}_2H_{21}(\omega_2, \omega_3) \\ & - {}_2H_{11}(\omega_1, \omega_2) {}_1H_{21}(\omega_3) \} \\ & - \gamma_2 \{ {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{11}(\omega_2) {}_1H_{11}(\omega_3) - 3 {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{21}(\omega_2) {}_1H_{21}(\omega_3) \\ & + 3 {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{11}(\omega_2) {}_1H_{21}(\omega_3) \} \end{aligned} \right] \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
{}_3H_{21}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & -{}_1H_{21}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \left[2(\beta_2 + \beta_3) {}_1H_{21}(\omega_1) {}_2H_{21}(\omega_2, \omega_3) \right. \\
& + (\gamma_2 + \gamma_3) {}_1H_{21}(\omega_1) {}_1H_{21}(\omega_2) {}_1H_{21}(\omega_3) \\
& + 2\beta_2 \left\{ {}_1H_{11}(\omega_1) {}_2H_{11}(\omega_2, \omega_3) - {}_1H_{11}(\omega_1) {}_2H_{21}(\omega_2, \omega_3) \right. \\
& \left. \left. - {}_2H_{21}(-{}_2H_{11}(\omega_1, \omega_2) {}_1H_{21}(\omega_3)) \right\} \right. \\
& + \gamma_2 \left\{ {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{11}(\omega_2) {}_1H_{11}(\omega_3) - 3 {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{21}(\omega_2) {}_1H_{21}(\omega_3) \right. \\
& \left. \left. + 3 {}_1H_{11}(\omega_1) {}_1H_{11}(\omega_2) {}_1H_{21}(\omega_3) \right\} \right] \quad (26)
\end{aligned}$$

จากสมการ (22) และ (23) พบว่ามีฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่งในรูป ${}_1H_{11}(\omega_1 + \omega_2)$ และ ${}_1H_{21}(\omega_1 + \omega_2)$ ซึ่งอยู่ในรูปของความถี่ $\omega_1 + \omega_2$ โดยจะส่งผลทำให้เกิดความถี่ซบฮาร์โมนิกอันดับที่สอง (Subharmonic) และสมการ (25) และ (65) จะมีเทอม ${}_1H_{11}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ และ ${}_1H_{21}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ ซึ่งจะมีความถี่เป็น $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ โดยจะส่งผลทำให้เกิดความถี่ซบฮาร์โมนิกอันดับที่สาม ซึ่งโดยปกติแล้วฮาร์โมนิกเหล่านี้อาจพบได้ในการคำนวณหาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบ

$$H_{ij}(\omega) = \frac{Y_i(\omega)}{U_j(\omega)} \text{ ซึ่งผู้ที่ทำการวัดสัญญาณอาจเกิดความเข้าใจผิดคิดว่าเป็นตำแหน่งของความถี่พ้อง}$$

(Resonance frequency) ได้ แต่ถ้าทำการแยกสัญญาณเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นตามงานวิจัย [2,3] แล้วเทียบสมการกับสมการ (22), (23), (25) และ (26) แล้วก็จะสามารถหาความถี่พ้องที่แท้จริงได้

สำหรับการเกิดซบฮาร์โมนิกนั้นเมื่อพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองและสามจะพบว่าในสมการจะประกอบด้วยฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่งที่มีความถี่ผสมอยู่โดยฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองจะมีเทอม ${}_1H_{pq}(\omega_1, \omega_2)$ เมื่อความถี่ $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{r1}$ หรือ $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{r2}$ ก็จะทำให้แอมพลิจูดของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองสูงขึ้นทำให้เห็นเหมือนเกิดความถี่ธรรมชาติ ทั้ง ๆ ที่ความถี่ ω_1 และ ω_2 ยังมีค่าต่ำกว่าความถี่ธรรมชาติของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่ง และในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สามก็จะเกิดปรากฏการณ์เช่นเดียวกันนี้

