

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับค่าความผิดพลาดของเครื่องวัด 3 แกน

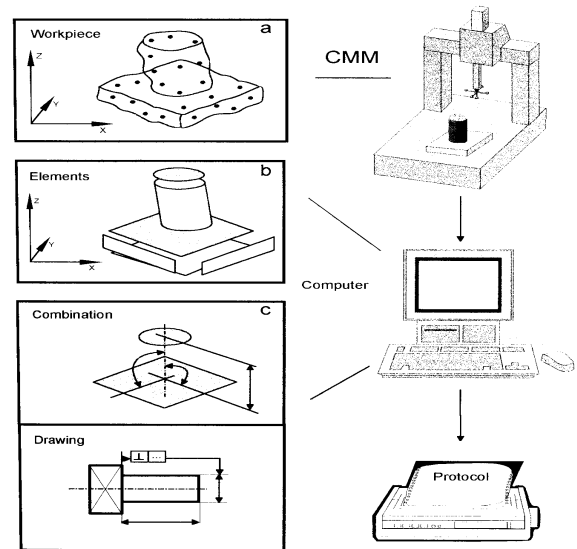
Mathematical Model for Measuring Machines Error

สมภพ ตลับแก้ว

1. บทนำ

เครื่องวัด 3 แกนเป็นเครื่องมือวัดที่มีความสำคัญอย่างมากในการตรวจสอบขนาดชิ้นงานต้นแบบ โดยเฉพาะชิ้นงานที่มีรูปทรงซับซ้อน เช่น งานแม่พิมพ์ งานขึ้นรูปแบบต่างๆ และงานรูปทรงเรขาคณิต เพื่อให้เข้าถึงจุดที่ต้องการตรวจสอบขนาดโดยตรงจากรูปภาพแบบงาน (CAD files) ที่สร้างขึ้นได้อย่างถูกต้อง (Accuracy) และแม่นยำ (Precision) โดยหลักการของเครื่องวัด 3 แกน หัววัด (Probe) จะทำการวัดแบบจุดถึงจุด (Point to point) ของชิ้นงาน เช่น วงกลม ทรงกระบอก รูปกรวย ทรงกลม และพื้นราบ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ทำงานร่วมกับเครื่องวัดจะทำการประมาณหารูปทรงที่ใกล้เคียงที่สุดจากจุดที่ได้จากการวัด หรือเรียกว่า “Best Fit” พร้อมทั้งแสดงรายละเอียด ขนาดของชิ้นงาน (Dimension) ดังแสดงในรูปที่ 1

แต่ในขณะที่หัววัดกำลังเคลื่อนที่ไปยังจุดที่ต้องการวัด อาจจะได้รับผลกระทบจากสิ่งแวดล้อมในขณะทำงาน เช่น อุณหภูมิ ความชื้น การสั่นสะเทือน พลังงานควบคุมเครื่องวัด หรือวัสดุที่ใช้ทำเครื่องวัดทำให้พิกัดที่วัดได้ (Measured Coordinate) มีความคลาดเคลื่อนจากพิกัดจริง (True Coordinate) ตามที่กำหนดไว้ในแบบงาน ซึ่งผลของปัจจัยเหล่านี้เรียกรวมๆว่า “ความไม่แน่นอน” (Uncertainty) [1 - 2] โดยที่ความไม่แน่นอนของเครื่องวัด 3 แกนหมายถึง ความแม่นยำของค่าที่ทำการวัดอย่างน้อย 95% ของค่าที่วัดได้ทั้งหมดอยู่ในขอบเขตความเผื่อที่ยอมรับได้ (Tolerance zone) [3]



รูปที่ 1 หลักการวัดและแสดงผลของเครื่องวัด 3 แกน

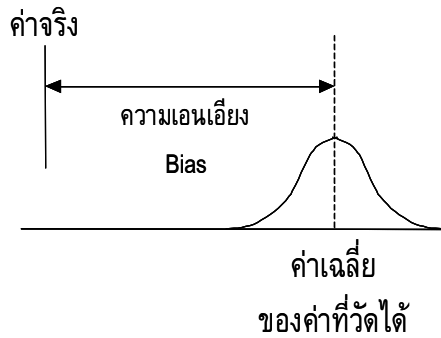
2. ความผิดพลาดของเครื่องวัด 3 แกน

ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในขณะที่เครื่องวัด 3 แกนทำงานจะแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ ความผิดพลาดเชิงระบบ (Systematic Error) และความผิดพลาดเชิงสุ่ม (Random Error) [4-5]

