



การจำแนกพฤติกรรมรีโอโลยีของวัสดุจากการทดสอบเฉือนเป็นรอบ

ชาญยุทธ โกลิตะวงษ์ *

ศูนย์วิจัยพอลิเมอร์, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ, คณะวิศวกรรมศาสตร์,
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

* ผู้ประสานงานเผยแพร่ (Corresponding Author), E-mail: chanyut.k@eng.kmutnb.ac.th

วันที่รับบทความ: 2 กันยายน 2563; วันที่ทบทวนบทความ: 20 ตุลาคม 2563; วันที่ตอบรับบทความ: 9 พฤศจิกายน 2563

วันที่เผยแพร่ออนไลน์: 9 ธันวาคม 2563

บทคัดย่อ: วัตถุประสงค์ของบทความนี้ต้องการจำแนกพฤติกรรมของวัสดุ และสมบัติรีโอโลยีที่ได้จากการทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบ (Oscillatory Shear) ซึ่งเป็นการทดสอบที่ได้รับการยอมรับในแวดวงวิชาการ ในการใช้เป็นเครื่องมือในการจำแนกวัสดุ ในบทความนี้จะใช้ตัวแปรตามประกาศสมาคมรีโอโลยีแห่งสหรัฐอเมริกา (Society of Rheology, SOR) ที่มีการแบ่งการทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบที่ความเครียดต่ำ (Small Amplitude Oscillatory Shear, SAOS) ที่มีเลขไร้มิติไวส์เซนเบิร์กต่ำ $Wi \leq 1$ ที่ซึ่งความเค้นเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นกับความเครียด และการทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบที่ความเครียดสูง (Large Amplitude Oscillatory Shear, LAOS) $Wi > 1$ ที่ซึ่งความเค้นจะเขียนอยู่ในรูปของอนุกรมคำตอบของฟูรีเยร์ (Fourier Series Solutions) ที่จะประกอบไปด้วยชุดคำตอบหลายชุดรวมกัน การทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบ (Oscillatory Shear) สามารถเขียนวิเคราะห์ในรูปสมการเชิงซ้อนได้ ทำให้สะดวกในการศึกษาพฤติกรรมของพอลิเมอร์เหลวที่มีการรับแรงทางกลแบบพลวัต (Dynamic Mechanical Load) ได้ดี และเป็นที่ยอมรับในแวดวงวิชาการ ในการทดสอบเพื่อจำแนกพฤติกรรมของวัสดุและสมบัติทางรีโอโลยีโดยใช้ฟังก์ชันโวลต์บนแผนภาพพิกิต

คำสำคัญ: การทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบ; การจำแนกพฤติกรรมรีโอโลยีของวัสดุ; ฟังก์ชันโวลต์; แผนภาพพิกิต



Rheological Behavior Identification of Materials from Oscillatory Shear

Chanyut Kolutawong*

Rheology Research Center, Department of Mechanical and Aerospace Engineering,
Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok

* Corresponding author, E-mail: chanyut.k@eng.kmutnb.ac.th

Received: 2 September 2020; Revised 20 October 2020; Accepted: 9 November 2020

Online Published: 9 December 2020

Abstract: The objective of this article is to report how to identify the rheological behavior of a material from oscillatory shear testing which is a widely used method. This article uses official functions announced by the Society of Rheology (SOR) to acquaint those researchers. An oscillatory shear flow can be classified by its shear strain. For small shear strain, *i.e.* at small Weissenberg number $Wi \equiv \lambda \dot{\gamma}_0 \leq 1$, the flow is called small amplitude oscillatory shear, SAOS in which the stress in the fluid is a linear function of the shear strain. However, for large shear strain, $Wi > 1$, such flow can be classified as a large amplitude oscillatory shear, LAOS, flow where the shear stress can be described by Fourier series of the shear strain. Lastly, any oscillatory flow can be written in complex functions, which are very useful for dynamic mechanical analysis. Up until now, Ewoldt grid on a Pipkin diagram is the most widely used method for researchers to classify material behaviors.

Keywords: Oscillatory shear; Rheological behavior identification; Ewoldt grid; Pipkin diagram



1. บทนำ

การทดสอบสมบัติทางรีโอโลยีสำหรับวัสดุที่อยู่ในสถานะที่เป็นของไหลที่มีความหนืดสูง ๆ (Highly Viscous Fluid) เช่น พลาสติกหรือยางที่ยังไม่คงรูป (Uncured Elastomers) หรือเป็นสารละลายพอลิเมอร์ (Polymer Solutions) เช่น เลือด น้ำเหลือง หรือสบู์เหลวและแชมพูสระผม เป็นต้น ในขณะที่กระบวนการผลิตชิ้นส่วนพลาสติก เช่น กระบวนการอัดรีด กระบวนการฉีด และกระบวนการอัดขึ้นรูป พอลิเมอร์เหลวที่อยู่ในกระบวนการผลิตเหล่านี้ส่วนใหญ่จะมีการไหลแบบเฉือนที่อุณหภูมิสูง ๆ เนื่องจากความหนืดของพอลิเมอร์จะต่ำลง ทำให้สมบัติของวัสดุจะค่อนข้างเป็นของไหล (Liquids) หรือของไหลเหนียวหนืด (Viscoelastic Fluids) ทำให้สามารถขึ้นรูปได้ตามที่ต้องการ จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือน (τ_{21}) และความอัตราเครียดเฉือน ($\dot{\gamma}_{21}$) ที่แสดงในสมการที่ (1)

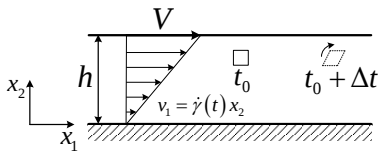
$$\tau_{21} = -\eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{21} \quad (1)$$

เมื่อ η คือความหนืดของของไหลชนิดนอนนิวโทเนียน โดย η เป็นฟังก์ชันของสเกลาร์คงตัวของอัตราเครียดเฉือน (Scalar Invariants of Strain Rate) ซึ่งเป็นค่าคงที่ โดยค่าสเกลาร์ฟังก์ชันของอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ และการเฉือนอย่างง่ายสำหรับวัสดุพอลิเมอร์เหลวที่แสดงในรูปที่ 1 วัสดุพอลิเมอร์เหลวจะอยู่ระหว่างแผ่นประกบคู่ ถ้าระยะระหว่างแผ่นประกบน้อยมาก ๆ ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและอัตราเครียดเป็นแบบเชิงเส้นตามสมการที่ (1)

ในขณะที่การทดสอบยืดดึงโดยมากจะใช้ทดสอบวัสดุที่มีความหนืดสูง ๆ (Highly Viscous Materials)

หรือวัสดุหนืดยืดหยุ่นมาก ๆ (Viscoelastic Materials) เช่น ในกระบวนการหลอมปั่นเส้นใย (Fiber Spinning) พอลิเมอร์ในสถานะดึงยืดขณะที่พอลิเมอร์มีสมบัติเหนียวหนืดซึ่งมีอุณหภูมิต่ำลงมา และกำลังจะเปลี่ยนสถานะเป็นของแข็ง เป็นต้น การทดสอบเพื่อหาความหนืดยืดดึงยังเป็นเรื่องใหม่ในศาสตร์รีโอโลยี และมีการศึกษากันอยู่ในวงจำกัดพอสมควร เนื่องจากการทดสอบหาความหนืดยืดดึงจะต้องใช้เครื่องมือเฉพาะและการวัดกระทำได้ยากกว่าการทดสอบหาความหนืดแบบเฉือน ในบทความนี้จะไม่กล่าวถึงการทดสอบสำหรับวัสดุพอลิเมอร์ที่มีสมบัติยืดหยุ่นสูง ๆ (Highly Elastic or Hyper-Elastic Solids) [1, 2] เช่น ยางคงรูป (Cured Elastomers) [3] หรือพลาสติกที่อยู่ในสถานะของแข็ง (Solid Polymers) และวัสดุพอลิเมอร์ที่ไม่ได้เป็นสารเนื้อเดียว (Anisotropic Materials) เช่น วัสดุพอลิเมอร์คอมโพสิต (Polymer Composite Materials), พลาสติกผสมเส้นใยคาร์บอนไฟเบอร์ เป็นต้น [4]

การทดสอบสมบัติทางรีโอโลยีของพอลิเมอร์จากเครื่องมือวัดสมบัติทางรีโอโลยี เช่น รีโอมิเตอร์แบบกรวยและแผ่น (Cone and Plate Rheometer) รีโอมิเตอร์แบบแผ่นประกบ (Plate and Plate Rheometer) และเครื่องวิเคราะห์เชิงกลพลวัต (Dynamic Mechanical Analyzer, DMA) ส่วนใหญ่จะทดสอบจากการไหลแบบเฉือนผ่านแผ่นประกบคู่ที่มีระยะระหว่างแผ่นประกบน้อย ๆ (h) และทำการเลื่อนแผ่นประกบบนด้วยความเร็วคงที่ V ดังแสดงในรูปที่ 1 ทำให้มีความเร็วในเนื้อวัสดุที่ทดสอบด้วยการไหลแบบเฉือนเป็นไปตามสมการที่ (2)



รูปที่ 1 แสดงการไหลแบบเฉือนอย่างง่าย (Simple Shear Flow) ที่ไหลในทิศทาง x_1

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t)x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{123} \quad (2)$$

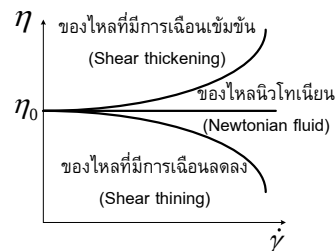
เมื่อ v_1 , v_2 และ v_3 คือความเร็วของวัสดุในทิศทาง x_1 , x_2 และ x_3 ตามลำดับ ในทางทฤษฎีแล้วเราสามารถควบคุมความเค้นที่แผ่นประกบด้านหนึ่งแล้ววัดอัตราเครียดที่แผ่นประกบอีกด้าน หรือในทางกลับกันเราสามารถควบคุมอัตราเครียดแล้ววัดความเค้นก็ได้ ถึงแม้ว่าทั้ง 2 วิธีมีข้อดี-ข้อเสียที่แตกต่างกัน [5] แต่การควบคุมความเค้นแล้ววัดอัตราเครียดทำได้ยากกว่าเนื่องจากผลของความเฉื่อย (Inertia Effects) [6] จึงทำให้อุปกรณ์ทดสอบสมบัติทางรีโอโลยีของพอลิเมอร์เหลวส่วนใหญ่จะควบคุมอัตราเครียดและวัดความเค้นเป็นหลัก จากรูปที่สำหรับการควบคุมอัตราเครียดที่แผ่นประกบบนที่มีระยะ h น้อย ๆ

$$\dot{\gamma}_{21} = \frac{\Delta v_1}{\Delta x_2} = \frac{v_1|_{x_2=h} - v_1|_{x_2=0}}{h} \quad (3)$$