4. ผลการคำนวณ

เพื่อให้เห็นถึงวิธีการหาฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับต่าง ๆ ตามวิธีการที่ได้นำเสนอไป จะทำการคำนวณเชิงตัวเลขของระบบตามรูปที่ 3 โดยกำหนดให้ $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$; $c_1 = 0.3 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 0.2 \text{ Ns/m}$, $c_3 = 0.3 \text{ Ns/m}$; และ $k_1 = k_2 = k_3 = 10 \text{ N/m}$ ซึ่งจะทำให้ได้ $\omega_{n1} = 3.16228$; $\omega_{rd1} = 3.15872$;

$$\zeta_{r_1} = 0.04743; \{u\}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ และ } \omega_{r_2} = 5.447723; \omega_{r_2} = 5.46603; \zeta_{r_2} = 0.06390;$$

$$\{u\}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ และค่าของสปริงไม่เชิงเส้นเป็น } \beta_1 = 1; \beta_2 = 2; \beta_3 = 3 \text{ และ } \gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2;$$

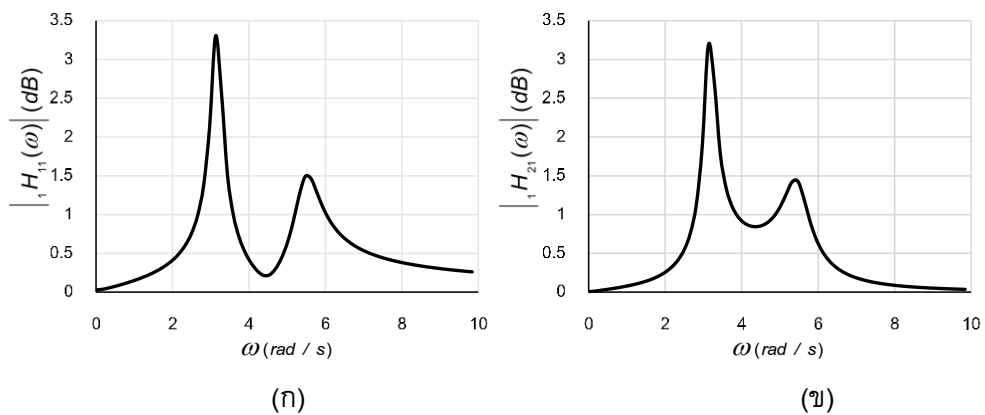
$\gamma_3 = 3$ ผลการคำนวณในรูปแบบที่ 4 แสดงฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่งตามสมการ (11) จะ ในรูปที่ 5 และ 6 ได้ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองตามสมการ (22) และ (23) จากรูปดังกล่าวจะเห็นว่า ความถี่มูลฐาน (ความถี่ธรรมชาติ) ตรงกับฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่ง แต่จะมีชูปเปอร์ฮาร์โมนิกเกิดขึ้นที่ความถี่เป็นสองเท่าของความถี่มูลฐานทั้งสองแกน ส่วนความถี่ซับฮาร์โมนิกจะเห็นได้ในการนำเสนอในรูปแบบที่ 7 และ 8 ในแนวเส้นทแยงมุม ซึ่งเป็นกราฟของโบดในแกนตั้งแบบล็อก ส่วนในรูปแบบที่ 9 และ 10 เป็นกราฟโบดในแกนแอมพลิจูดแบบล็อกของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สามตามสมการ (25), (26) ซึ่งเป็นการนำเสนอในแนวเส้นทแยงมุมที่ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ซึ่งจะเห็นซับฮาร์โมนิกที่ความถี่ต่ำกว่าความถี่มูลฐานสามเท่า