2.1 ความผิดพลาดเชิงระบบ

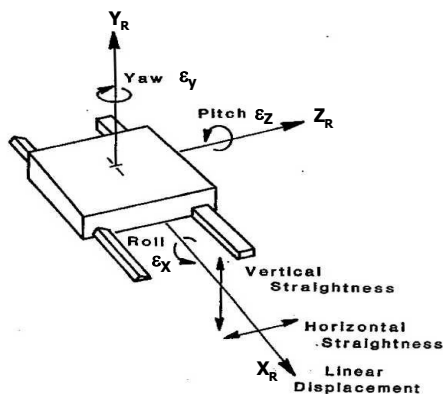
ความผิดพลาดแบบนี้จะเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ความเอนเอียง (Bias) ซึ่งพฤติกรรมของความผิดพลาดแบบนี้มักจะเกิดขึ้นเป็นประจำๆ (Repeatable) ดังแสดงในรูปที่ 2 [6]

Systematic Error (Bias) = ค่าจริง - ค่าเฉลี่ยของค่าที่วัดได้



รูปที่ 2 ความผิดพลาดเชิงระบบหรือ Bias

สาเหตุหลักของความผิดพลาดเชิงระบบของเครื่องวัด 3 แกนเกิดขึ้นจากการออกแบบโครงสร้างของเครื่อง หรือเรียกว่า “ความผิดพลาดทางเรขาคณิต” ซึ่งจะก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนของหัววัดในขณะที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน X, Y หรือ Z ดังรูปที่ 3 โดยที่ความผิดพลาดแบบนี้คิดเป็น 60% - 70% ของการเกิดความผิดพลาดทั้งหมดในขณะที่ทำการวัด [7] ความผิดพลาดทางเรขาคณิตของเครื่องวัด 3 แกนแบ่งออกได้เป็น 21 องค์ประกอบ ดังแสดงในตารางที่ 1 และภาพที่ 3

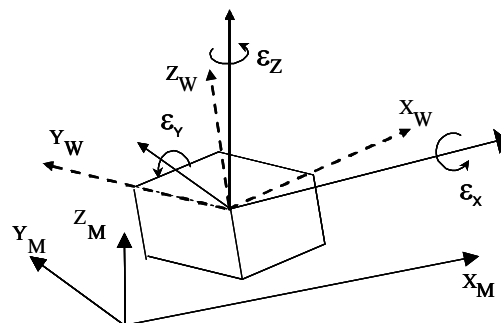


รูปที่ 3 ความผิดพลาดทางเรขาคณิต

ตารางที่ 1 ความผิดพลาดทางเรขาคณิตทั้งหมด 18 องค์ประกอบ

ทิศทางการเคลื่อนที่	ความผิดพลาดเชิงเส้น (Linear Translational Errors)	ความผิดพลาดในแนวตรง (Straightness Error)	ความผิดพลาดเชิงมุม (Angular Error)
ตามแนวแกน X	$\delta_x(x)$	Horizontal & Vertical straightness $\delta_z(x), \delta_y(x)$	$\epsilon_x(x)$ $\epsilon_y(x)$ $\epsilon_z(x)$
ตามแนวแกน Y	$\delta_y(y)$	Vertical straightness $\delta_x(y), \delta_z(y)$	$\epsilon_x(y)$ $\epsilon_y(y)$ $\epsilon_z(y)$
ตามแนวแกน Z	$\delta_z(z)$	Horizontal & Vertical straightness $\delta_x(z), \delta_y(z)$	$\epsilon_x(z)$ $\epsilon_y(z)$ $\epsilon_z(z)$
รวม	3	6	9