จากสมการที่ (3) จะเห็นได้ว่าการควบคุมอัตราเครียดในของเหลวจะกระทำได้โดยการควบคุมความเร็วที่แผ่นประกบบน $v_1|_{x_2=h}$

โดยเห็นได้ว่าพฤติกรรมการไหลด้วยการเฉือนอย่างง่าย (Simple Shear Flow) จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเครียดเฉือน $\mu = -\tau_{yx}/\dot{\gamma}_{yx}$ เรียกว่าของไหลนิวโทเนียน ในขณะที่ความสัมพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นระหว่างความเค้นเฉือนและความเครียดเฉือน $\eta(\dot{\gamma}) = -\tau_{yx}/\dot{\gamma}_{yx}$ เรียกว่าของไหลนอนนิวโทเนียน หากค่าความหนืดลดลงเมื่ออัตราเครียดเฉือนเพิ่มขึ้น วัสดุจะเป็นของไหลที่มีการเฉือนลดลง (Shear Thinning Fluid) ในทางกลับกัน ถ้าค่าความหนืดเพิ่มขึ้นเมื่ออัตราเครียดเฉือนเพิ่มขึ้น จะเป็นของไหลที่มีการเฉือนเข้มข้น (Shear Thickening Fluid) และถ้าค่าความหนืดไม่เปลี่ยนไปตามอัตราเครียดเฉือน ก็จะเป็นวัสดุนิวโทเนียน ดังแสดงในรูปที่ 2 [7]

ในที่นี้อัตราส่วนระหว่างความเค้นเฉือนและความเครียดเฉือน $\tau_{yx}/\dot{\gamma}_{yx}$ จะเป็นค่าความหนืดปรากฏ (Apparent Viscosity) ที่สามารถหาได้จากการทดลองในห้องปฏิบัติการ ด้วยการทดสอบการไหลอย่างง่ายแบบเฉือนคงตัว และสามารถหาค่าความหนืดที่ความเครียดเฉือนเป็นศูนย์ $\eta(0) = \eta_0$ ได้จากการประมาณค่าความหนืดที่อัตราความเครียดเฉือนต่ำ ๆ เข้าไปหาค่าความหนืดที่อัตราความเครียดเฉือนเป็นศูนย์



รูปที่ 2 ความหนืดปรากฏของวัสดุของไหลที่มีการเฉือนลดลง นิวโทเนียน และของไหลที่มีการเฉือนเข้มข้น



ในทางปฏิบัติวัสดุที่ถูกเค้นคงตัว และทำให้เกิดความเครียดสูง ๆ ได้อย่างง่ายดายด้วยแรงเค้นต่ำ ๆ จะถูกเรียกว่า “ของไหล” (Fluids) นั้นหมายความว่า การเค้นถูกกระทำด้วยระยะเวลาสั้น ๆ และของไหลสามารถสลายพลังงาน (Energy Dissipation) ที่เกิดจากแรงเค้นนั้นออกไปจากวัสดุได้อย่างง่ายดายด้วยการเคลื่อนที่ไปอย่างถาวร หรืออาจกล่าวได้ว่าแรงภายนอกสามารถเอาชนะแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลของวัสดุได้อย่างง่ายดาย ยกตัวอย่างเช่น การไหลของน้ำฝนบนหลังคาลงสู่พื้นดินจะเกิดขึ้นในช่วงระยะเวลาแค่ไม่กี่วินาทีเท่านั้น ในทางกลับกัน วัสดุที่ถูกเค้นคงตัวและทำให้เกิดความเครียดสูง ๆ ได้ยาก จะถูกเรียกว่า “ก้อนของแข็ง” (Bulky Solids) ถ้าแรงเค้นไม่มากพอ การทำให้เกิดความเครียดสูง ๆ นั้นอาจจะต้องใช้เวลานานในการสลายพลังงานที่เกิดจากแรงเค้นนั้นออกไปจากวัสดุด้วยการเสียรูปไปอย่างถาวร ยกตัวอย่างเช่น ภูเขาหินจะมีการเก็บสะสมพลังงานไปเรื่อย ๆ และใช้เวลานานเป็นล้าน ๆ ปี กว่าที่จะถูกมนุษย์สังเกตได้ว่ามี การเสียรูปไปจากเดิม เราเรียกเวลาที่วัสดุใช้ในการคลายพลังงานออกไปนี้ว่า “เวลาผ่อนคลาย” (Relaxation Time, λ)

เนื่องจากวัสดุทุกชนิดสามารถนิยามได้ด้วยเวลาผ่อนคลาย λ ด้วยเหตุนี้ในศาสตร์รีโอโลยีจะมอง “วัตถุทุกชนิดเป็นของไหล ขึ้นอยู่กับระยะเวลาสังเกตการณ์” ไม่ได้ขึ้นอยู่กับสถานะของวัสดุว่าเป็นของแข็งหรือของเหลว วัตถุประสงค์ของบทความนี้จะทำการแจกแจงพฤติกรรมของไหลของวัสดุเพื่อการเลือกใช้สมการแสดงพฤติกรรมได้อย่างเหมาะสม ด้วยการทดสอบเค้นเป็นรอบ (Oscillatory Shear Test) บทความจะเริ่มต้นด้วยการแนะนำสมบัติรีโอโลยี จากการ

ทดสอบเค้นเป็นรอบที่ความเครียดต่ำ และความเครียดสูง โดยทางสมาคมรีโอโลยีแห่งสหรัฐอเมริกา (Society of Rheology, SOR) ได้ตั้งคณะกรรมการทำความเข้าใจร่วมกันในการใช้สมบัติรีโอโลยีที่ได้จากการทดสอบแบบเค้นเป็นรอบ [8] รวมทั้งกำหนดฟังก์ชันทางรีโอโลยีของวัสดุในการทดสอบเค้นเป็นรอบ (Oscillatory Shear) และได้ประกาศให้กับนักวิจัยที่ทำงานทางด้านรีโอโลยีได้ใช้ตัวแปรและสมบัติรีโอโลยีที่ได้จากการทดสอบในทิศทางเดียวกัน [9, 10] และในตอนท้ายจะกล่าวถึงการจำแนกพฤติกรรมของวัสดุโดยใช้ฟังก์ชันโวลุ่มบนแผนภาพพิกิติน จากการทดสอบเค้นเป็นรอบ และแสดงตัวอย่างการจำแนกพฤติกรรมของไหลที่ไม่เป็นเชิงเส้นของกาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% บนแผนภาพพิกิติน

$$v_1|_{x_2=h} = \dot{\gamma}_0 \cos(\omega t) h$$

$$v_1 = \dot{\gamma}(t) x_2$$

$$\tau = \tau(t)$$

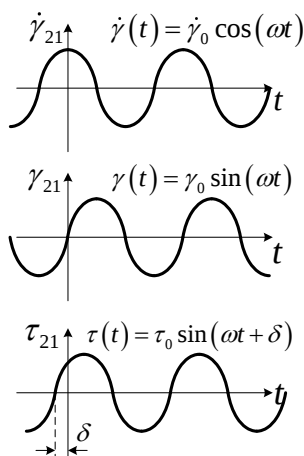
รูปที่ 3 แสดงการทดสอบสมบัติทางรีโอโลยีแบบเค้นเป็นรอบ ที่ควบคุมข้อมูลเข้า (Input) ด้วยอัตราเค้นคงตัว $\dot{\gamma}_0$ ตามช่วงเวลาที่ต้องการ

2. การทดสอบเค้นเป็นรอบ

การทดสอบเค้นเป็นรอบ (Oscillatory Shear Test) เป็นการควบคุมความเร็วที่แผ่นประกบบน $v_1|_{x_2=h}$ ให้เคลื่อนที่เป็นรอบด้วยความถี่ ω แล้ววัดความเค้นที่แผ่นประกบล่าง ($x_2=0$) รูปที่ 3 แสดงการทดสอบเพื่อหาสมบัติทางรีโอโลยีแบบเค้นเป็นรอบ



ปกติแล้วการทดสอบจะควบคุมข้อมูลเข้า (Input) ด้วยอัตราเคียดเฉือนคงตัว $\dot{\gamma}_0$ ที่ช่วงเวลาที่ต้องการ ในที่นี่จะเห็นได้ว่าควบคุมข้อมูลเข้า (Input) ด้วยการเลื่อนแผ่นประกบบน ($x_2 = h$) และวัดความเคียดเฉือนที่ของไหลกระทำกับแผ่นประกบล่าง ($x_2 = 0$) ยกเว้นการทดสอบการคืบที่ควบคุมข้อมูลเข้า (Input) ด้วยความเค้นเฉือนคงที่ τ_0 และวัดอัตราเคียดเฉือนที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\dot{\gamma}(t)$



รูปที่ 4 กราฟแสดงการควบคุมข้อมูลเข้า-ออก (Input and Output) ในการทดลองแบบควบคุมอัตราเคียดเฉือนคงตัว $\dot{\gamma}_0$ ที่ช่วงเวลาที่ต้องการของการทดสอบการเฉือนเป็นรอบที่ความเคียดต่ำ

รูปที่ 4 กราฟแสดงการควบคุมข้อมูลเข้า-ออก (Input and Output) ในการทดลองแบบควบคุมอัตราเคียดเฉือนคงตัว $\dot{\gamma}_0$ ที่ช่วงเวลาที่ต้องการของการทดสอบการเฉือนเป็นรอบแสดงในรูปที่ 3 เมื่อ δ เป็นระยะเฟสที่แตกต่างกันระหว่างข้อมูลเข้าและออก ปกติแล้ว $\delta = 0$ สำหรับวัสดุยืดหยุ่นสมบูรณ์ และ $\delta = \pi/2$ สำหรับของไหลนิวโทเนียน และ

$0 < \delta < \pi/2$ สำหรับวัสดุวิสโคอีลาสติก สมการความเร็วของวัสดุระหว่างแผ่นประกบในการไหลแบบเฉือนเป็นรอบ จะแสดงได้ด้วยสมการที่ (2) โดยอัตราเคียดคือ (รูปที่ 3 และรูปที่ 4)