5. สรุป

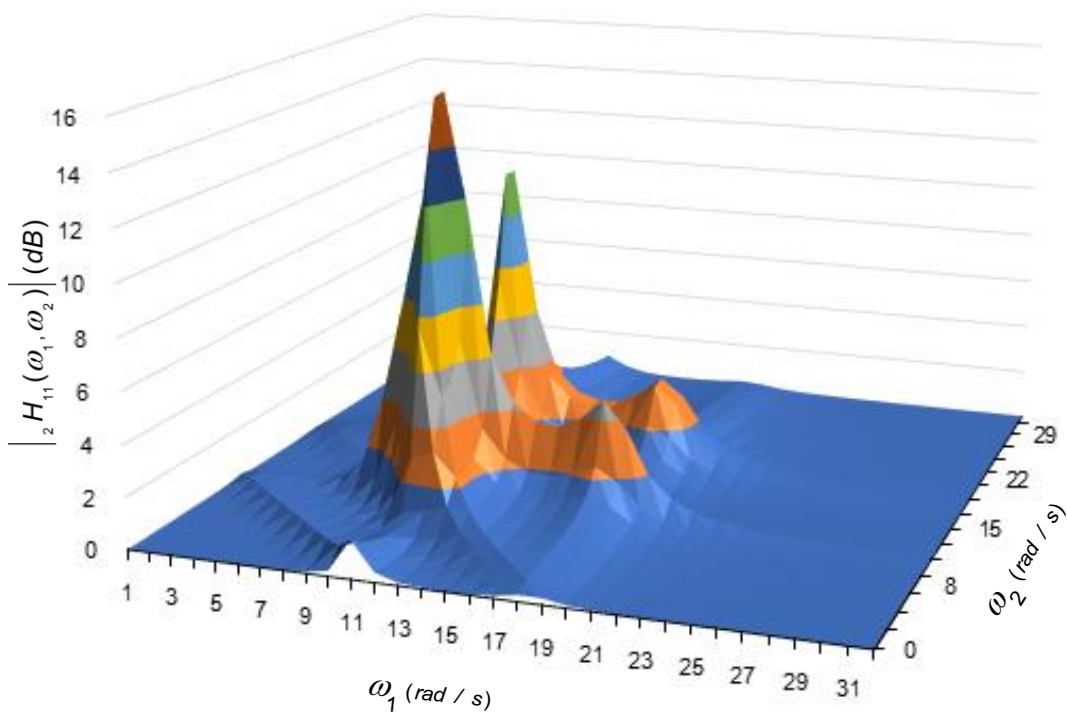
จากการประยุกต์ใช้ออนุกรมของวอลเตอร์รา กับระบบระดับความถี่สองชั้นแบบสองสัญญาณ ออกหนึ่งสัญญาณเข้า จะเห็นว่าการหาฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับต่าง ๆ ของระบบจะทำได้ยาก จากกราฟของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับต่าง ๆ ของอนุกรมของวอลเตอร์รา จะเห็นว่าฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองและสาม เมื่อนำเสนอแบบมิติเดียวด้วยแอมพลิจูดแบบล็อก จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนมีซับฮาร์โมนิกปรากฏอย่างชัดเจน ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองจะมีซับฮาร์โมนิกที่ความถี่ต่ำกว่าความถี่มูลฐานสองเท่าซึ่งได้มาจากความถี่ $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$ ในเทอมแรกของสมการ (22) และ (23) ส่วนฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สาม จะมีซับฮาร์โมนิกที่ความถี่ต่ำกว่าความถี่มูลฐานสามเท่า ซึ่งมาจากเทอมแรกทางขวามือของสมการ (25) และ (26) ซึ่งมาจากเทอม $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 3\omega$ ซึ่งในทางปฏิบัติเทอมซับฮาร์โมนิกเหล่านี้จะปรากฏรวมอยู่ในฟังก์ชันถ่าย

โอนอันดับที่หนึ่ง เนื่องจากการหาฟังก์ชันถ่ายโอนในทางปฏิบัติจะหาจาก $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$ การ