รวมกับความผิดพลาดเชิงมุมจากของ ทั้ง 3 แกน คือ XY, XZ และ YZ ดังนั้นองค์ประกอบของความผิดพลาดเชิงเรขาคณิตจึงมีทั้งสิ้น 21 องค์ประกอบ โดยสมมติฐานที่ว่า แกนอ้างอิงของเครื่องวัด 3 แกน (X_M, Y_M, Z_M) และแกนอ้างอิงของชิ้นงาน (X_W, Y_W, Z_W) ไม่จำเป็นต้องตรงกัน และมีค่าความผิดพลาดเชิงมุมเกิดขึ้นทั้ง 3 แกน ดังแสดงในรูปที่ 4 [8]



รูปที่ 4 พิกัดของชิ้นงานที่ทำการวัดและพิกัดของเครื่องวัด 3 แกน

2.2 แบบจำลองความผิดพลาดเชิงระบบของ

เครื่องวัด 3 แกน

การประมาณค่าความผิดพลาดเชิงระบบสามารถจำลองได้โดยวิธีการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics model) ดังต่อไปนี้

2.2.1 วิธีการเมตริก

เครื่องวัด 3 แกนมีหลักการทำงานเหมือนเครื่องจักร CNC คือมีจุดอ้างอิงทั้งของตัวเครื่องวัดเอง (X_M, Y_M, Z_M) และจุดอ้างอิงของชิ้นงาน (X_W, Y_W, Z_W) ดังนั้นในขณะที่หัววัด (Probe) เคลื่อนที่ทั้ง 3 แกน อาจจะทำให้เกิดความผิดพลาดของตำแหน่งอ้างอิง ดังนั้นจึงประยุกต์ใช้ทฤษฎี Homogeneous Transformation Matrix (HTM) [9 - 10] ซึ่งเป็นเมตริกขนาด 4×4 ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแกนอ้างอิงที่แท้จริงของเครื่องวัด 3 แกนกับแกนอ้างอิงของชิ้นงาน ดังนี้

$$\bar{r}_{\text{Workpiece}} = T(\tilde{t})\bar{r}_{\text{Probe}}$$

โดย $T(\tilde{t})$ คือ เมตริก HTM ขนาด 4×4

$$\bar{r}_{\text{Workpiece}} \text{ คือเมตริกตำแหน่งของชิ้นงาน} = \begin{bmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{r}_{\text{Probe}} \text{ คือเมตริกตำแหน่งของหัววัด} = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_Z & \varepsilon_Y & \Delta x \\ \varepsilon_Z & 1 & -\varepsilon_X & \Delta y \\ -\varepsilon_Y & \varepsilon_X & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 การถดถอย

การสร้างแบบจำลองความผิดพลาดที่เกิดจากวัดโดยวิธีการการถดถอยแบบเชิงเส้น (Linear) และแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear) ดังสมการต่อไปนี้ [11]

$$y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

$$\text{ซึ่ง } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

คือ เมตริกขนาด (3×1) ของค่าความผิดพลาดที่วัดได้จริงทั้ง 3 แกนจากเครื่อง laser interferometer

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3k} \end{bmatrix}$$

คือ เมตริกขนาด $(3 \times k)$ แสดงตำแหน่งของการเคลื่อนที่ในแกน X Y และ Z

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

คือ เมตริกขนาด $(k \times 1)$ ของค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย

2.2.3 ระเบียบวิธีพื้นผิวตอบสนอง

หลักการ RSM สามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อจำลองค่าความผิดพลาด ดังเช่นสมการต่อไปนี้ [5]

$$\begin{aligned} E_k(X_1, X_2, X_3) &= \beta_{k0} + \beta_{k1}X_1 + \beta_{k2}X_2 + \beta_{k3}X_3 \\ &+ \beta_{k4}X_1^2 + \beta_{k5}X_2^2 + \beta_{k6}X_3^2 \\ &+ \beta_{k7}X_1X_2 + \beta_{k8}X_1X_3 + \beta_{k9}X_2X_3 \end{aligned}$$

โดยที่ X_1, X_2 และ X_3 ก็คือระยะที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน X, Y และ Z