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_{21} = \dot{\gamma}_0 \cos \omega t \quad (4)$$

เมื่อ $\omega = 1/T$ เป็นความถี่กวาด (Frequency Sweep) ที่มีหน่วยเป็นรอบต่อวินาที (Hz) และ T เป็นคาบเวลาในการเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบ มีหน่วยเป็นวินาที $\dot{\gamma}_0$ เป็นขนาดของอัตราเคียด (Strain rate amplitude) ซึ่งมีความเคียดคือ

$$\gamma_{21}(0, t) = \int_0^t \dot{\gamma}_0 \cos \omega t' dt' = \dot{\gamma}_0 \sin \omega t \quad (5)$$

เมื่อ γ_0 เป็นขนาดของความเคียด (Strain Amplitude) มีค่าเป็นบวก (+) เสมอ และมีความสัมพันธ์กับขนาดของอัตราเคียดคือ

$$\dot{\gamma}_0 = \omega \gamma_0 \quad (6)$$

ซึ่งเป็นการทำให้ของเหลวที่อยู่ระหว่างแผ่นประกบคู่เคลื่อนที่ไป-มาเป็นรอบตามอัตราเคียดที่ได้รับจากแผ่นประกบบน การกำหนดลักษณะของสมการความเค้นตอบสนองที่จะเกิดที่แผ่นประกบล่างว่าจะมีรูปแบบใดได้จากการเปรียบเทียบแรงยืดหยุ่น (Elastic Force) กับแรงหนืด (Viscous Force) เรียกว่า “เลขไร้มิติไวส์เซนเบิร์ก” (Weissenberg Number, Wi) [11]

$$Wi = \lambda \dot{\gamma}_0 = \lambda \omega \gamma_0 \quad (7)$$

เมื่อ “แรงยืดหยุ่น” คือแรงที่ใช้ในการคืนตัวของวัสดุ และ “แรงหนืด” คือแรงเสียดทานระหว่างโมเลกุลของไหล ถ้า $Wi = \lambda \omega \gamma_0 \leq 1$ จะเป็นการเฉือนเป็นรอบที่



ความเค้นต่ำ (Small Amplitude Oscillatory Shear, SAOS) สมการความเค้นจะแสดงพฤติกรรมหยุ่นหนืดเชิงเส้นกับความเครียด (Linear Viscoelastic Behavior) แต่ถ้า $Wi \equiv \lambda \omega \gamma_0 > 1$ จะเป็นการทดสอบเฉือนเป็นรอบที่ความเค้นสูง (Large Amplitude Oscillatory Shear, LAOS) [12] สมการความเค้นจะไม่เป็นเชิงเส้นกับความเครียด (Nonlinear Viscoelastic Behavior) [13, 14] ความเค้นจะเขียนอยู่ในรูปอนุกรมค่าตอบของฟูริเยร์ (Fourier Series Solutions) ที่จะประกอบไปด้วยชุดค่าตอบหลาย ๆ ชุดรวมกัน [15, 16] และจากนิยามสมบัติรีโอโลยีในการไหลแบบเฉือน กำหนดให้สัมประสิทธิ์ผลต่างความเค้นตั้งฉากลำดับที่หนึ่ง (First Normal Stress Difference Coefficient) Ψ_1 คือ

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = -\frac{N_1}{\dot{\gamma}_0^2} = -\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}_0^2} \quad (8)$$

และค่าสัมประสิทธิ์ผลต่างความเค้นตั้งฉากลำดับที่สอง (Second Normal Stress Difference Coefficient) Ψ_2

$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = -\frac{N_2}{\dot{\gamma}_0^2} = -\frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{\dot{\gamma}_0^2} \quad (8)$$

เมื่อ τ_{11} เป็นความเค้นแนวทแยงที่เกิดขึ้นในทิศทางการไหลหลัก (ซึ่งในที่นี้คือ x_1) τ_{22} เป็นความเค้นแนวทแยงที่เกิดขึ้นในทิศทางที่มีเกรเดียนต์ของความเร็ว ซึ่งในที่นี้คือ x_2 และ τ_{33} เป็นความเค้นแนวทแยงที่เกิดขึ้นในทิศทางที่ไม่อยู่บนระนาบของความเร็วและเกรเดียนต์ของความเร็ว (ซึ่งในที่นี้คือ x_3) และความหนืดปรากฏ คือ

$$\eta(\dot{\gamma}) = -\frac{\tau_{21}}{\dot{\gamma}_0} \quad (9)$$

โดย $\dot{\gamma}_0$ มีค่าได้ทั้งบวก (+) และลบ (-) ขึ้นอยู่กับทิศทางการไหลและการตั้งระบบแกน สำหรับการไหลแบบนิวโทเนียนความหนืดจะเป็นค่าคงที่ $\eta = \mu$ และ $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ แต่สำหรับของไหลพอลิเมอร์ $\eta = \eta(\dot{\gamma})$ และ $\Psi_1 = \Psi_1(\dot{\gamma})$ มีค่าเป็นบวก (+) และ $\Psi_2 = \Psi_2(\dot{\gamma})$ มีค่าเป็นลบ (-)

2.1 ความเครียดต่ำ

ที่ความเครียด γ_0 คงที่ใด ๆ สมการที่ (6) แสดงให้เห็นว่าการทดสอบการไหลแบบเฉือนเป็นรอบที่มีความเครียดต่ำ (Small Amplitude Oscillatory Shear Flow, SAOS) สมการความเค้นยังสามารถตามอัตราเครียดทันแต่อาจจะมียะเฟสที่แตกต่างกัน (Phase Difference) ระหว่างความเค้นและความเครียด δ อยู่บ้าง ดังนั้นสมการความเค้นจะเป็นเชิงเส้นกับความเครียด (Linear Viscoelastic Behavior) และความเค้นที่ของเหลวส่งให้แผ่นประกบคู่ที่อยู่ด้านล่างจะมีค่าเท่ากับ [17]

$$-\tau_{21} = \tau_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (10)$$

โดย δ เป็นระยะเฟสที่แตกต่างกัน (Phase Difference) ระหว่างความเค้นและความเครียด และ τ_0 เป็นขนาดของความเค้นตอบสนอง (Stress Response Amplitude) ซึ่งควรจะเป็นค่าคงที่และมีความสัมพันธ์กับขนาดอัตราเครียด $\dot{\gamma}_0$ ในสมการที่ (6) ด้วยการใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ สมการที่ (10) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$-\tau_{21} = (\tau_0 \cos \delta) \sin \omega t + (\tau_0 \sin \delta) \cos \omega t \quad (11)$$

จะเห็นว่าความเค้นที่เกิดจากการทดสอบเฉือนเป็นรอบในสมการที่ (11) สามารถเขียนอยู่ในรูปของ



$\cos \omega t$ ซึ่งอินเฟสกับอัตราเครียดแสดงในสมการที่ (4) จะบ่งถึงสมบัติของเหลวนิวโทเนียน (Newtonian Fluid) และ $\sin \omega t$ ซึ่งอินเฟสกับความเครียดแสดงในสมการที่ (5) จะบ่งถึงสมบัติของความยืดหยุ่น (Elastic Solid) ดังนั้นการทดสอบเฉือนเป็นรอบจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$-\frac{\tau_{21}}{\gamma_0} = G'(\omega) \sin \omega t + G''(\omega) \cos \omega t \quad (12)$$

เมื่อ

$$G'(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \delta \quad (13)$$

$$G''(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \delta \quad (14)$$

โดย G' คือมอดุลัสกักเก็บ (Storage Modulus) และ G'' คือมอดุลัสสูญเสีย (Loss Modulus) จะเห็นได้ว่าการทดสอบเฉือนเป็นรอบ สามารถวัดได้ทั้งพฤติกรรมความยืดหยุ่นและพฤติกรรมของเหลวออกมาได้พร้อมกัน สมการที่ (13) และ (14) สามารถหาค่าระยะเฟสที่แตกต่างระหว่างความเค้นและความเครียดได้คือ

$$\tan \delta = \frac{G''}{G'} \quad (15)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (6) แทนลงในสมการที่ (11) ทำให้สามารถเขียนในอีกรูปแบบได้คือ

$$-\frac{\tau_{21}}{\dot{\gamma}_0} = \eta'' \sin \omega t + \eta' \cos \omega t \quad (16)$$

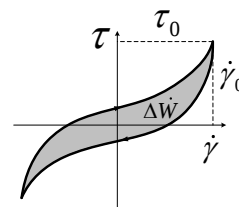
โดย

$$G'(\omega) = \omega \eta'(\omega) \quad (17)$$

$$G''(\omega) = \omega \eta''(\omega) \quad (18)$$

เนื่องจาก η' จะมีค่าเท่ากับ ความหนืดนิวโทเนียน μ เมื่อ $G' = 0$ ทำให้เราเรียก η' ว่าความหนืดพลวัติ

(Dynamic Viscosity) ในขณะที่ η'' มิได้มีชื่อเรียกอย่างเป็นทางการเนื่องจากเมื่อ $G'' = 0$ วัสดุที่วัดจะมีสมบัติยืดหยุ่นสมบูรณ์ (Purely Elastic) นั่นคือ $G' = G$ สำหรับวัสดุหนืดยืดหยุ่น (Viscoelastic Materials) จะมีทั้ง $G'(\omega)$ และ $G''(\omega)$ [18] ในขณะ ที่ผลต่างความเค้นลำดับที่ 1 และ 2 ในการไหลแบบเฉือนเป็นรอบ จะเกิดในชุดค่าตอบคู่เท่านั้น (Even Harmonics) ทำให้ยังเป็นที่ยกเถียงกันว่าอาจจะไม่สามารถตรวจวัดค่าผลต่างความเค้นลำดับที่ 1 และ 2 ใน SAOS ได้และยังไม่มีการนิยามตัวแปรผลต่างความเค้นลำดับที่ 1 และ 2 ใน SAOS อย่างเป็นทางการ [8] แต่อย่างไรก็ตามได้มีนักวิจัยบางท่าน [12, 19, 20] ได้ประมาณการผลต่างความเค้นลำดับที่ 1 และ 2 ใน SAOS ไว้แต่จะไม่กล่าวถึงในที่นี้