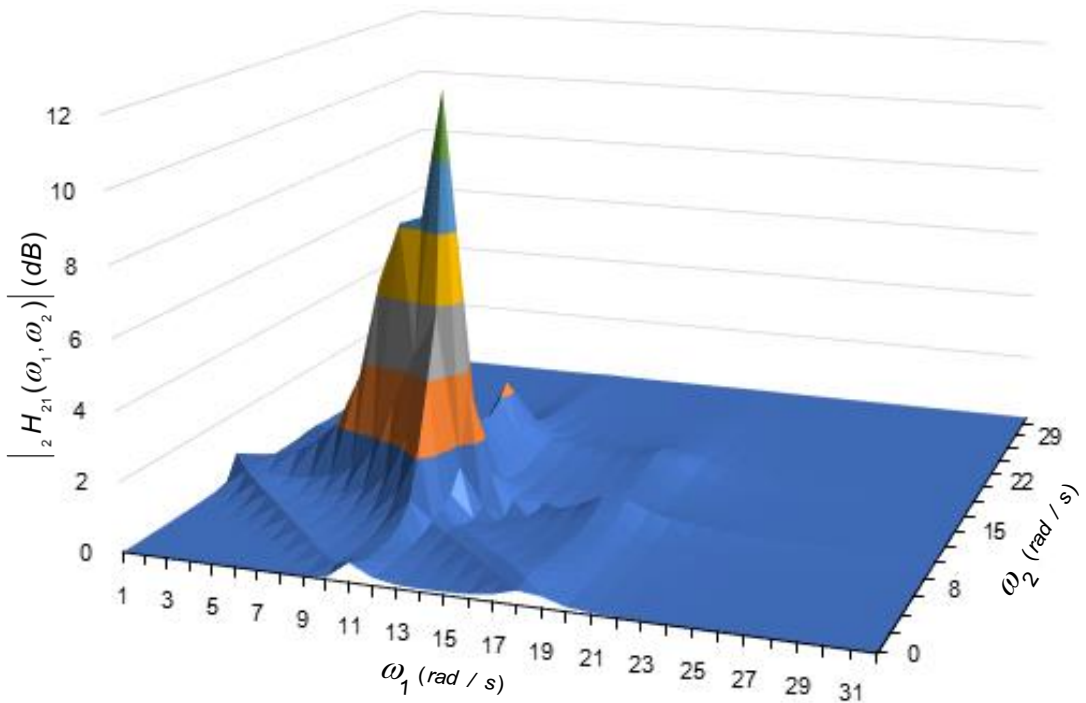
หลีกเลี่ยงความผิดพลาดในการวัดฟังก์ชันถ่ายโอนในทางปฏิบัติสามารถทำได้โดยใช้สัญญาณเข้าที่มีขนาดเล็กน้อย ๆ ซึ่งจะทำให้เทอมที่ไม่เชิงเส้นปรากฏออกมาน้อย



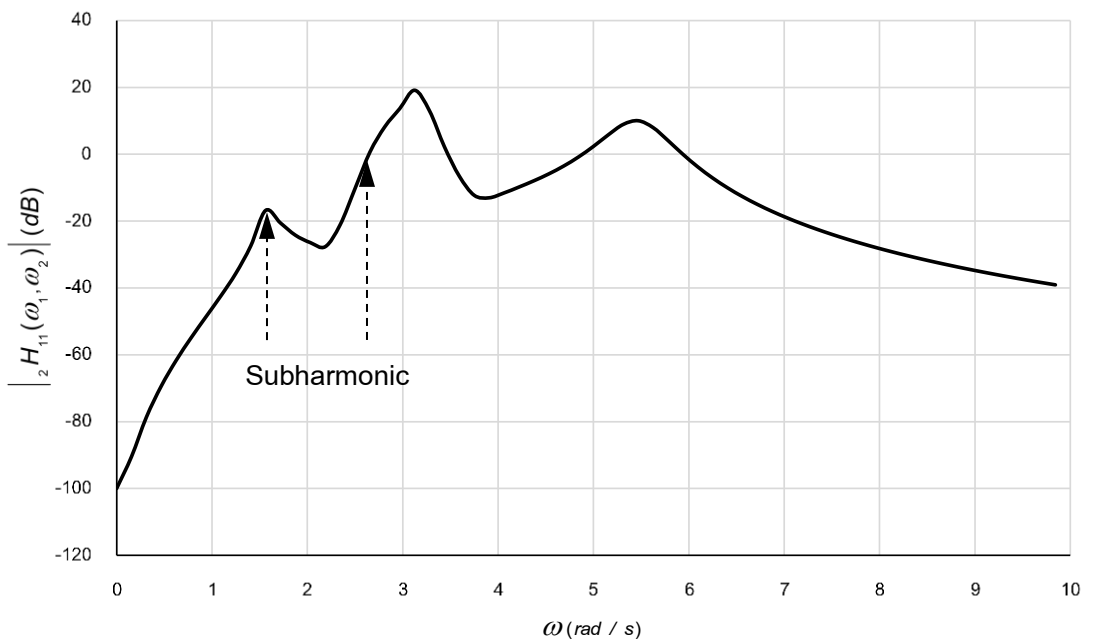
รูปที่ 4 พังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่ง (Bode plot) (ก) $|H_{11}(\omega)|$ และ (ข) $|H_{21}(\omega)|$



