การศึกษาค่าความหนาที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติในการสั่นสะเทือนแบบอิสระของเหล็กแผ่นบางปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน

A study of the thickness on the natural frequency in the free vibration of clamped - clamped steel plate

จิรวัฒน์ วรุณโรจน์[1]

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาและวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของเหล็กแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน กำหนดให้แบบจำลองมีคุณสมบัติเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน ความหนาแปรผันตั้งแต่ 1 มิลลิเมตร ถึง 50 มิลลิเมตร ความกว้างคงที่ 1 เมตร และความยาวคงที่ 1 เมตร โดยใช้การคำนวณทางทฤษฎีเปรียบเทียบกับวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือน ผลการวิจัยพบว่า ความหนาของเหล็กแผ่นบางมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือน ค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนจากวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่ามากกว่าวิธีการคำนวณทางทฤษฎีโดยเฉลี่ยประมาณ 8% ซึ่งการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนและค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น

คำสำคัญ : การสั่นสะเทือนแบบอิสระ, เหล็กแผ่นบาง, ความหนา, ค่าความถี่ธรรมชาติ

Abstract

This research studies and analyzes the free vibration of clamped - clamped steel plate. Material property of the model was a carbon steel. The thickness of 1-meter width by 1-meter length plate was varied from 1 millimeter to 50 millimeters. The comparison between theoretical calculations and finite element were discussed for analysis of vibration natural frequency. The result found that the thickness of steel plate affected the vibration natural frequency. The vibration natural frequency from finite element method was approximately 8% larger than that from theoretical calculations. The number of elements influenced the vibration natural frequency and tolerances.

Keywords : free vibration, steel plate, thickness, natural frequency

[1] อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

1. บทนำ

การสั่นของวัตถุที่เกิดขึ้นมีทั้งสิ่งที่ก่อให้เกิดประโยชน์ ในขณะเดียวกันการสั่นบางอย่างทำให้เกิดโทษ เช่น การสั่นที่เกิดขึ้นกับชิ้นส่วนเครื่องจักร หรือการพังทลายของสะพาน Tacoma Narrows Bridge เมื่อวันที่ 7 พฤศจิกายน ค.ศ. 1940 รวมไปถึงเหตุการณ์จากแผ่นดินไหวในปัจจุบันที่เกิดขึ้นบ่อยครั้งซึ่งสร้างความเสียหายต่อโครงสร้างและตัวของอาคารเป็นอย่างมาก

การสั่นสะเทือน (vibration) คือ การเคลื่อนที่ของวัตถุรอบๆ จุดสมดุลในห้วงเวลาหนึ่งของการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลนั้น ไม่ว่าจะเกิดขึ้นแบบซ้ำตัวเองหรือไม่ก็ตาม โดยผลของการสั่นสะเทือนนั้นทำให้เกิดการเคลื่อนที่ไปมา ซึ่งเรียกว่า “ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency)” โดยการสั่นสะเทือนแบบอิสระ (free vibration) คือ การสั่นของระบบในลักษณะที่หลังจากมีการรบกวนระบบที่หยุดนิ่งอยู่ที่จุดสมดุลครั้งแรกเพื่อให้เกิดการสั่นขึ้นแล้ว การสั่นนั้นจะดำเนินต่อไปโดยไม่มีแรงกระทำจากภายนอกมากระทำกับระบบอีกเลย อย่างไรก็ตามการหาค่าความถี่ธรรมชาติทั้งหมดของระบบไม่ใช่สิ่งจำเป็น เพราะค่าความถี่ธรรมชาติลำดับหลังๆ จะเป็นค่าที่มีความถี่สูงขึ้นเรื่อยๆ และอาจสูงเกินกว่าระบบที่ใช้งานอยู่นั้นซึ่งไม่มีทางที่จะได้รับแรงกระทำที่มีความถี่สูงเช่นนั้นได้เลย [1] ค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐาน (fundamental natural frequency) หรือค่าความถี่ธรรมชาติลำดับแรกที่เกิดขึ้นในการสั่นสะเทือนเป็นตัวแปรที่สำคัญในการวิเคราะห์และการประยุกต์ใช้ในเรื่องพลศาสตร์ของโครงสร้าง [7] การศึกษาผลของตัวแปรในการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจากวิธีของ Rayleigh-Ritz พบว่า ค่าอัตราส่วนมีผลต่อรูปร่างโหมดที่โหมดค่าความถี่ธรรมชาติเดียวกัน และเมื่อแผ่นบางมีอัตราส่วนที่สูงขึ้นสามารถที่จะนำไปใช้วิเคราะห์แทนแบบของคานได้ซึ่งให้ผลมีความแตกต่างกันไม่มากนัก [5] การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ถูกยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ซึ่งใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ พบว่าเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนเอลิเมนต์จะมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ [6] การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคาน เกี่ยวกับรูปทรงเรขาคณิตของคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน ซึ่งมีการแตกร้าวที่บริเวณด้านบน พบว่า การแตกร้าวมีอิทธิพลมาจากค่าความถี่ธรรมชาติและผลจากรูปร่างโหมด [4] การศึกษาวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่นโดยใช้ทฤษฎี Rayleigh-Ritz ร่วมกับโปรแกรม Matlab, วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์, ค่าคำนวณทางทฤษฎี และจากผลการทดลอง พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ในส่วนของการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (ANSYS) จะเป็นการคำนวณหาค่าที่ให้ความแม่นยำสูง [2]