2.3 ความผิดพลาดเชิงสุ่ม

โดยทั่วไปแล้วสาเหตุของความผิดพลาดเชิงสุ่มอาจจะเกิดขึ้นได้จากสาเหตุต่าง ๆ มากมาย เช่น อุณหภูมิ ความชื้น การสั่นสะเทือน พนักงานผู้ควบคุมเครื่อง ชิ้นงานที่ทำกรวัด หรือแม้แต่ตัวเครื่องวัดเอง ดังนั้นในการประมาณค่าความผิดพลาดเชิงสุ่มจะต้องอาศัยทฤษฎีทางสถิติมาทำการประมาณ [12]

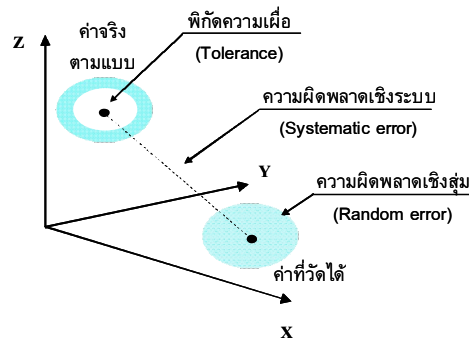
จากหัวข้อ 2.2 จะพบว่า การประมาณค่าความผิดพลาดเชิงระบบของเครื่องวัด 3 แกน จะอ้างอิงจากค่าความผิดพลาดที่วัดได้เท่านั้น ซึ่งได้แก่ ความผิดพลาดเชิงเส้น ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) และความผิดพลาดเชิงมุม ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) แต่แบบจำลองนี้ยังคงไม่แม่นยำเพียงพอต่อการประมาณค่าความผิดพลาดของเครื่องวัดได้ เพราะว่า

1) ในขณะที่ทำการทดลองวัดค่าความผิดพลาดเชิงเส้นหรือเชิงมุมแบบซ้ำๆ นั้น มักจะใช้เฉพาะค่าเฉลี่ย (Mean) มาทำการสร้างแบบจำลองตามวิธีการถดถอยเชิงเส้น หรือวิธีเมตริก ซึ่งการประมาณโดยใช้ค่าเฉลี่ยนั้นในบางครั้งก็อาจจะนำมาซึ่งการเกิด “over estimation” หรือ “under estimation”

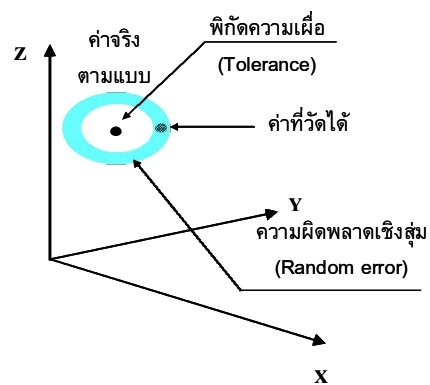
2) การละเลยที่จะนำค่าความผิดพลาดเชิงสุ่มมาสร้างแบบจำลอง (หรือตั้งสมมติฐานว่าความผิดพลาดแบบสุ่มมีค่าน้อยมาก) ซึ่งผลกระทบดังกล่าวนี้สามารถอธิบายได้โดยรูปที่ 5 ซึ่งค่าที่วัดได้ (Measured value) มีความผิดพลาดจากค่าจริงตามแบบ เนื่องมาจากเครื่องวัด 3 แกนนี้ได้รับผลกระทบจากความผิดพลาดเชิงระบบ ดังนั้นหลังจากที่ได้ทำการชดเชยค่าความผิดพลาดเชิงระบบแล้ว (Systematic error compensation) ค่าที่วัดได้จะอยู่ในบริเวณที่ใกล้เคียงกับค่าจริงตามแบบ (ดังรูปที่ 6) แต่เนื่องจากค่าความผิดพลาดเชิงสุ่มยังคงมีอยู่ (บริเวณที่แรเงา) ทำให้แม้ค่าที่วัดได้จะใกล้เคียงกับค่าจริงตามแบบแล้วก็ตาม แต่ก็ยังตกอยู่นอกบริเวณพิสัยความเผื่อ (Tolerance zone) ทำให้ไม่สามารถยอมรับค่าการวัดนี้ได้ ดังนั้นถึงแม้ว่าจะทำการแก้ไขหรือชดเชยค่าความผิดพลาดเชิงระบบได้แล้วก็ตาม ก็เชื่อว่าปัญหาความผิดพลาดที่เกิดจากการวัดจะหมดไปได้ [9] ซึ่งผลของความผิดพลาดเชิงสุ่มสามารถอธิบายได้โดยใช้การกระจายสถิติมาอธิบายได้ดังรูปที่ 7 [13]