รูปที่ 5 แสดงวงรอบฮิสเทอรีซิสในการทดสอบเฉือนเป็นรอบเป็นกำลังงานที่สูญเสียต่อหน่วยพื้นที่เนื่องจากวัสดุมีสมบัติหนืดยืดหยุ่น

ในขณะ ที่การพล็อตระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเครียดเฉือนในการทดสอบเฉือนเป็นรอบจะเกิดวงรอบฮิสเทอรีซิส (Hysteresis Loop) ดังแสดงในรูปที่ ซึ่งเป็นกำลังงานที่สูญเสียต่อหน่วยพื้นที่ถ้าวัสดุมีสมบัติหนืดยืดหยุ่น (Viscoelastic Property) นั่นคือ

$$\Delta \dot{W} = \oint \tau d\dot{\gamma} \quad (19)$$



สมการที่ (19) แสดงให้เห็นว่าวัสดุที่ยืดหยุ่นสมบูรณ์เท่านั้นที่จะไม่เกิดวงรอบฮีสเทรีซิส นั่นคือจะต้องใช้แรงเฉือนและปล่อยกลับที่เท่ากันที่อัตราเฉือนเดียวกัน การพล็อตระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเฉือน หรือความเค้นเฉือนและความเฉือนแสดงในรูปที่ 1 นี้มีชื่อเรียกสั้น ๆ ว่า “แผนภาพลิสซาชูส์” (Lissajous Curves) หรือถ้าจะให้ถูกต้องเรียกว่า “แผนภาพลิสซาชูส์-โบว์ดิชส์” (Lissajous-Bowditch Curves)

2.2 ความเครียดสูง

ที่ความเครียด γ_0 คงที่ใด ๆ สมการที่ (6) แสดงให้เห็นว่าการทดสอบการไหลแบบเฉือนเป็นรอบที่มีความเครียดสูง (Large Amplitude Oscillatory Shear Flow, LAOS) สมการความเค้นจะไม่สามารถตามความเครียดทัน ดังนั้นสมการความเค้นจะไม่เป็นเชิงเส้นกับความเครียด (Nonlinear Viscoelastic Behavior) ซึ่งความเค้นจะเขียนอยู่ในรูปอนุกรมคำตอบของฟูรีเยร์ (Fourier Series Solutions) ที่จะประกอบไปด้วยชุดคำตอบ n ชุด (Higher Harmonics, n) รวมกันนั้นคือ [6]

$$-\tau_{21} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \tau_{0,n} \sin(\omega_n t + \delta_n) \quad (20)$$

เมื่อ $\omega_n = n\omega$, δ_n เป็นระยะเฟสที่แตกต่างกัน (Phase Difference) ระหว่างความเค้นและความเครียดในฮาร์โมนิกส์ที่ n และ $\tau_{0,n}$ เป็นขนาดของความเค้นตอบสนอง (Stress Response Amplitude) ในฮาร์โมนิกส์ที่ n ซึ่งควรจะเป็นค่าคงที่และมีความสัมพันธ์กับขนาดอัตราเฉือน $\dot{\gamma}_0$ ณ ฮาร์โมนิกส์ที่ n ใด ๆ จัดรูปใหม่ด้วยการใช้เอกลักษณ์

ทางตรีโกณมิติและหารตลอดด้วยขนาดความเครียด $\gamma_0 = \dot{\gamma}_0 / \omega$ ในสมการที่ (6) ดังนั้น [21, 22]

$$-\frac{\tau_{21}(t, \dot{\gamma}_0)}{\gamma_0} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} G'_n \sin \omega_n t + G''_n \cos \omega_n t \quad (21)$$

เมื่อ

$$G'_n(\omega, \gamma_0) = \frac{\tau_{0,n}}{\gamma_0} \cos \delta_n \quad (22)$$

$$G''_n(\omega, \gamma_0) = \frac{\tau_{0,n}}{\gamma_0} \sin \delta_n \quad (23)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปของขนาดอัตราเฉือน $\dot{\gamma}_0$ คือ [12, 13]

$$-\frac{\tau_{21}(t, \dot{\gamma}_0)}{\dot{\gamma}_0} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \eta''_n \sin \omega_n t + \eta'_n \cos \omega_n t \quad (24)$$

และมีผลต่างความเค้นลำดับที่ 1 และ 2 คือ [14]

$$-\frac{N_1(t, \dot{\gamma}_0)}{\dot{\gamma}_0^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{even}}}^{\infty} \Psi''_{1,n} \sin \omega_n t + \Psi'_{1,n} \cos \omega_n t \quad (25)$$

$$-\frac{N_2(t, \dot{\gamma}_0)}{\dot{\gamma}_0^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{even}}}^{\infty} \Psi''_{2,n} \sin \omega_n t + \Psi'_{2,n} \cos \omega_n t \quad (26)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ของฟูรีเยร์ (η'_n, η''_n) , (G'_n, G''_n) , $(\Psi'_{1,n}, \Psi''_{1,n})$ และ $(\Psi'_{2,n}, \Psi''_{2,n})$ เป็นจำนวนจริงและ (η'_n, η''_n) สัมพันธ์กับ (G'_n, G''_n) โดย

$$G'_n(\omega, \gamma_0) = \omega \eta''_n(\omega, \gamma_0) \quad (27)$$

$$G''_n(\omega, \gamma_0) = \omega \eta'_n(\omega, \gamma_0) \quad (28)$$

จะเห็นว่าเมื่อ $n=1$ สมการใน LAOS จะลดรูปเป็น SAOS กล่าวคือความเค้นเฉือนในสมการที่ (21) และ (24) ของ LAOS จะลดรูปเป็นสมการที่ (12) และ (16) ใน SAOS ตามลำดับ ส่วนผลต่างความเค้นลำดับที่ 1 และ 2 จะหาได้ใน LAOS เท่านั้นเนื่องจากผลต่าง



ความเค้นลำดับที่ 1 และ 2 ในการไหลแบบเฉือนเป็นรอบจะเกิดในชุดคำตอบคู่เท่านั้น (Even Harmonics) ในทำนองเดียวกัน (G'_n, G''_n) ในสมการที่ (27) และ (28) ของ LAOS ก็จะสามารถเป็นสมการที่ (17) และ (18) ของ SAOS ตามลำดับ

3. ฟังก์ชันเชิงซ้อนในการเฉือนเป็นรอบ

เนื่องจากการทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบมักจะเขียนอยู่ในรูปอนุกรมคำตอบของฟูริเยร์ (Fourier Series Solutions) ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณเราสามารถเขียนอัตราเคียดอยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงซ้อนโดย

$$\dot{\gamma}_{21}^*(t) = \dot{\gamma}_0 \exp(i\omega t) \quad (29)$$

และมีความเคียดคือ

$$\gamma_{21}^*(0, t) = \int_{-\infty}^t \dot{\gamma}_{21}^* dt' \quad (30)$$

เมื่อแทนค่าอัตราเคียดเชิงซ้อนจากสมการที่ (29) ลงในสมการที่ (31) จะได้

$$\gamma_{21}^*(0, t) = -i\gamma_0 \exp(i\omega t) \quad (31)$$

เมื่อความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของอัตราเคียด $\dot{\gamma}_0$ และขนาดความเคียด γ_0 เป็นไปตามสมการที่ (6) จากสูตรของออยเลอร์ (Euler Formula) [23] อัตราเคียดในสมการที่ (4) และความเคียดในสมการที่ (5) มีความสัมพันธ์กับอัตราเคียดในสมการที่ (29) และความเคียดในสมการที่ (30) ที่เขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงซ้อนดังนี้คือ [24]

$$\dot{\gamma}_{21}(t) = \Re\{\dot{\gamma}_0 \exp(i\omega t)\} = \dot{\gamma}_0 \cos \omega t \quad (32)$$

และ

$$\gamma_{21}(0, t) = \Re\{-i\gamma_0 \exp(i\omega t)\} = \gamma_0 \sin \omega t \quad (33)$$

3.1 ความเคียดต่ำ

ความเค้นใน SAOS ที่เขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงซ้อนหาได้จากสมการที่ (10) โดยสัมพันธ์กับความเค้นที่เขียนในรูปของฟังก์ชันเชิงซ้อนคือ

$$-\tau_{21}^* = -i\tau_0 \exp(i(\omega t + \delta)) \quad (34)$$

โดยเมื่อ

$$-\tau_{21} = \Re\{-\tau_{21}^*\} \quad (35)$$

แทนค่าสมการที่ (34) ลงในสมการที่ (35) จะได้

$$-\tau_{21} = \tau_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (36)$$

ดังนั้นมอดูลัสเชิงซ้อน (Complex Modulus, G^*) สำหรับ SAOS หาได้จาก

$$G^*(\omega) = -\frac{\tau_{21}^*}{\dot{\gamma}_{21}^*} = \frac{\tau_0}{\gamma_0} (\cos \delta + i \sin \delta) \quad (37)$$

และ

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) \quad (38)$$

และขนาดของมอดูลัสเชิงซ้อน (Magnitude of Complex Modulus, $|G^*|$) คือ [23]

$$G_d = |G^*| = \sqrt{G'^2 + G''^2} = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \quad (39)$$

โดย $G'(\omega)$ และ $G''(\omega)$ นิยามในสมการที่ (13) และ (14) ในทำนองเดียวกันความหนืดเชิงซ้อน (Complex Viscosity, η^*) สามารถหาได้จาก

$$\eta^*(\omega) = -\frac{\tau_{21}^*}{\dot{\gamma}_{21}^*} = \frac{\tau_0}{i\omega\gamma_0} (\cos \delta + i \sin \delta) \quad (40)$$

และ

$$\eta^*(\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) \quad (41)$$



และมีค่าความหนืดเชิงซ้อนสมบูรณ์ (Magnitude of Complex Viscosity, $|\eta^*|$)

$$|\eta^*| = \sqrt{\eta'^2 + \eta''^2} \quad (42)$$

เมื่อ $\eta''(\omega)$ และ $\eta'(\omega)$ นิยามในสมการที่ (17) และ (18) ตามลำดับ [25] ฟังก์ชันเชิงซ้อนที่สำคัญอีกตัวคือ คอมเพล็กซ์เชิงซ้อน (Complex Compliance, J^*) ซึ่งนิยามว่าเป็นส่วนกลับของ G^* นั่นคือ

$$J^*(\omega) \equiv -\frac{\gamma_{21}^*}{\tau_{21}^*} = \frac{\gamma_0}{\tau_0} (\cos \delta - i \sin \delta) \quad (43)$$