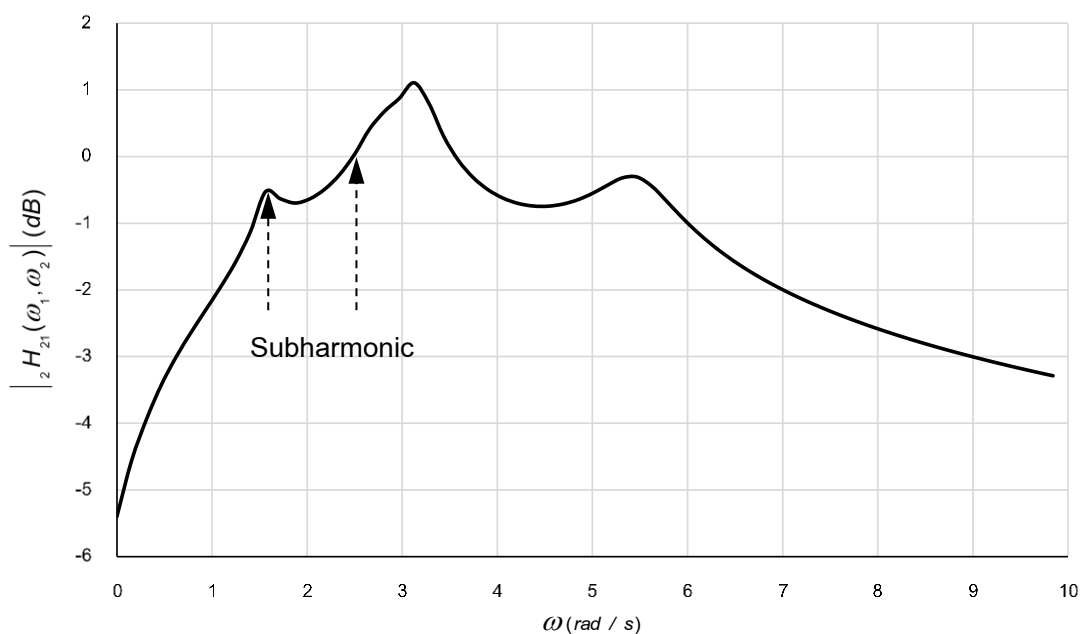
รูปที่ 5 พังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สอง $|H_{11}(\omega_1, \omega_2)|$



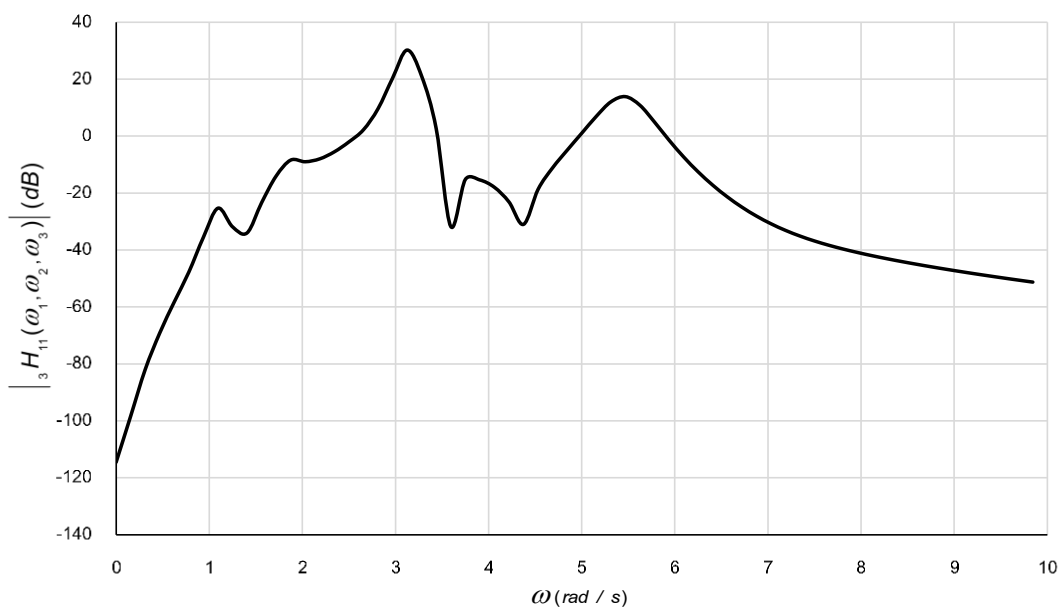
รูปที่ 6 พังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สอง $_2H_{21}(\omega_1, \omega_2)$