2.4 แบบจำลองความผิดพลาดเชิงสุ่มของเครื่องวัด 3 แกน

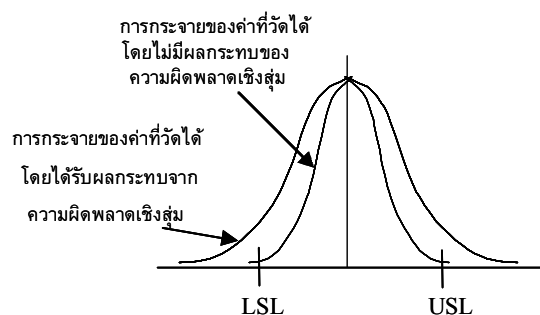
แบบจำลองค่าความผิดพลาดเชิงสุ่มจำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function: pdf) มาอธิบายถึงความน่าจะเป็นในการยอมรับหรือปฏิเสธค่าของการวัดนั้นๆ



รูปที่ 5 ความผิดพลาดจากการวัด
(ก่อนการชดเชยค่าความผิดพลาดเชิงระบบ)



รูปที่ 6 ความผิดพลาดจากการวัด
(หลังจากชดเชยค่าความผิดพลาดเชิงระบบ)



รูปที่ 7 การกระจายของจุดการวัด
ที่ได้รับและไม่ได้ผลกระทบจากความผิดพลาดเชิงสุ่ม

2.4.1 การกระจายปกติ

เนื่องจากปัจจัยที่มีผลกระทบต่อเครื่องวัด 3 แกน มีอยู่มากมายและไม่อาจจะทราบถึงสาเหตุหรือแหล่งกำเนิดที่แน่นอนของความผิดพลาดได้ ซึ่งอาจจะส่งผลให้ขนาดของชิ้นงานที่วัดได้จากเครื่องวัดอาจจะต้องหรือไม่ถูกต้องก็ได้ ดังนั้นวิธีการที่เหมาะสมในการประมาณค่าความผิดพลาดคือ กำหนดให้ x เป็นตัวแปรสุ่มค่าความผิดพลาดจากการวัดที่มีการกระจายปกติ และแทนได้ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นดังนี้ [14]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

μ คือ ค่าเฉลี่ย

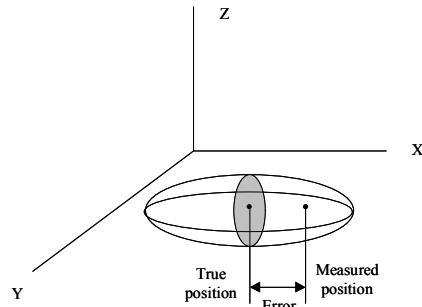
σ คือ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

งานวิจัยที่ผ่านมาได้ศึกษาถึงความผิดพลาดเชิงสุ่มไว้ดังนี้ [15-16]

1) การประมาณค่าความผิดพลาดเชิงสุ่มที่มีการกระจายปกติ โดยความผิดพลาดนี้เกิดจากความแปรผันของกระบวนการผลิต และกระบวนการวัดชิ้นงานรูปทรงเรขาคณิต

2) แบบจำลองทางสถิติที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความผิดพลาดเชิงสุ่มที่เกิดจากกระบวนการเจาะกับความผิดพลาดเชิงสุ่มที่เกิดจากกระบวนการวัด