และ

$$J^*(\omega) = J'(\omega) - iJ''(\omega) \quad (44)$$

และมีขนาดของคอมเพล็กซ์เชิงซ้อนสมบูรณ์ (Magnitude of Complex Compliance, $|J^*|$) คือ

$$|J^*| = \sqrt{J'^2 + J''^2} \quad (45)$$

ฟังก์ชันเชิงซ้อนจะใช้มากในการทดสอบแบบพลวัตสำหรับหาสมบัติหนืดยืดหยุ่น [6] คอมเพล็กซ์เชิงซ้อน (Complex Compliance, J^*) จะเกิดจากการควบคุมความเค้นและวัดอัตราเครียดที่คำนวณด้วยฟังก์ชันเชิงซ้อนซึ่งสามารถดูรายละเอียดได้จาก [26]

3.2 ความเครียดสูง

ฟังก์ชันเชิงซ้อนของการทดสอบแบบ LAOS ก็สามารถหาได้จากวิธีที่คล้าย ๆ กันแต่จะปรากฏชุดฮาร์โมนิกส์ (Higher Harmonics, n) บนสมบัติรีโอโลยีด้วย โดยถ้านาขนาดของความเครียดสูง (Large Amplitude Oscillatory Shear, LAOS) นั่นคือมีขนาดความเครียด γ_0 สูง และ/หรือมีความถี่ ω สูง สมการความเค้นจะไม่สามารถตามความเครียดทัน ดังนั้น

สมการความเค้นจะไม่เป็นเชิงเส้นกับอัตราเครียด (Nonlinear Viscoelastic Behavior) ซึ่งความเค้นจะเขียนอยู่ในรูปอนุกรมคำตอบของฟูริเยร์ (Fourier Series Solutions) ที่จะประกอบไปด้วยชุดคำตอบ n ชุด (Higher Harmonics) รวมกันนั่นคือ

$$-\tau_{21}^* = -\sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} i\tau_{0,n} \exp(i(\omega_n t + \delta_n)) \quad (46)$$

เมื่อ

$$-\tau_{21} = \mathcal{Re}\{-\tau_{21}^*\} \quad (47)$$

แทนค่าสมการที่ (46) ลงในสมการที่ (47) จะได้

$$-\tau_{21} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \tau_{0,n} \sin(\omega_n t + \delta_n) \quad (48)$$

ซึ่งมอดูลัสเชิงซ้อน (Complex Modulus, G_n^*) สำหรับ LAOS นิยามโดย

$$G_n^*(\omega, \gamma_0) \equiv -\frac{\tau_{21}^*}{\gamma_{21}^*} \quad (49)$$

แทนค่าสมการที่ (31) และสมการที่ (46) ลงในสมการที่ (49) จะได้

$$G_n^*(\omega, \gamma_0) = \frac{\tau_{0,n}}{\gamma_0} (\cos \delta_n + i \sin \delta_n) \quad (50)$$

หรือสามารถเขียนในรูปจำนวนเชิงซ้อนในอีกรูปคือ

$$G_n^*(\omega, \gamma_0) = G_n'(\omega, \gamma_0) + iG_n''(\omega, \gamma_0) \quad (51)$$

เมื่อ $G_n'(\omega, \gamma_0)$ และ $G_n''(\omega, \gamma_0)$ นิยามในสมการที่ (22) และ (23) และมีขนาดของมอดูลัสเชิงซ้อนสมบูรณ์ (Magnitude of Complex Modulus, $|G_n^*|$) คือ

$$|G_n^*| = \sqrt{G_n'^2 + G_n''^2} \quad (52)$$



ในทำนองเดียวกันความหนืดเชิงซ้อน (Complex Viscosity, η_n^*) สามารถหาได้จาก

$$\eta_n^*(\omega, \gamma_0) = -\frac{\tau_{21}^*}{\dot{\gamma}_{21}^*} \quad (53)$$

แทนค่าสมการที่ (29) และสมการที่ (46) ลงในสมการที่ (53) จะได้

$$\eta_n^*(\omega, \gamma_0) = \frac{\tau_{0,n}}{i\omega\gamma_0} (\cos \delta_n + i \sin \delta_n) \quad (54)$$

และสมการที่ (54) สามารถเขียนในรูปจำนวนเชิงซ้อนในอีกรูปคือ

$$\eta_n^*(\omega, \gamma_0) = \eta_n'(\omega, \gamma_0) - i\eta_n''(\omega, \gamma_0) \quad (55)$$

และมีค่าความหนืดเชิงซ้อนสัมบูรณ์ (Magnitude of Complex Viscosity, $|\eta_n^*|$)

$$|\eta_n^*| = \sqrt{\eta_n'^2 + \eta_n''^2} \quad (56)$$

เมื่อ $\eta_n''(\omega, \gamma_0)$ และ $\eta_n'(\omega, \gamma_0)$ นิยามในสมการที่ (27) และ (28) ตามลำดับ ฟังก์ชันเชิงซ้อนที่สำคัญอีกตัวคือคอมไพแลนซ์เชิงซ้อน (Complex Compliance, J_n^*) ซึ่งนิยามว่าเป็นส่วนกลับของ G_n^* นั่นคือ

$$J_n^*(\omega, \gamma_0) = -\frac{\gamma_{21}^*}{\tau_{21}^*} \quad (57)$$

แทนค่าสมการที่ (31) และสมการที่ (46) ลงในสมการที่ (57) จะได้

$$J_n^*(\omega, \gamma_0) = \frac{\gamma_0}{\tau_{0,n}} (\cos \delta_n - i \sin \delta_n) \quad (58)$$

หรือสามารถเขียนในรูปจำนวนเชิงซ้อนในอีกรูปคือ

$$J_n^*(\omega, \gamma_0) = J_n'(\omega, \gamma_0) - iJ_n''(\omega, \gamma_0) \quad (59)$$

และมีขนาดของคอมไพแลนซ์เชิงซ้อนสัมบูรณ์ (Magnitude of Complex Compliance, $|J_n^*|$) คือ

$$|J_n^*| = \sqrt{J_n'^2 + J_n''^2} \quad (60)$$

เนื่องจากการศึกษาและวิจัยทางด้าน LAOS ยังคงเป็นเรื่องใหม่ในวงการนักการศึกษาโพลีเมอร์ในปัจจุบัน ดังนั้นการใช้งานตัวแปรต่าง ๆ ใน LAOS จึงยังไม่มีประกาศออกมาอย่างเป็นทางการเหมือน SAOS [8] และจะเห็นการนิยามตัวแปรที่แตกต่างกันไปบ้างในแต่ละที่ [6, 12-14]

4. การจำแนกพฤติกรรมของวัสดุ

เนื่องจากพฤติกรรมการไหลจะขึ้นอยู่กับระยะเวลาสังเกตการณ์ ดังนั้นการวิเคราะห์พฤติกรรมการไหลจะทำได้ง่าย ๆ โดยพิจารณาการไหลที่ถูกเงื่อนไขเป็นรอบ ในการทดสอบเงื่อนไขเป็นรอบจะมีอินพุตของอัตราเฉือนเป็นรอบตามสมการที่ (4) และมีความเครียดเฉือนเป็นรอบที่สอดคล้องกัน (Orthogonal Strain) ตามสมการที่ (5) และมีความเค้นตอบสนองตามสมการที่ (21) ที่เขียนอยู่ในรูปของ (G_n', G_n'') หรือมีความเค้นตอบสนองตามสมการที่ (24) ที่เขียนอยู่ในรูปของ (η_n', η_n'') โดยความเค้นตอบสนองสมการที่ (21) และ (24) สามารถลดรูปเป็นสมการที่ (12) และ (16) ได้ที่ $n=1$

ดังที่กล่าวไปแล้วว่าพฤติกรรมของวัสดุจะขึ้นอยู่กับช่วงระยะเวลาสังเกตการณ์ ซึ่งในที่นี้สามารถกำหนดได้โดย “เลขไร้มิติเดบอร์ลา” (Deborah Number, De) [11]

$$De = \frac{\lambda}{T} = \lambda\omega \quad (61)$$

เมื่อ λ คือเวลาผ่อนคลายของวัสดุ T เป็นคาบเวลาอ้างอิง (Characteristic Time) ที่แรงภายนอกกระทำกับวัตถุ มีหน่วยเป็นวินาที เช่น เวลาที่ใช้ในการผลิต และ $\omega = 1/T$ เป็นความถี่กวาด (Frequency Sweep) ที่มีหน่วยเป็นรอบต่อวินาที (Hz) โดยทั่วไปแล้ววัสดุ



คล้ายของเหลว (Liquid-like Material) จะมีเวลาผ่อนคลายต่ำ ($\lambda \rightarrow 0$) และวัสดุคล้ายของแข็ง (Solid-like Material) จะมีเวลาผ่อนคลายสูง ($\lambda \rightarrow \infty$) ที่อัตราเครียดและคาบเวลาอ้างอิงเดียวกัน โดยคาบเวลาอ้างอิง T จะเป็นระยะเวลาที่ใช้ในการทำให้วัสดุเกิดการเสียรูป กล่าวคือที่อัตราเครียดเท่า ๆ กัน วัสดุคล้ายของเหลวจะมีคาบเวลาอ้างอิงสูง (หรือมีความถี่ต่ำ) ในขณะที่วัสดุคล้ายของแข็งที่มีความยืดหยุ่นสูง (Elastic Materials) จะมีคาบเวลาอ้างอิงต่ำ (หรือมีความถี่สูง) ดังนั้นการประยุกต์ใช้งานของทฤษฎีในบทนี้สามารถนำไปใช้ได้ทั้งวัสดุที่เป็นของเหลวหนืด (Viscous Fluids) ที่มี $De \rightarrow 0$ และของแข็งยืดหยุ่น (Elastic Solids) ที่มี $De \rightarrow \infty$ ดังแสดงในรูปที่ 1

$Wi = \lambda \dot{\gamma}_0$	Viscometric flow	Non-linear viscoelastic region	Non-linear elasticity
	Newtonian behavior	Linear viscoelastic region	Linear elasticity
		$De = \lambda \omega$	

รูปที่ 1 ภาพประยุกต์โดอะแกรมของพิพกิน แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเลขไร้มิติไวส์เซนเบิร์กและเลขไร้มิติเดบอร์ลา