ค่าความถี่ธรรมชาติซึ่งเป็นผลมาจากการสั่นสะเทือนของวัสดุจึงเป็นสิ่งสำคัญที่ผู้ออกแบบต้องคำนึงถึง ในปัจจุบันการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปเป็นวิธีที่นิยมเนื่องจากให้ผลคำตอบรวดเร็วและแม่นยำ จึงเป็นที่มาของวัตถุประสงค์ในการวิจัยเพื่อศึกษาผลของความหนาที่มีต่อค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่เกิดขึ้นในการสั่นสะเทือนแบบอิสระของเหล็กแผ่นบางปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน โดยใช้วิธีการคำนวณทางทฤษฎีหรือค่าผลเฉลยแม่นตรงเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรมสำเร็จรูป

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 การสั่นของแผ่นบาง

เป็นการพิจารณาการสั่นของระบบที่มีมิติความยาวสองมิติหรือก็คือ พิจารณาการสั่นของแผ่นบางนั่นเอง แผ่นบางที่จะกล่าวถึงในที่นี้หมายถึง วัสดุที่มีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับมิติด้านอื่นๆ ทำให้แผ่นบางไม่สามารถที่จะรับภาระโมเมนต์บิดได้ ซึ่งจะคล้ายกับกรณีเส้นเชือกไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดได้นั่นเอง โดยมีสมการหาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นบางจากทฤษฎีการสั่นของแผ่นบาง (Vibration of Plates) ของ S.P. Timoshenko [8] ดังสมการที่ 1, 2 และ 3

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (1)$$

$$\omega = \frac{\alpha}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (2)$$

$$D = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (3)$$

เมื่อ f = natural frequency (Hz)

ω = natural frequency (rad/sec)

α = constant depending on the mode

a = length of plate (m)

D = flexural rigidity of the plate

ρ = density (kg/m^3)

h = thickness of plate (m)

E = Young's modulus (N/m^2)

ν = Poisson's ratio

โดยค่า α ที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎี เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานขึ้นอยู่กับรูปร่างโหมด (Mode Shape) ดังแสดงในรูปที่ 1

α_1 = 14.10 α_2 = 20.56 α_3 = 23.91

รูปที่ 1 ค่า α ที่ใช้ในการคำนวณตามรูปร่างโหมด

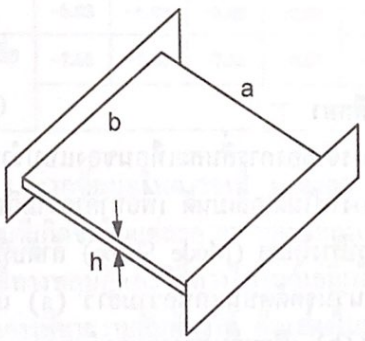
2.2 การวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์