3) การประมาณค่าความผิดพลาดเชิงสุ่มที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของแขนกลอัตโนมัติ โดยสาเหตุที่เป็นไปได้อาจเกิดจากวัสดุที่ใช้สร้างแขนกล การทำงานของชิ้นส่วนอุปกรณ์ที่ใช้ในการสร้าง โดยที่การกระจายปกติของความผิดพลาดเชิงสุ่มจะมีรูปร่างคล้ายกับวงรี (Elliptical shape) โดยที่แกนหลักของวงรีจะมีทิศทางเดียวกับการเคลื่อนที่ตามแนวแกนของเครื่องวัด [17 - 18] ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 ความผิดพลาดเชิงสุ่มหรือความไม่แน่นอนรอบๆ จุดที่ทำการวัด (Uncertainty in Measurement) [19]

2.4.2 การกระจายเบต้า

นอกเหนือจากการกำหนดให้ตัวแปรสุ่มของความผิดพลาดมีการกระจายปกติแล้ว การกระจายเบต้า (Beta distribution) ก็สามารถอธิบายถึงตัวแปรสุ่มค่าความผิดพลาดจากการวัดได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{(1-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

โดยที่ α, β (shape parameters) > 0 และ $x \in [0,1]$

เนื่องจากการกระจายเบต้ามีคุณลักษณะเฉพาะคือ

1) มีขอบเขตล่างและขอบเขตบน (α, β) ซึ่งเหมาะสมกับการประยุกต์ทางวิศวกรรม เพราะช่วงงานทางวิศวกรรมการผลิตมักจะกำหนดขอบเขตการวิเคราะห์อยู่เสมอ เช่น พิกัดความเผื่อ (ค่าสูงและค่าต่ำ) แต่การกระจายปกติจะไม่มีค่าขอบเขตบนและล่าง (คือ สามารถพิจารณาได้จาก $-\infty$ ถึง $+\infty$)

2) การกระจายปกติต้องใช้จำนวนข้อมูลที่มากเพียงพอ ($n \geq 30$) จึงจะประมาณค่าพารามิเตอร์ (μ, σ^2) ได้อย่างถูกต้อง

งานวิจัยที่ผ่านมาได้ประยุกต์การแจกแจงเบต้าในการศึกษาถึงสาเหตุที่ทำให้การกลึงผิวชิ้นงานไม่เรียบ โดยกำหนดให้ x แทนตัวแปรสุ่มความผิดพลาดของเครื่องจักร CNC ที่มีผลต่อความขรุขระของผิวชิ้นงานหลังจากการกลึง (Machined surface roughness) โดยกำหนดขอบเขตบนและล่างจากค่าความเรียบของผิวชิ้นงานที่สูงสุด (Peak) และต่ำสุด (Valley) [20]

3. บทสรุป

บทความนี้ได้สรุปวิธีการจำลองค่าความผิดพลาดแบบที่เกิดขึ้นจากเครื่องวัด 3 แกน หรือเครื่องจักร CNC โดยได้สรุปหลักการใหญ่ๆ ได้ 2 วิธีดังนี้ (1) แบบจำลองความผิดพลาดเชิงระบบ และ (2) แบบจำลองความผิดพลาดเชิงสุ่ม โดยที่ทั้งสองวิธีนั้นต้องใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematic model) มาอธิบาย และมีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับการประยุกต์ใช้ เช่น ถ้าหากมีเครื่องวัดประเภท Laser interferometer ที่สามารถวัดค่าหรือตำแหน่งที่ผิดพลาดในขณะที่มีการเคลื่อนที่ของแกน X, Y และ Z ได้ หรือมีแท่งทดสอบมาตรฐาน (Bar test) ก็สามารถสร้างแบบจำลองความผิดพลาดเชิงระบบได้ แต่ถ้าไม่มีห้องทดลองที่มีอุปกรณ์ที่ทันสมัยเหล่านี้แล้ว การสร้างแบบจำลองเชิงสุ่มก็เป็นอีกทางเลือกหนึ่งในการพิจารณาเพื่อนำไปประมาณค่าความไม่แน่นอนของเครื่องจักรแบบ 3 แกน เพื่อชดเชยค่าความผิดพลาดของเครื่องจักร (Error compensation)