พิพกิน (Pipkin, [27]) ได้เสนอแนวคิดของความสัมพันธ์ระหว่างเลขไร้มิติไวส์เซนเบิร์กและเลขไร้มิติเดบอร์ลาไว้ในรูปที่ 1 เมื่อเลขไร้มิติไวส์เซนเบิร์กถูกนิยามไว้ในสมการที่ (7) โดยในการเงื่อนไขเป็นรอบอัตราเครียดเฉือนคงตัว $\dot{\gamma}_0$ มีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับความเครียดเฉือนดังสมการที่ (6) ดังนั้นบนพื้นฐานที่

เวลาผ่อนคลาย λ และความถี่กวาด ω มีค่าคงที่ แกนแนวตั้งของโดอะแกรมพิพกิน (Pipkin Diagram) ที่แสดงด้วยเลขไร้มิติไวส์เซนเบิร์กเปรียบได้ว่าเป็นขนาดความเครียด γ_0 ของวัสดุในการทดสอบเฉือนเป็นรอบนั่นเอง

ถ้าพิจารณาบนพื้นฐานที่เวลาผ่อนคลาย λ และความถี่กวาด ω มีค่าคงที่ เมื่อขนาดความเครียด γ_0 ต่ำ ๆ วัสดุที่ถูกเฉือนเป็นรอบจะเกิดการเสียรูปน้อยมาก ซึ่งเป็นบริเวณที่มี $Wi \rightarrow 0$ และถ้า $De \rightarrow \infty$ ซึ่งอยู่ทางด้านขวาล่างของโดอะแกรม พฤติกรรมการไหลของวัสดุจะเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elasticity) ซึ่งจะเห็นได้ว่าเวลาตอบสนองของวัสดุที่มีความถี่สูง $\omega \rightarrow \infty$ จะมีคาบเวลา T ต่ำ นั่นคือเวลาในการสังเกตการณ์ไม่เพียงพอที่จะเห็นการคลายความเค้นของวัสดุ กล่าวคือช่วงเวลาสั้น ๆ ที่ใช้ในการทำให้วัสดุเสียรูป มีค่าน้อยกว่าช่วงเวลาคลายความเค้น λ ของวัสดุ ซึ่งเป็นสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น เช่น เหล็กและโลหะทั่ว ๆ หรือแม้แต่การตอบสนองของวัสดุผสมต่อการกระแทก [28] ที่ได้รับแรงไม่เกินค่าความเค้นคราก แต่ถ้าวัสดุยืดหยุ่นเหล่านี้ได้รับแรงจนมีการเสียรูปสูงขึ้นจนเกินค่าความเค้นคราก วัสดุจะเกิดการเสียรูปอย่างถาวร และมีพฤติกรรมการเสียรูปไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear Elasticity) หรือบางครั้งเรียกว่า “การเสียรูปถาวร” (Plastic Deformation)

ย้อนกลับมาพิจารณาบริเวณที่มี $Wi \rightarrow 0$ และ $De \rightarrow 0$ ซึ่งอยู่บริเวณมุมซ้ายล่างของโดอะแกรม พฤติกรรมการไหลของวัสดุจะเป็นแบบนิวโทเนียนตลอดช่วงแนวตั้งของโดอะแกรม ในบริเวณนี้จะมีค่าความถี่กวาดต่ำ $\omega \rightarrow 0$ ซึ่งจะตรงกับการ

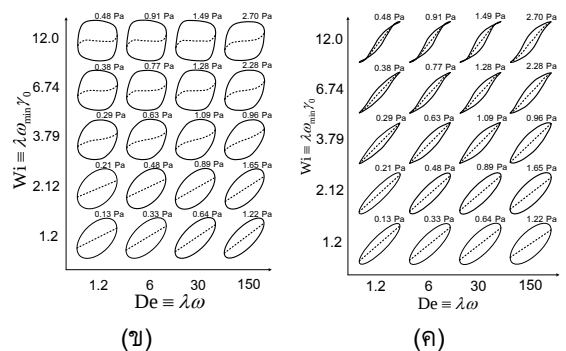
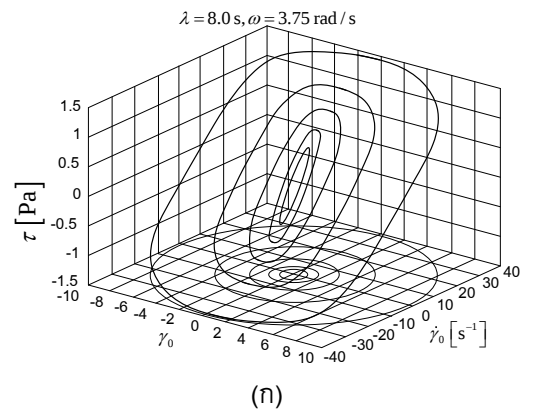


ทดสอบเงื่อนไขคงตัว ดังนั้นพฤติกรรมการไหลของวัสดุที่มีความเครียดสูง ๆ $\gamma_0 \rightarrow \infty$ กล่าวคือ $Wi \rightarrow \infty$ และ $De \rightarrow 0$ จะเป็นการไหลแบบวิสโคเมตริก (Viscometric Flow) ที่ค่าความหนืดจะไม่เป็นเชิงเส้นกับอัตราเครียดอีกต่อไป ดังนั้นพฤติกรรมการไหลของวัสดุในช่วงนี้จึงเหมาะสมกับการแสดงพฤติกรรมคล้ายนิวโทเนียน ตัวอย่างการไหลของของไหลที่มีพฤติกรรมวิสโคเมตริก เช่น พอลิเมอร์หลอมเหลวที่ไหลอยู่ในท่อหรือช่องแคบในกระบวนการผลิต และพฤติกรรมของพอลิเมอร์หลอมเหลวหรือสารละลายพอลิเมอร์ ในการทดสอบเงื่อนไขคงตัวของรีโอมิเตอร์แบบแคปิลลารี หรือในรีโอมิเตอร์แบบกรวยและแผ่น เป็นต้น

บริเวณที่มี $Wi \rightarrow 0$ และ $0 \ll De \ll \infty$ ซึ่งอยู่ส่วนล่างของไดอะแกรมและมีพฤติกรรมการไหลอยู่ระหว่างนิวโทเนียนและยืดหยุ่นเชิงเส้น วัสดุจะมีพฤติกรรมแบบหยุ่นหนืดเชิงเส้น ซึ่งจะเห็นได้ว่าที่ความเครียดต่ำ ๆ $\gamma_0 \rightarrow 0$ ความหนืดที่อัตราเฉือนเป็นศูนย์สามารถหาได้จากพื้นที่ใต้กราฟของค่ามอดุลัสหยุ่นหนืดเชิงเส้น $G(t)$ ในขณะที่บริเวณด้านบนของไดอะแกรมในบริเวณ $Wi \rightarrow \infty$ และ $0 \ll De \ll \infty$ จะเป็นช่วงที่วัสดุมีพฤติกรรมหยุ่นหนืดไม่เป็นเชิงเส้น

ต่อมาอีโวลด์และทีมงาน (Ewoldt, *et al.* [29, 30]) ได้นำเสนอแนวทางการบ่งชี้พฤติกรรมของวัสดุบนไดอะแกรมของพิพคินผ่านแผนภาพลิสซาชูส์ (Lissajous Curves) ที่ได้จากการทดสอบวัสดุแบบเฉือนเป็นรอบดังแสดงในรูปที่ 2 พิกัดของอีโวลด์ (Ewoldt grid) บนไดอะแกรมของพิพคินผ่านแผนภาพลิสซาชูส์ ของกาแวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% (0.2

wt.% Xanthan Gum Solution) จัดเรียงบนไดอะแกรมของพิพคินบนโดเมนของ (De, Wi) (ก) รูป 3 มิติของแผนภาพลิสซาชูส์ (ข) แผนภาพลิสซาชูส์บนโดเมน (γ_0, τ) และ (ค) แผนภาพลิสซาชูส์บนโดเมน $(\dot{\gamma}_0, \tau)$ จัดเรียงบนไดอะแกรมของพิพคินในโดเมน (De, Wi) โดย $\omega_{min} = 0.15 \text{ rad/s}$ และค่าของ τ_{max} แสดงไว้บนแต่ละลูปของแผนภาพลิสซาชูส์จะสังเกตเห็นได้ว่าโดเมนของพิกัดอีโวลด์จะเป็นเพียงหน้าต่างเล็ก ๆ บนไดอะแกรมของพิพคินในช่วงที่สนใจ



รูปที่ 2 พิกัดของอีโวลด์บนไดอะแกรมของพิพคินผ่านแผนภาพลิสซาชูส์ของกาแวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2%



จากฟังก์ชันของอีโวลต์บนไดอะแกรมของฟิสิกส์ผ่านแผนภาพลิสซาส์ อีโวลต์แนะนำให้ปรับสมการอินพุตของอัตราเงื่อนไขเป็นรอบในสมการที่ (4) และความเครียดเงื่อนไขในสมการ (5) ดังนี้

$$y(t) \equiv \frac{\dot{\gamma}(t)}{\dot{\gamma}_0} = \cos \omega t \quad (62)$$

$$x(t) \equiv \frac{\gamma(t)}{\gamma_0} = \sin \omega t \quad (63)$$

และสามารถจัดรูปสมการตอบสนองของการเงื่อนไขเป็นรอบในสมการที่ (21) และสมการที่ (24) เป็น

$$-\frac{\tau_{21}}{\tau_{\max}} = \frac{\gamma_0}{\tau_{\max}} \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} G'_n \sin \omega_n t + G''_n \cos \omega_n t \quad (64)$$

และ

$$-\frac{\tau_{21}}{\tau_{\max}} = \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_{\max}} \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} \eta'_n \sin \omega_n t + \eta''_n \cos \omega_n t \quad (65)$$

และนิยาม

$$-\frac{\tau'}{\tau_{\max}} \equiv \frac{\gamma_0}{\tau_{\max}} \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} G'_n(\omega, \gamma_0) \sin \omega_n t \quad (66)$$

และ

$$-\frac{\tau''}{\tau_{\max}} = \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_{\max}} \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} G''_n(\omega, \gamma_0) \cos \omega_n t \quad (67)$$

เมื่อ $\tau_{\max}$ คือ ค่าความเค้นตอบสนองสูงสุด ซึ่งในที่นี้ใช้เป็นค่าอ้างอิงดังแสดงในรูปที่ 3 ต่อมาอีโวลต์เสนอแนวคิดที่ว่าแทนที่จะแจกแจงสมการตอบสนองของการเงื่อนไขเป็นรอบอยู่ในรูปของ (G'_n, G''_n) อย่างในสมการที่ (64) หรือเขียนอยู่ในรูปของ (η'_n, η''_n) อย่างในสมการที่ (65) ให้เขียนอยู่ในรูป

$$-\frac{\tau'(x)}{\tau_{\max}} \equiv \frac{\gamma_0}{\tau_{\max}} \sum_{n \text{ odd}} e_n(\omega, \gamma_0) T_n(x) \quad (68)$$

$$-\frac{\tau''(y)}{\tau_{\max}} \equiv \frac{\dot{\gamma}_0}{\tau_{\max}} \sum_{n \text{ odd}} v_n(\omega, \gamma_0) T_n(y) \quad (69)$$

เมื่อ $e_n(\omega, \gamma_0)$ คือ สัมประสิทธิ์เชบีเชฟยืดหยุ่น (Elastic Chebyshev Coefficients) $v_n(\omega, \gamma_0)$ คือ สัมประสิทธิ์เชบีเชฟข้นหนืด (Viscous Chebyshev Coefficients) และ $T_n(x)$ คือ พอลิโนเมียลชนิดที่ 1 ของเชบีเชฟลำดับที่ n (n -th-order Chebyshev Polynomial of The First Kind) นิยามโดย

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (70)$$

และมีความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกัน (Orthogonal Relation) คือ [31, 32]

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (71)$$

และความจริงที่ว่า $\sin \theta = \cos(\pi/2 - \theta)$ ทำให้สมการที่ (71) สามารถเขียนอยู่ในรูปของ $\sin \theta$ ได้คือ

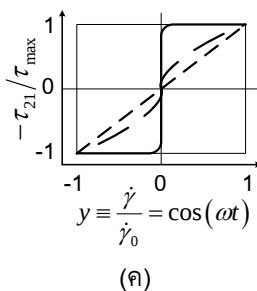
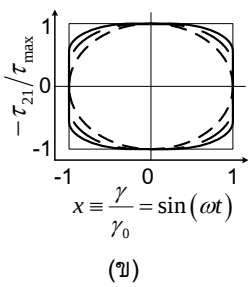
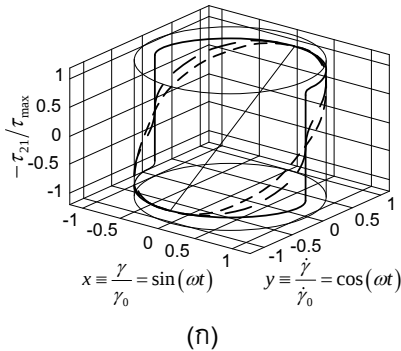
$$T_n(\sin \theta) = \begin{cases} \sin(n\theta)(-1)^{(n-1)/2} & n : \text{odd} \\ \cos(n\theta)(-1)^{n/2} & n : \text{even} \end{cases} \quad (72)$$

รูปที่ 3 แสดงตัวอย่างแผนภาพลิสซาส์ที่ถูกปรับโดเมนตามสมการที่ (62) - (65) แล้ว

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (71) - (72) ทำให้สรุปความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์เชบีเชฟและสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์ได้คือ

$$e_n = G'_n(-1)^{(n-1)/2} \quad n : \text{odd} \quad (73)$$

$$v_n = \frac{G''_n}{\omega} = \eta'_n \quad n : \text{odd} \quad (74)$$



รูปที่ 3 ตัวอย่างแผนภาพลิสซาจัสที่ถูกรับโดเมนแล้ว (ก) รูป 3 มิติ (ข) บนโดเมน $(x, -\tau_{21}/\tau_{max})$ (ค) บนโดเมน $(y, -\tau_{21}/\tau_{max})$

เพื่อที่จะบ่งชี้พฤติกรรมของวัสดุ อีโวลด์นิยามมอดูลัสความเครียดต่ำสุด (Minimum-strain Modulus) G'_M และมอดูลัสความเครียดสูงสุด (Large-strain Modulus) G'_L

$$G'_M \equiv \frac{d\tau}{d\gamma} \bigg|_{\gamma=0} = \sum_{n \text{ odd}} n G'_n = e_1 - 3e_3 + \dots \quad (75)$$

$$G'_L \equiv \frac{\tau}{\gamma} \bigg|_{\gamma=\pm\gamma_0} = \sum_{n \text{ odd}} G'_n (-1)^{(n-1)/2} = e_1 + e_3 + \dots \quad (76)$$

เมื่อมอดูลัสความเครียดต่ำสุด G'_M เป็นความชันของกราฟในแผนภาพลิสซาจัสที่ตำแหน่ง $\gamma_0 = 0$ และมอดูลัสความเครียดสูงสุด G'_L เป็นเส้นตรงที่ลากจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่ความเครียดสูงสุด เมื่อ

$G'_M = G'_L = G'_1 = G'(\omega)$ ใน SAOS และ G'_1 คือ มอดูลัสความเครียดที่ $n=1$ ใน LAOS ซึ่งอยู่ในโดเมนของวัสดุวิสโคอีลาสติกเชิงเส้น ในทำนองเดียวกันความชันหนึ่งพลวัตที่อัตราเครียดต่ำสุด (Minimum-rate dynamic viscosity) η'_M และความชันหนึ่งพลวัตที่อัตราเครียดสูงสุด (Large-rate dynamic viscosity) η'_L นิยามโดย

$$\eta'_M \equiv \frac{d\tau}{d\dot{\gamma}} \bigg|_{\dot{\gamma}=0} = \sum_{n \text{ odd}} \frac{n}{\omega} G''_n (-1)^{(n-1)/2} = \nu_1 - 3\nu_3 + \dots \quad (77)$$

$$\eta'_L \equiv \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \bigg|_{\dot{\gamma}=\pm\dot{\gamma}_0} = \sum_{n \text{ odd}} \frac{G''_n}{\omega} = \nu_1 + \nu_3 + \dots \quad (78)$$

เมื่อ $\eta'_M = \eta'_L = \eta'_1 = \eta'(\omega)$ ใน SAOS ซึ่งอยู่ในโดเมนของวัสดุวิสโคอีลาสติกเชิงเส้น และ η'_1 คือความชันหนึ่งพลวัตที่ $n=1$ ใน LAOS และนิยามดัชนีบ่งชี้ความไม่เป็นเชิงเส้น (Index of Nonlinearity) แบบอัตราความเครียดเข้มข้น (Strain-stiffening Ratio) คือ

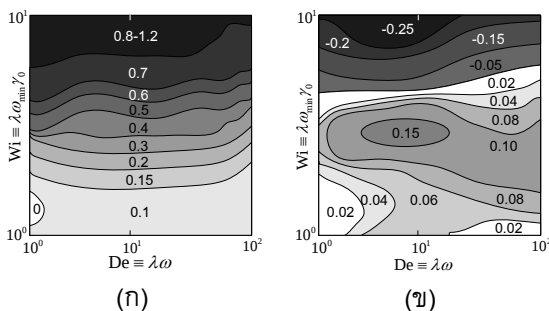
$$S \equiv \frac{G'_L - G'_M}{G'_L} = \frac{4e_3 + \dots}{e_1 + e_3 + \dots} \quad (79)$$

เมื่อ $S=0$ แสดงว่าวัสดุมีการตอบสนองแบบอีลาสติกเชิงเส้น (Linear Elastic Response) $S > 0$ บ่งชี้ว่าวัสดุมีความเค้นเพิ่มขึ้นตามความเครียด (Strain Stiffening) และ $S < 0$ บ่งชี้ว่าวัสดุมีความเค้นลดลงเมื่อความเครียดเพิ่มขึ้น (Strain Softening) และนิยามดัชนีบ่งชี้ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบอัตราความเค้นเข้มข้น (Shear-thickening Ratio) คือ

$$T \equiv \frac{\eta'_L - \eta'_M}{\eta'_L} = \frac{4\nu_3 + \dots}{\nu_1 + \nu_3 + \dots} \quad (80)$$



เมื่อ $T = 0$ แสดงว่าวัสดุมีการตอบสนองแบบความหนืดเชิงเส้น (Linear Viscous Response) $T > 0$ บ่งชี้ว่าวัสดุมีความเค้นเพิ่มขึ้นตามอัตราเครียด (Shear thickening) และ $T < 0$ บ่งชี้ว่าวัสดุมีความเค้นลดลงเมื่ออัตราเครียดเพิ่มขึ้น (Shear Thinning) ดังรูปที่ 4 แสดงเส้นเค้าโครง (Contour) ของดัชนีบ่งชี้ความไม่เป็นเชิงเส้นบนไดอะแกรมของพิพคินในโดเมน (De , Wi) ของกาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% ที่แสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 4 เส้นเค้าโครงดัชนีบ่งชี้ความไม่เป็นเชิงเส้นบนไดอะแกรมของพิพคินในโดเมน (De , Wi) (ก) อัตราความเครียดเข้มข้น S และ (ข) อัตราความเค้นเข้มข้น T ของกาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2%

รูปที่ 4 (ก) แสดงให้เห็นว่ากาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% มีพฤติกรรมตอบสนองแบบอีลาสติกเชิงเส้น (Linear Elastic Response) ที่ $De \sim 1$ และ $Wi \sim 1$ (มุมล่างด้านซ้ายของแผนภาพที่ $S \approx 0$) และแสดงพฤติกรรมที่ความเค้นไม่เป็นเชิงเส้นกับความเครียดในส่วนที่เหลือของแผนภาพ กล่าวคือพฤติกรรมที่เหลือทั้งหมดวัสดุจะมีความเค้นเพิ่มขึ้นตามความเครียด (Strain Stiffening) โดยไม่มีพฤติกรรมความเค้นลดลงเมื่อความเครียดเพิ่มขึ้นเลย (No

Strain Softening) ในขณะที่ยังรูปที่ 4 (ข) แสดงให้เห็นว่ากาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% มีพฤติกรรมความเค้นลดลงเมื่ออัตราเครียดเพิ่มขึ้น (Shear Thinning) ในช่วงบนของแผนภาพ ในขณะที่ $Wi \sim 7-8$ วัสดุจะมีดัชนีบ่งชี้ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบอัตราความเค้นเข้มข้น $T \approx 0$ ซึ่งจะแสดงพฤติกรรมการตอบสนองแบบความหนืดเชิงเส้น (Linear Viscous Response) และแสดงพฤติกรรมความเค้นเพิ่มขึ้นตามอัตราเครียด (Shear thickening) ในช่วงที่ $Wi < 7$ ตลอดช่วงของ De ที่ใช้ในการทดสอบ

ถึงแม้ว่าช่วงทดสอบของกาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% ในตัวอย่างนี้จะมีโดเมน (De , Wi) อยู่แค่ในช่วง $1 \leq De \leq 10$ และ $1 \leq Wi \leq 10$ ซึ่งเป็นช่วงที่ไม่กว้างมากนัก อาจจะเนื่องมาจากข้อจำกัดของเครื่องมือวัด หรืออาจจะในช่วงที่ใช้งานกาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% แต่อย่างไรก็ตามวิธีการจำแนกพฤติกรรมการไหลของวัสดุด้วยแผนภาพของพิพคินและพิกัดของอีโวลด์ ที่ได้จากการทดสอบเฉือนเป็นรอบ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการบ่งชี้พฤติกรรมของวัสดุอื่น ๆ ได้ด้วย

นอกจากนี้แล้ววิธีการจำแนกพฤติกรรมการไหลของวัสดุด้วยแผนภาพของพิพคิน และพิกัดของอีโวลด์ ที่ได้จากการทดสอบเฉือนยังอาจจะนำไปทำนายความไม่เป็นเชิงเส้นของวัสดุที่ขึ้นอยู่กับเวลา (Aging) และอุณหภูมิได้อีกด้วย ถ้าค่าอัตราความเครียดเข้มข้นของวัสดุ $S(t, \theta)$ และอัตราความเค้นเข้มข้นของวัสดุ $T(t, \theta)$ เป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับเวลา t และอุณหภูมิ θ



5. บทสรุป

การทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบ (Oscillatory Shear) สามารถแบ่งออกเป็นการทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบที่ความเครียดต่ำ (SAOS) $Wi \equiv \lambda \dot{\gamma}_0 = \lambda \omega \gamma_0 \leq 1$ ที่ซึ่งความเค้นเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นกับความเครียด และการทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบที่ความเครียดสูง (LAOS) $Wi \equiv \lambda \dot{\gamma}_0 = \lambda \omega \gamma_0 > 1$ ที่ซึ่งความเค้นจะเขียนอยู่ในรูปของอนุกรมค่าตอบของฟูรีเยร์ (Fourier Series Solutions) ที่จะประกอบไปด้วยชุดคำตอบหลาย ๆ ชุดรวมกัน โดยตัวแปรในการทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบ (Oscillatory Shear) ในบทความนี้ใช้ตามประกาศสมาคมรีโอโลยีแห่งสหรัฐอเมริกา และกล่าวถึงการทดสอบแบบเฉือนเป็นรอบที่เขียนอยู่ในรูปสมการเชิงซ้อนเพื่อใช้ในการศึกษาพฤติกรรมของพอลิเมอร์เหลวที่มีการรับแรงทางกลแบบพลวัต (Dynamic Mechanical Load) และในช่วงท้ายของบทความ ได้กล่าวถึงการจำแนกพฤติกรรมของกาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% ผ่านแผนภาพของพิพคิน และพิกัดของอีโวลด์ ที่ได้จากการทดสอบเฉือนเป็นรอบ แสดงให้เห็นว่าพฤติกรรมส่วนใหญ่ของกาวแซนเทนละลายในน้ำ 0.2% จะมีความเค้นไม่เป็นเชิงเส้นกับความเครียด ยกเว้นช่วงที่ $De \sim 1$ และ $Wi \sim 1$ ซึ่งสอดคล้องกับนิยามของความไม่เป็นเชิงเส้น ระหว่างความเค้นและความเครียด ในการทดสอบเฉือนเป็นรอบที่ความเค้นสูง (Large Amplitude Oscillatory Shear, LAOS) ที่กำหนดไว้ว่า $Wi \equiv \lambda \omega \gamma_0 > 1$ และในขณะเดียวกันความเค้นจะไม่เป็นเชิงเส้นกับอัตราเครียดด้วยยกเว้นช่วง $Wi \sim 7-8$

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] S. Wangchai, Finite Element Analysis of Heat Generation in Particle Filled Natural Rubber Vulcanizates During Cyclic Deformation, Master Thesis, King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Thailand. 2005. (in Thai)
- [2] S. Wangchai, C. Kositawong, and A. Chaikittiratna, Finite Element Simulation for Heat Built-up in Vulcanized Natural Rubber Subjected to Dynamic Load, The Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok, 2008, 18(3), 49-61. (in Thai).
- [3] S. Wangchai, C. Kositawong, and A. Chaikittiratna, Finite Element Analysis of Heat Generation in Particle Filled Natural rubber Vulcanizates During Cyclic Deformation, The Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok, 2011, 21(1), 754-762. (in Thai).
- [4] I.M. Ward and J. Sweeney, An Introduction to The Mechanical Properties of Solid Polymers, Chapter 7, 2nd ed., John Wiley & Sons, Ltd., West Sussex, UK, 2004.
- [5] W. Gleisler, Rate- or Stress-Controlled Rheometry, Chapter 12, Rheological Measurement, 2nd ed., Chapman and Hall, London & New York, USA, 1998, p.357-391.



- [6] K.S. Cho, *Viscoelasticity of Polymers: Theory and Numerical Algorithms*, Section 2.3, Chapter 5 and Chapter 11, Springer Series in Materials Science Vol. 241, Springer, Dordrecht. 2016.
- [7] C. Saengow, A.J. Giacomin, P.H. Gilbert and C. Kolitawong, Reflections on Inflections, *Korea-Australia Rheology Journal*, 2015, 27(4), 267-285.
- [8] Ad Hoc Committee on Official Nomenclature and Symbols, Official Symbols and Nomenclature of the Society of Rheology, *Journal of Rheology*, 2013, 57, 1047.
- [9] J.M. Dealy, Official Nomenclature for Material Functions Describing the Response of a Viscoelastic Fluid to Various Shearing and Extensional Deformations, *Journal of Rheology*, 1984, 28, 181.
- [10] J.M. Dealy, Official Nomenclature for Material Functions Describing the Response of a Viscoelastic Fluid to Various Shearing and Extensional Deformations, *Journal of Rheology*, 1995, 39, 253.
- [11] R.J. Poole, The Deborah and Weissenberg Numbers, *The British Society of Rheology, Rheology Bulletin*, 2012, 53(2), 32-39.
- [12] C. Saengow, A.J. Giacomin, and C. Kolitawong, Exact Analytical Solution for Large-Amplitude Oscillatory Shear Flow From Oldroyd 8-Constant Framework: Shear Stress, *Physics of Fluids*, 2017, 29(4), 043101.
- [13] C. Saengow and A.J. Giacomin Exact Solutions for Oscillatory Shear Sweep Behaviors of Complex Fluids from Oldroyd 8-Constant Framework, *Physics of Fluids*, 2018, 30, 030703.
- [14] P. Pongthong, C. Saengow, A.J. Giacomin, C. Kolitawong, D.M. Merger, and M. Wilhelm, Padé Approximation for Normal Stress Differences in Large-Amplitude Oscillatory Shear Flow, *Physics of Fluids*, 2018, 30(4), 040910.
- [15] J.M. Dealy, and K.F. Wissbrun, *Melt Rheology and its Role in Plastics Processing: Theory and Applications*, Section 5.7, Van Nostrand Reinhold, New York. 1990.
- [16] A.J. Giacomin and J.M. Dealy, Using large-amplitude oscillatory shear, Chapter 11, *Rheological Measurement*, 2nd ed., Chapman and Hall, London & New York, 1998, p.327-356.



- [17] C. Kolutawong, Local Shear Stress Transduction in Sliding Plate Rheometry, Section 4.2, Ph.D. Dissertation, The University of Wisconsin-Madison, USA, 2002.
- [18] J.D. Ferry, Viscoelastic properties of polymers, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., NY, USA, 1970.
- [19] J.G. Nam, K. Hyun, K.H. Ahn and S.J. Lee, Phase Angle of the First Normal Stress Difference in Oscillatory Shear Flow, Korea-Australia Rheology Journal, 2010, 22(4), 247-258.
- [20] C. Saengow and A.J. Giacomin, Normal Stress Differences from Oldroyd 8-Constant Framework: Exact Analytical Solution For Large-Amplitude Oscillatory Shear Flow, Physics of Fluids, 2017, 29, 121601.
- [21] C. Saengow, A.J. Giacomin, C. Kolutawong Exact Analytical Solution for Large-Amplitude Oscillatory Shear Flow, Macromolecular Theory and Simulations, 2015, 24(4), 352-392.
- [22] A.J. Giacomin, C Saengow, M Guay, C Kolutawong, Padé Approximants for Large-Amplitude Oscillatory Shear Flow, Rheologica Acta, 2015, 54, 679-693.
- [23] F.B. Hildebrand, Advanced calculus for applications, Chapter 10, 2nd ed., Prantice-Hall, Inc., NJ, USA. 1976.
- [24] F.A. Morrison, Understanding Rheology, Section 5.2.2.6, Oxford University Press, NY, USA, 2001.
- [25] [1] A.J. Giacomin and R.B. Bird, Erratum: Official Nomenclature of The Society of Rheology: $-\eta''$, Journal of Rheology, 2011, 55(4), 921-923.
- [26] G. Marin, Oscillatory Rheometry, Chapter 1, Rheological Measurement, 2nd ed., Chapman and Hall, London & New York, 1998, p.3-46.
- [27] A.C. Pipkin, Lectures in Viscoelastic Theory, Springer-Verlag, NY, USA, 1972.
- [28] N. Eiamnipon, P. Nimdum, J. Renard and C. Kolutawong, (2012) Low Velocity Impact Responses and Impact-Induced Damages on Steel Cord-Rubber Composite, ECCM-15th European Conference on Composite Materials, Proceedings, 1-6.
- [29] R.H. Ewoldt, A.E. Hosoi and G.H. McKinley, New Measures for Characterizing Nonlinear Viscoelasticity in Large Amplitude Oscillatory Shear, Journal of Rheology, 2008, 52, 1427.
- [30] R.H. Ewoldt, P. Winter, J. Maxey and G.H. McKinley, Large Amplitude Oscillatory Shear of Pseudoplastic and Elastoviscoplastic Materials, Rheologica Acta, 2010, 49, 191-212.



[31] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Applied Math. Series No. 55, U.S. Govt. Printing Office, Washington, D.C, USA, 1964, p.776.

[32] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, 9th printing, Dover, NY, USA, 1972, p.776.