ในการแก้ปัญหานั้นจะต้องประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ค่าผลเฉลยจะประกอบด้วยค่าตัวแปรต่างๆ ตามตำแหน่งบนเอลิเมนต์และลักษณะของปัญหา โดยมีหลักการคือทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่เป็นค่าอนันต์มาเป็นค่าโดยประมาณที่นับได้ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างๆ วิธีการดังกล่าวบอกเป็นนัยว่าผลเฉลยแต่ละเอลิเมนต์จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการและเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาในแต่ละปัญหา ซึ่งหมายความว่าวิธีนี้จะเริ่มพิจารณาทีละเอลิเมนต์ โดยทำการสร้างสมการแต่ละเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่บนรากฐานว่าสมการที่สร้างนั้นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ทำอยู่ จากนั้นนำสมการเหล่านั้นมาประกอบเป็นระบบสมการใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพก็คือการนำเอลิเมนต์เล็กๆ มาประกอบกันเป็นขนาดใหญ่ จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงบนสมการชุดใหญ่ แล้วทำการแก้สมการดังกล่าวซึ่งจะได้ผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งต่างๆ ของปัญหา จะเห็นได้ว่าค่าความแม่นยำของผลเฉลยขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้แก้ปัญหา และยังขึ้นอยู่กับการสมมุติรูปของฟังก์ชันประมาณภายในด้วย [3]

3. วิธีการศึกษา

3.1 กำหนดรูปร่างของแบบจำลอง

แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่เกิดขึ้นจากการสั่นสะเทือนแบบอิสระ มีลักษณะเป็นแผ่นบางถูกยึดแน่นที่ปลายทั้งสองด้าน มีขนาดความยาว (a) 1 m มีขนาดความกว้าง (b) 1 m โดยที่ความหนา (h) แปรผันตั้งแต่ 1 mm ถึง 50 mm ซึ่งแต่ละขนาดความหนาของแบบจำลองกำหนดตามขนาดความหนามาตรฐานของเหล็กแผ่นบางที่จำหน่ายในประเทศไทย โดยรูปร่างแบบจำลองแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 รูปร่างแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์

3.2 กำหนดคุณสมบัติทางกลของแบบจำลอง

กำหนดให้แบบจำลองเป็นเหล็กกล้าผสมคาร์บอน (Carbon Steel) มีคุณสมบัติทางกลเป็นแบบ Linear Isotropic ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (Young's modulus) $E = 210 \times 10^9$ N/m^2 ค่าความหนาแน่นของวัสดุ (Density) $\rho = 7850$ kg/m^3 และค่าอัตราส่วนพัวซอง (Poisson's ratio) $\nu = 0.29$

3.3 หาค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานจากระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์

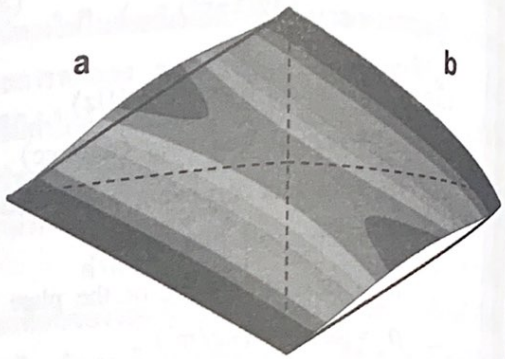
ทดสอบการสั่นสะเทือนของแบบจำลองโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (โปรแกรม ANSYS) ในการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ได้ทำการแบ่งเอลิเมนต์เป็นสี่เหลี่ยมด้านเท่า กำหนดให้ด้านความยาว (a) และด้านความกว้าง (b) มีจำนวนเอลิเมนต์เป็น 25, 50, 75, 100, 125 และ 150 เอลิเมนต์ เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานและรูปร่างโหมด ที่ค่าความหนาต่างๆ จำนวน 20 ค่า คือ 1, 1.2, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 19, 22, 25, 28, 32, 38 และ 50 mm