เอกสารอ้างอิง

- Harvie, A., "Factors Affecting Component Measurement on Coordinate Measuring Machines", Precision Engineering, 8, 1986. pp13-18
- Takatsuji, T., Osawa, S. and Kurosawa, T., "Uncertainty Analysis of Calibration of Geometric Gauges", Journal of the International Societies for Precision Engineering and Nanotechnology, 2001. 26: pp 24-29
- Bosch, J. A., "Future Trends", Coordinate Measuring Machines and Systems (Ed.: Bosch, J. A.). Marcel Dekker, Inc., NY, 1995. pp427-438
- Weckenmann, A. and Rinnagl, M., "Acceptance of Processes: Do We Need Decision Rules? ", Precision Eng, 24, 2000. pp264-269
- Silva, J. B. A. and Burdekin, M. "A Modular Space Frame for Assessing the Performance of Co-ordinate Measuring Machines (CMMs)", Precision Engineering, 26, 2002. pp 37-48
- Automotive Industry Action Group, "Measurement Systems Analysis, Reference Manual, 2nd edition", Southfield, MI, 1995.
- Elshennawy, A. K. and Ham, I., "Performance Improvement in Coordinate Measuring Machines by Error Compensation", Journal of Manufacturing Systems, 9, 1990. pp 151-158
- Bosch, J. A. "Evolution of Measurement", Coordinate Measuring Machines and Systems (Ed.: Bosch, J. A.). Marcel Dekker, NY, 1995. pp 39-74
- Ahn, K. G. and Cho, D. W., "An Analysis of the Volumetric Error Uncertainty of a Three Axis Machine Tool by Beta Distribution", Int Jour of Mach Tools & Manu, 40, 2000. pp 2235-2248
- Okafor, A. O. and Ertekin, Y. M., "Derivation of Machine Tool Error Models and Error Compensation Procedure for Three Axes Vertical Machining Center Using Rigid Body Kinematics", Int Jour of Mach Tools & Manu, 40, 2000. pp 1199-1213
- Mou, J., Donmez, M. A. and Cetinkunt, S., "An Adaptive Error Correction Method Using Feature-Based Analysis Techniques for Machine Performance Improvement Part 1: Theory Derivation", Transactions of the ASME, 117, 1995. pp 584-590
- Kiong, T. K., Heng, L. T., Huifang, D. and Sunan, H., "Geometrical Error Compensation. Precision Motion Control (Design and Implementation)", Springer-Verlag London Limited, London, 2001. pp 113-156
- Kurfess, T. R., Banks, D. L. and Wolfson, L. J., "A Multivariate Statistical Approach to Metrology", Trans of the ASME, 118, 1996. pp 652-657
- Yan, Z., Yang, B. D., Menq, C. H., "Uncertainty Analysis and Variation Reduction of Three Dimension

- Coordinate Metrology. Part 2: Uncertainty Analysis*",
International Journal Machine Tools & Manufacturing,
39, 1999. pp 1219-1238
- 15 Rao, S. S. and Bhatti, P. K., "*Probabilistic Approach to Manipulator Kinematics and Dynamics*", Reliability Engineering and System Safety, 72, 2001. pp 47-58
- 16 Lehtihet, E.A. and Gunasena, U. N., "*Statistical Models for the Relationship between Production Errors and the Position Tolerance of a Hole*", Annals of CIRP, 39, 1990. pp 569-572
- 17 Knapp, W., "*Test of Three-Dimensional Uncertainty of Machine Tools and Measuring Machines and Its Relation to the Machine Errors*", (Submitted by Matthias, E. M.). Annals of CIRP, 32, 1983. pp 459-464
- 18 Nawara, H. L. and Kowalski, M., "*Analysis of the Random Component of Multicoordinate Measuring Machines and Metrological Robots Position Error*", Annals of CIRP, 36; 1987.
- 19 Rabinovich, S. G., "*Measurement Errors and Uncertainties: Theory and Practice*", Translated by Alferieff, M. E., Second edition, AIP Press, NY; 2000.
- 20 Shunian, T., Zhu, L. and Guangying, L. , "*Statistical Inferences of Form Error Distribution Function*", Precision Engineering, 1988.10: 97-99.