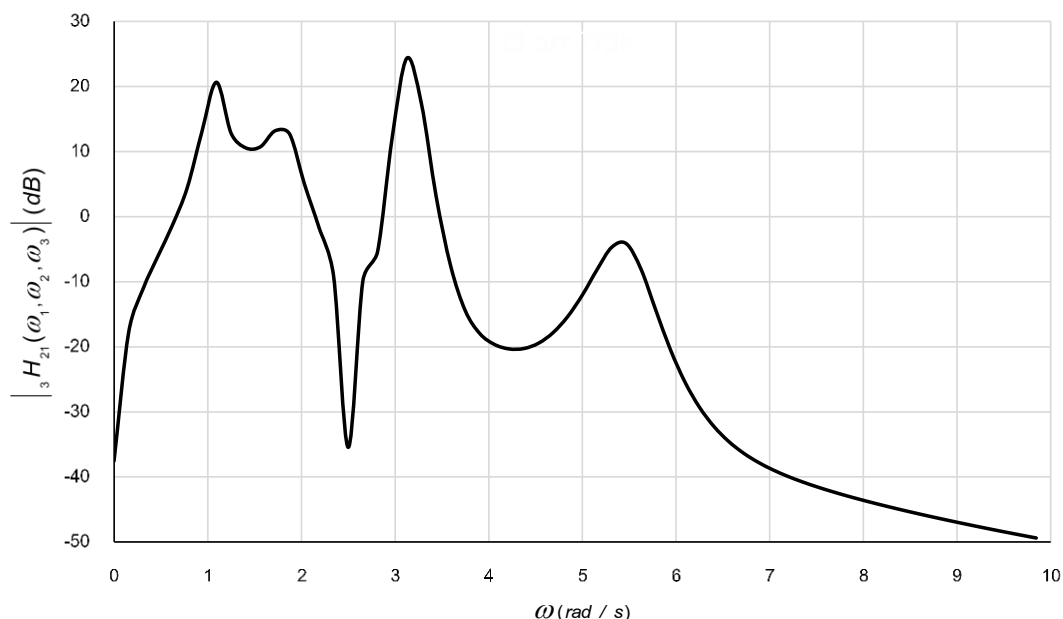
รูปที่ 7 พังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สอง $_2H_{11}(\omega_1, \omega_2)$



รูปที่ 8 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สอง $H_2(\omega_1, \omega_2)$



รูปที่ 9 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สาม $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$



รูปที่ 10 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สาม $H_{21}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

References

- [1] Schetzen M. The Volterra & Wiener theory of nonlinear systems. New York: John Wiley & Sons; 1980.
- [2] Boonmalert P, Chouychai T. The first and second order transfer function of hysteresis damping non-linear system. Kasem Bundit Engineering Journal 2019;9(1):152-65.
- [3] Boonmalert P, Chouychai T. Nonlinear parameter extraction of SDOF viscous damping system. Kasem Bundit Engineering Journal 2020;10(1):81-92.
- [4] Peng Z K, Lang Z Q, Billings S A. Analysis of multi-degree of freedom nonlinear systems using nonlinear output frequency response functions. Research Report. ACSE Research Report 2006; no.927.
- [5] Worden K and Tomlinson GR. Nonlinearity in structural dynamics detection, identification and modelling. Florida: CRC Press; 2019.

ประวัติผู้เขียนบทความ

ปริญญ์ บุญมาเลิศ ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา
วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์
0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: parinya.boon@kbu.ac.th



ธนู จุฑาย ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา
วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต
โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: thanu.cho@kbu.ac.th

Article History:

Received: May 28, 2021

Revised: November 10, 2021

Accepted: November 12, 2021