3.4 หาค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานจากการคำนวณทางทฤษฎี (ผลเฉลยแม่นตรง)

คำนวณจากทฤษฎีการสั่นของแผ่นบางในสมการที่ 1, 2 และ 3 เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่ค่าความหนาต่างๆ จำนวน 20 ค่า คือ 1, 1.2, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 19, 22, 25, 28, 32, 38 และ 50 mm

4. ผลการศึกษา

การจำลองการสั่นสะเทือนของแบบจำลองด้วยโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานจากรูปร่างโหมด (Mode Shape) ลำดับที่ 1 โดยพิจารณาจำนวนจุดตัดบนแกนความยาว (a) และแกนความกว้าง (b) เทียบกับสภาวะหยุดนิ่งของแบบจำลองให้เป็นโหมด (a,b) พบว่า รูปร่างโหมดที่เกิดขึ้นในการสั่นสะเทือน คือ โหมด (0,0) ดังแสดงในรูปที่ 3 และมีลักษณะเส้นการโค้งตัวเข้าหาจุดศูนย์กลางของแบบจำลองเป็นไปตามค่า α_2 ดังแสดงในรูปที่ 1 ทำให้การคำนวณทางทฤษฎีเพื่อหาค่าผลเฉลยแม่นตรงหรือค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่เกิดขึ้นพิจารณาใช้ค่า $\alpha = 20.56$



รูปที่ 3 รูปร่างโหมด (Mode Shape) ลำดับที่ 1 ที่เกิดขึ้นในการสั่นสะเทือนของแบบจำลอง

จากการคำนวณทางทฤษฎีการสั่นของแผ่นบางเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงเปรียบเทียบกับการจำลองการสั่นสะเทือนแบบอิสระของแบบจำลองด้วยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ในด้านความยาว (a) และด้านความกว้าง (b) มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐาน กล่าวคือเมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ในแต่ละด้านเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานมากขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 1 และทำให้ค่าคลาดเคลื่อนมากขึ้นตามไปด้วยเช่นกัน ดังแสดงในตารางที่ 2

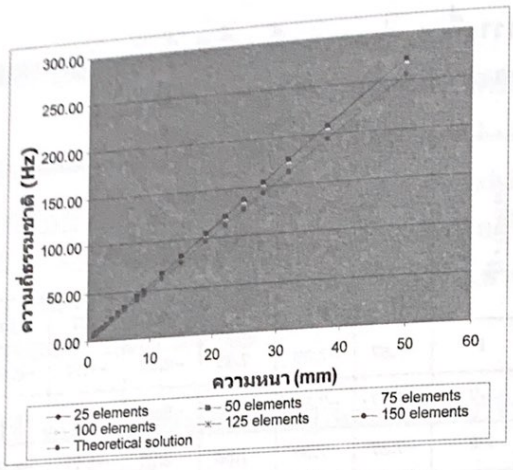
ตารางที่ 1 ค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานในแต่ละค่าความหนาของเหล็กแผ่นบาง

ความหนา (mm)	ความถี่ธรรมชาติพื้นฐาน (Hz)						
	วิธีทางทฤษฎี	วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (จำนวนเอลิเมนต์)					
		25	50	75	100	125	150
1	5.11	5.51	5.51	5.51	5.56	5.55	5.54
1.2	6.13	6.61	6.61	6.61	6.67	6.66	6.65
1.5	7.66	8.26	8.26	8.26	8.34	8.32	8.31
2	10.21	11.01	11.01	11.01	11.12	11.10	11.08
2.5	12.76	13.77	13.77	13.77	13.90	13.87	13.86
3	15.32	16.52	16.52	16.52	16.68	16.65	16.63
4	20.42	22.03	22.03	22.03	22.24	22.19	22.17
5	25.53	27.53	27.53	27.53	27.79	27.74	27.70
6	30.63	33.03	33.03	33.03	33.35	33.28	33.24
8	40.84	44.03	44.03	44.03	44.45	44.37	44.31
9	45.95	49.53	49.53	49.53	50.00	49.90	49.84
12	61.26	66.00	66.00	66.00	66.62	66.50	66.42
15	76.58	82.45	82.45	82.45	83.23	83.07	82.97
19	97.00	104.33	104.32	104.32	105.30	105.11	104.98
22	112.31	120.69	120.68	120.68	121.82	121.60	121.44
25	127.63	136.99	136.99	136.99	138.28	138.03	137.86
28	142.94	153.26	153.25	153.25	154.69	154.41	154.22
32	163.36	174.85	174.84	174.84	176.48	176.16	175.94
38	193.99	207.01	207.00	207.00	208.93	208.56	208.30
50	255.25	270.38	270.36	270.36	272.88	272.39	272.05

ตารางที่ 2 ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในแต่ละการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์

ความหนา (mm)	ค่าคลาดเคลื่อน (%)					
	จำนวนเอลิเมนต์					
	25	50	75	100	125	150
1	−7.87	−7.88	−7.88	−8.92	−8.71	−8.57
1.2	−7.87	−7.88	−7.88	−8.92	−8.71	−8.57
1.5	−7.87	−7.88	−7.88	−8.91	−8.71	−8.57
2	−7.87	−7.87	−7.87	−8.91	−8.71	−8.56
2.5	−7.87	−7.87	−7.87	−8.90	−8.70	−8.56
3	−7.87	−7.87	−7.87	−8.90	−8.70	−8.55
4	−7.86	−7.86	−7.86	−8.89	−8.68	−8.54
5	−7.85	−7.85	−7.85	−8.88	−8.67	−8.53
6	−7.84	−7.84	−7.84	−8.86	−8.66	−8.52
8	−7.82	−7.81	−7.81	−8.83	−8.63	−8.49
9	−7.80	−7.79	−7.79	−8.81	−8.61	−8.48
12	−7.74	−7.74	−7.74	−8.75	−8.56	−8.42
15	−7.67	−7.67	−7.67	−8.68	−8.48	−8.35
19	−7.56	−7.55	−7.55	−8.56	−8.36	−8.23
22	−7.46	−7.45	−7.45	−8.47	−8.27	−8.13
25	−7.34	−7.34	−7.34	−8.35	−8.15	−8.01
28	−7.22	−7.21	−7.21	−8.22	−8.02	−7.89
32	−7.03	−7.03	−7.03	−8.03	−7.83	−7.70
38	−6.71	−6.70	−6.70	−7.70	−7.51	−7.37
50	−5.93	−5.92	−5.92	−6.91	−6.71	−6.58
ค่าเฉลี่ย (%)	−7.55	−7.55	−7.55	−8.57	−8.37	−8.23
	−7.97					

จากข้อมูลในตารางที่ 1 ค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่เกิดขึ้นในแต่ละค่าความหนาของเหล็กแผ่นบางจากวิธีทางทฤษฎีและวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถพล็อตกราฟหาความสัมพันธ์ได้ ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติพื้นฐานและความหนาของเหล็กแผ่นบาง

จากรูปที่ 4 แสดงให้เห็นว่าค่าความหนาของเหล็กแผ่นบางทั้งจากวิธีทางทฤษฎีและวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่เกิดขึ้นในการสั่นสะเทือน กล่าวคือ เมื่อค่าความหนาเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งตารางที่ 1, 2 และรูปที่ 4 ยังแสดงให้เห็นว่าค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่ได้จากวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ให้ค่าสูงกว่าจากการคำนวณทางทฤษฎีหรือค่าผลเฉลยแม่นตรงโดยเฉลี่ยประมาณ 8%

จากนั้นทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากวิธีคำนวณทางทฤษฎี (ผลเฉลยแม่นตรง) โดยการนำค่าข้อมูลมาสร้างสมการเชิงเส้น เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานกับค่าความหนา ดังแสดงในสมการที่ 4

$$f = 5.105h + 0.0026 \qquad (4)$$

เมื่อ f = natural frequency (Hz)

h = thickness of the plate (mm)

สมการที่ 4 ใช้ทำนายค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่ค่าความหนาค่าใดๆ ได้ โดยหากทราบค่าความหนาของเหล็กแผ่นบางแล้วนำไปแทนค่าในสมการที่ 4 จะสามารถประมาณค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่เกิดขึ้นในการสั่นสะเทือนแบบอิสระของเหล็กแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านได้ โดยมีค่าคลาดเคลื่อนดังแสดงในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าของสมการที่ 4

ความหนา (mm)	ความถี่ธรรมชาติพื้นฐาน (Hz)		ค่าคลาดเคลื่อน (%)
	ผลเฉลี่ยแม่นตรง	การประมาณค่าจากสมการที่ 4	
1	5.105	5.108	-0.0492
1.2	6.126	6.129	-0.0407
1.5	7.658	7.660	-0.0322
2	10.210	10.213	-0.0237
2.5	12.763	12.765	-0.0186
3	15.315	15.318	-0.0152
4	20.420	20.423	-0.0110
5	25.525	25.528	-0.0084
6	30.631	30.633	-0.0067
8	40.841	40.843	-0.0046
9	45.946	45.948	-0.0039
12	61.261	61.263	-0.0025
15	76.576	76.578	-0.0016
19	96.997	96.998	-0.0009
22	112.312	112.313	-0.0006
25	127.627	127.628	-0.0003
28	142.943	142.943	-0.0001
32	163.363	163.363	0.0002
38	193.993	193.993	0.0004
50	255.255	255.253	0.0007
ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ย (%)			-0.0109

5. สรุป

จากการศึกษาและวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบอิสระของเหล็กแผ่นบางที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองด้านด้วยวิธีการคำนวณทางทฤษฎีเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงเปรียบเทียบกับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่เกิดขึ้นจากระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่ามากกว่าวิธีการคำนวณทางทฤษฎีโดยเฉลี่ยประมาณ 8% ซึ่งการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ในวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานและค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น กล่าวคือ เมื่อทำการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มมากขึ้นค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานและค่าคลาดเคลื่อนจะมากขึ้นตามไปด้วย และผลจากการศึกษาทั้งสองวิธีแสดงให้เห็นว่าค่าความหนาของเหล็กแผ่นบางส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานที่เกิดขึ้น กล่าวคือ เมื่อค่าความหนาเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการสั่นของแผ่นบาง [8] จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนาและค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐาน ทำให้ได้สมการความสัมพันธ์ที่ใช้ในการทำนาย หรือประมาณค่าความถี่ธรรมชาติพื้นฐานจากค่าความหนาของเหล็กแผ่นบางดังแสดงในสมการที่ 4 โดยมีค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าเฉลี่ย-0.0109 %

เอกสารอ้างอิง

[1] กนต์ธร ชำนิประศาสน์, 2545. **การสั่นทางกล**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า.

[2] เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต, 2548. **การวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของคานยื่น**. วิศวกรรมสาร ม.ข.; 32(6): 755-763.

[3] ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2537. **ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[4] Ei Bikri, K., Benamar, R., Bennouna, M.M., 2006. **Geometrically Non-Linear Free Vibration of Clamped - Clamped Beam with an Edge Crack**. Computer and Structures; 84: 485-502.

[5] Hyde, K., J.Y.Chang, C.Bacca, J.A.Wickert., 2001. **Parameter Studies for Plane Stress in Plane Vibration of Rectangular Plates**. Journal of Sound and Vibration; 247 (3): 471-487.

[6] Kobayashi.Y., 2005. **Reduced - Order Non-linear Modal Equations of Plates Based on the Finite Element Method**. [online] Available from: http://mech-me.eng.hokudai.ac. jp/~rd/labo/PDF/ Reduce.pdf (24 June 2012).

[7] Sundararajan.C., 2009. **Structural Vibration Frequency Analysis of Beams**. [online] Available from: URL: http://www.pdhengineer.com/Course%20Web/Structural %20Courses/structural_vibration_frequency_analysis.htm (11 June 2012).

[8] Weaver, W.JR., Timoshenko, S.P, D.H.Young., 1990. **Vibration Problems in Engineering**. Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc.