

**การพิจารณาค่าเฉลี่ยเป้าหมาย
สำหรับการผลิตปริมาณมากจากข้อกำหนด
สำหรับการแจกแจงสามัญในวิศวกรรมโยธา**

ก้อง กมลเลิศรา^{1*} และวินัย อวยพรประเสริฐ²
kong@asiagroup1999.com^{1*}, owinai@yahoo.com²

^{1*, 2} ภาควิชาวิศวกรรมโยธา วิทยาลัยวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยรังสิต

Received	: 12-Nov-2018
Revised	: 25-Feb-2019
Accepted	: 11-Mar-2019

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเสนอกลวิธีพิจารณาค่าเฉลี่ยเป้าหมาย สำหรับการผลิตจากข้อกำหนดของผลิตภัณฑ์ ให้เหมาะสมกับข้อมูลทางสถิติที่มีอยู่ในโรงงาน การพิจารณาค่าเฉลี่ย ขึ้นกับข้อกำหนด ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน และโอกาสที่ค่าตัวแปรจะไม่ต่ำกว่าข้อกำหนด ฟังก์ชันการแจกแจง และพารามิเตอร์รูปร่าง รวมถึงขั้นตอนการคำนวณได้ถูกสรุปไว้การแจกแจงต่าง ๆ ที่ใช้งานอย่างสามัญในวิศวกรรมโยธามี 11 ชนิด ผู้เขียนยังได้พัฒนาโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ MeanProd สำหรับคำนวณและสรุปรายการค่าเฉลี่ยสำหรับการแจกแจงดังกล่าว รวมถึงได้แสดงตัวอย่างการพิจารณาค่าเฉลี่ยกำลังอัดคอนกรีตที่เหมาะสมอีกด้วย

คำสำคัญ: ค่าเฉลี่ยกับข้อกำหนด การทดสอบภาวะเข้าสู่สภาวะ การแจกแจงแบบต่อเนื่อง การแจกแจงไม่ปกติ การผลิตปริมาณมาก

Determination of the Target Mean Values for Mass Production from the Specifications for Common Distributions in Civil Engineering

Kong Kamollertvara^{1*} and Winai Ouypornprasert²
kong@asiagroup1999.com^{1*}, owinai@yahoo.com²

^{1*, 2} Department of Civil Engineering, College of Engineering, Rangsit University

Received	: 12-Nov-2018
Revised	: 25-Feb-2019
Accepted	: 11-Mar-2019

Abstract

The objective of this technical paper was to propose an approach to determine the target mean values for mass production from the specified values suitable to statistical data available in the factory. The determination of the mean values was based on the specified values, the coefficient of variation and the chance that the values of the variable would be less than the specifications. Distribution functions and the corresponding shape parameters as well as calculation procedures were summarized for 11 functions commonly used in civil engineering. The author also developed a computer program MeanProd for calculating and summarizing mean values for all these distributions as well as showing an example to determine suitable mean values of the compressive strength of concrete.

Keywords: Mean Value and Specification, Goodness-of-Fit Test, Continuous Distribution, Non-normal Distribution, Mass Production.

1. บทนำ

สำหรับ การผลิตสินค้าปริมาณมากจากโรงงาน ให้มีคุณสมบัติตามข้อกำหนด ค่าคุณสมบัติเฉลี่ยที่สูงเกินไป ทำให้ต้นทุนการผลิตสูงเกินควร ในทางตรงกันข้ามค่าที่ต่ำเกินไป ก็เสี่ยงต่อการไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนด จากการศึกษาในอดีตพบว่า การควบคุมการผลิตที่ไม่ได้คุณภาพ จะส่งผลให้คุณสมบัติมีความแปรปรวนสูง ทำให้จำเป็นต้องเพิ่มค่าเฉลี่ยคุณสมบัติให้สูงขึ้น ส่งผลให้ต้นทุนการผลิตสูงเกินความจำเป็น ยิ่งไปกว่านั้น คุณสมบัติทางวิศวกรรม ยังมีแนวโน้มการแจกแจงเป็นแบบไม่ปกติ (non-normal distributions) [1-2] ดังเช่น การแจกแจงลอกปกติ การแจกแจงแกมมา การแจกแจงไวบูลล์ และการแจกแจงบีตา เป็นต้น ดังนั้น การทำนายค่าเฉลี่ย สำหรับการแจกแจงแบบไม่ปกติ เพื่อการผลิตปริมาณมาก จึงเป็นสิ่งที่ท้าทายมาก เนื่องจากการควบคุมความแปรปรวนของคุณสมบัติทางวิศวกรรม ขึ้นกับเทคโนโลยีที่ใช้ในการผลิต การทำนายในบทความนี้จะตั้งอยู่บนสมมติฐานว่า การแปรผันของคุณสมบัติทางวิศวกรรมเป็นปัจจัยคงตัว ขึ้นกับความสามารถในการควบคุมคุณภาพการผลิต

เนื้อหาในบทความนี้ ในบทที่ 2 จะเริ่มจากการทำนายค่าคาดหวัง ของคุณสมบัติทางวิศวกรรม สำหรับการแจกแจงปกติ หลังจากนั้น จะขยายผลให้สามารถใช้ได้ทั่วไปกับการแจกแจงไม่ปกติ ในบทที่ 3 จะแสดงตัวอย่างการทำนายค่าเฉลี่ยคอนกรีตสำหรับโรงงานผลิตคอนกรีตอัดแรง และการลดต้นทุนการผลิตโดยการควบคุมคุณภาพ ท้ายที่สุดบทสรุปและข้อเสนอแนะในบทที่ 4

2. การกำหนดค่าคาดหวังและเกณฑ์ขั้นต่ำของผลิตภัณฑ์

2.1. การแจกแจงปกติ

ตามปกติ ผู้ผลิตจำเป็นต้องกำหนดให้คุณสมบัติของผลิตภัณฑ์มีค่าคาดหวัง สูงกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ (ข้อกำหนด) ของผลิตภัณฑ์ ทั้งนี้ มักกำหนดให้ผลิตภัณฑ์มีโอกาสไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำน้อย ๆ ดังเช่น ไม่เกินร้อยละห้า สำหรับตัวแปรปกติ X หากกำหนดให้มีการแจกแจงปกติ (normal distribution) โดยมีค่าเฉลี่ย (mean - μ) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation - σ) ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (probability density function - $f_X(x)$) จะอยู่ในรูป

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1)$$

ฟังก์ชันการแจกแจง (distribution function - $F_X(x)$) จะได้จากการอินทิเกรต ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ดังแสดงข้างล่าง

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2)$$

สำหรับตัวแปรปกติมาตรฐาน (standard normal - Z) นิยามจาก

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (3)$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ($\phi(z)$) และฟังก์ชันการแจกแจง ($\Phi(z)$) ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

เป็นหนึ่งใน จะอยู่ในรูปสมการที่ (4) และ (5) ตามลำดับ

$$\varphi(z) = f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (4)$$

$$\Phi(z) = F_z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (5)$$

2.2. การกำหนดค่าเฉลี่ยคาดหวัง สำหรับตัวแปรปกติ

สำหรับการแจกแจงแบบปกติ สำหรับ ตัวแปร X ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (coefficient of variation - Ω) กำหนดจาก

$$\Omega = \frac{\sigma}{\mu} \quad (6)$$

ค่า z และ x ที่จะทำให้เกิดไม่ เกิน p สามารถคำนวณจากสมการที่ (7) และ (8) ตามลำดับ

$$z = \Phi^{-1}(p) \quad (7)$$

$$x = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p) \quad (8)$$

เนื่องจาก Ω เป็นผลมาจาก ความสามารถในการควบคุมคุณภาพการผลิต เราจึงอาจนิยามส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจาก สมการที่ (9)

$$\sigma = \Omega \cdot \mu \quad (9)$$

แทนค่า z จากสมการที่ (7) และ σ จากสมการที่ (9) ลงในสมการที่ (8) จะได้

$$x = \mu + \Omega \cdot \mu \cdot \Phi^{-1}(p)$$

หากกำหนดให้ x_{spec} เป็นเกณฑ์ขั้นต่ำ จากการจัดรูปใหม่จะได้

$$\mu = \frac{x_{spec}}{1 + \Omega \cdot \Phi^{-1}(p)} \quad (10)$$

ค่า $z = \Phi^{-1}(p)$ สำหรับ p ในช่วง 0.01 – 0.10 ดังสรุปในตารางที่ 1

เอกสาร ACI 214-57 ได้แนะนำให้ใช้ สมการในรูปแบบที่คล้ายคลึงกับสมการที่ (10) ตั้งแต่ ปี ค.ศ. 1957 สำหรับการทดสอบ คอนกรีตภาคสนาม เพื่อให้สามารถครอบคลุม พิสัยกำลังอัดคอนกรีต ได้อย่างกว้างขวาง [3] อย่างไรก็ตาม ในเอกสารอ้างอิงทางคอนกรีต เทคโนโลยี ดังเช่น [4-5] ได้แนะนำค่าเฉลี่ย สำหรับการออกแบบปฏิภาคส่วนผสมคอนกรีต ในรูปส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังสมการข้างล่าง

$$\mu = x_{spec} + k \cdot \sigma$$

เมื่อ k เป็นค่าคุณลักษณะ (Characteristic value) สำหรับ p เป็น 0.05 และ 0.01 ค่า คุณลักษณะจะเป็น 1.645 (เอกสารบางแหล่งใช้ 1.64 [4] บางแหล่งใช้ 1.65 [5]) และ 2.326 ตามลำดับ (ในเอกสารอ้างอิงใช้ 2.33)

ตารางที่ 1 ค่าคะแนนมาตรฐานสำหรับโอกาสต่ำกว่าค่ากำหนดต่าง ๆ กัน

$p(\%)$	$z = \Phi^{-1}(p)$
1	-2.326
2	-2.054
3	-1.881
4	-1.751
5	-1.645
6	-1.555
7	-1.476
8	-1.405
9	-1.341
10	-1.282

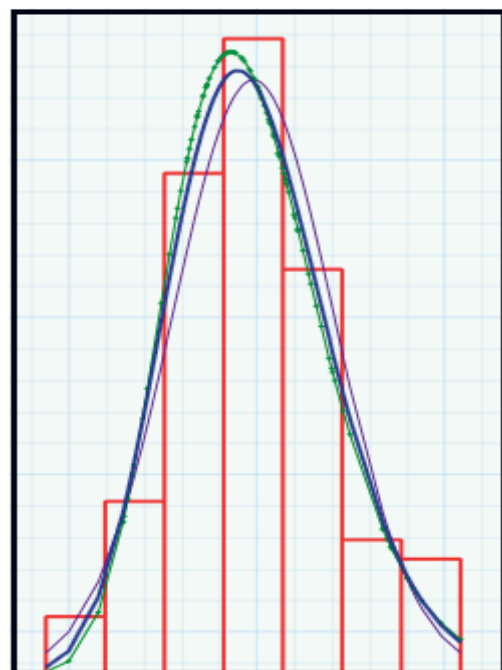
2.3. การกำหนดค่าเฉลี่ยคาดหวังสำหรับตัวแปรไม่ปกติ

2.3.1 ทัวไป

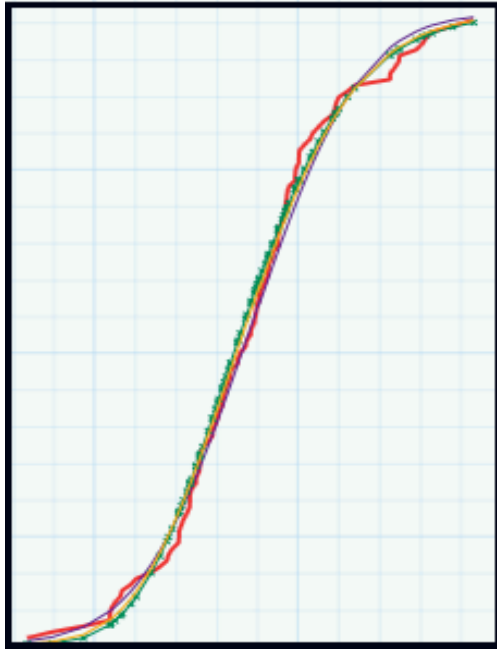
สำหรับงานทางวิศวกรรม มีตัวแปรจำนวนมากที่มีการแจกแจงแบบไม่ปกติ ดังเช่นในรูปที่ 1 และ 2 แสดงรูปแบบการแจกแจงที่กระชับเข้ากับข้อมูลที่จัดเก็บในโรงงานสำหรับกำลังอัดของคอนกรีตอายุ 1 วัน สำหรับฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น และฟังก์ชันการแจกแจงตามลำดับ รูปแบบการแจกแจงที่เข้ารูปสนิทกับข้อมูล เรียงจากมากไปหาน้อย ได้แก่ การแจกแจงแบบแกมมา การแจกแจงแบบลอการิทึม และการแจกแจงแบบปกติตามลำดับ

สำหรับบทความนี้ จะกล่าวถึงการพิจารณาค่าเฉลี่ยจากข้อกำหนด สำหรับรูปแบบการแจกแจงที่ใช้กันอย่างสามัญในวิศวกรรมโยธา เพิ่มเติมจากการแจกแจงปกติจำนวน 10 รูปแบบ ได้แก่ การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform Distribution) การแจกแจงแบบเลขชี้กำลังเลื่อน (Shifted Exponential Distribution) การแจกแจงแบบเรย์ลีฟเลื่อน

(Shifted Rayleigh Distribution) การแจกแจงค่าสูงสุดแบบกุ่มเบล (Gumbel-Type I-Largest Distribution) การแจกแจงค่าต่ำสุดแบบกุ่มเบล (Gumbel-Type I-Smallest Distribution) การแจกแจงลอการิทึม (Lognormal Distribution) การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) การแจกแจงค่าสูงสุดแบบเฟรเชต์ (Fréchet-Type II-Largest Distribution) การแจกแจงค่าต่ำสุดแบบไวบูลล์ (Weibull-Type III-Smallest Distribution) และการแจกแจงบีตา (Beta Distribution) สำหรับรูปแบบการแจกแจง พารามิเตอร์รูปร่าง และความสัมพันธ์กับค่าสถิติพื้นฐาน ผู้เขียนอ้างอิงมาจาก [1] นอกเหนือจากนั้น การวิเคราะห์ สูตร และขั้นตอนการหาค่าเฉลี่ย รวมถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับขอบเขตเนื้อหาในบทความนี้ ผู้เขียนเป็นผู้สร้างและพัฒนาขึ้นมาเองทั้งหมด



รูปที่ 1 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นกับฮิสโทแกรม



รูปที่ 2 ฟังก์ชันการแจกแจง
กับความถี่สัมพัทธ์สะสม

2.3.2 การแจกแจงแบบ
สม่ำเสมอ (Uniform Distribution)
ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ดัง
แสดงในสมการที่ (11)

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}; a \leq x \leq b \quad (11)$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าขอบเขตล่าง และขอบเขต
บน ตามลำดับ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบน
มาตรฐาน ดังแสดงในสมการที่ (12) และ (13)
ตามลำดับ

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad (12)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 \quad (13)$$

สำหรับการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ

$$p = \frac{x_{spec} - a}{b - a} \quad (14)$$

จากสมการ (14) เราจะได้ความสัมพันธ์
2 สมการ ดังแสดงข้างล่าง

$$a = \frac{x_{spec} - p \cdot b}{1 - p} \quad (15.a)$$

$$b = \frac{x_{spec} - a \cdot (1 - p)}{p} \quad (15.b)$$

เราสามารถเขียนสัมประสิทธิ์การแปร
ผัน จากสมการที่ (12) และ (13) ดังแสดงใน
สมการข้างล่าง

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{b-a}{a+b} \right)$$

สมการดังกล่าวสามารถเปลี่ยนรูปใหม่
เป็น

$$a = \left(\frac{1 - \sqrt{3} \cdot \Omega}{1 + \sqrt{3} \cdot \Omega} \right) \cdot b$$

เมื่อแทนค่า b จากสมการที่ (15.b) ลง
ในสมการข้างบน เราสามารถหาค่าขอบเขตล่าง
ได้จากสมการที่ (16)

$$a = \frac{c \cdot x_{spec}}{p + c \cdot (1 - p)} \quad (16)$$

$$\text{เมื่อ } c = \left(\frac{1 - \sqrt{3} \cdot \Omega}{1 + \sqrt{3} \cdot \Omega} \right)$$

หลังจากนั้น จะสามารถหาขอบเขตบน และค่าเฉลี่ย ได้จากสมการที่ (15.b) และ (12) ตามลำดับ

2.3.3 การแจกแจงแบบเลขชี้

ก ำ ล ัง เ ล ือ น (Shifted Exponential Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น มีรูป ดังแสดงในสมการที่ (17)

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}; \quad x \geq a \quad (17)$$

เมื่อ a เป็นขอบเขตล่าง (lower limit) และ λ เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง (shape parameter) มีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังแสดงในสมการที่ (18) และ (19) ตามลำดับ

$$\mu = \frac{1}{\lambda} + a \quad (18)$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (19)$$

โดยการอินทิเกรตสมการที่ (17) เราจะได้

$$1 - e^{-(x-a)} = \frac{p}{\lambda} = p \cdot \sigma$$

จัดรูปแบบสมการใหม่ได้

$$a = x_{spec} + \ln(1 - p \cdot \sigma) \quad (20)$$

แทนสมการที่ (19) ลงในสมการที่ (18) และใช้ความสัมพันธ์ $\sigma = \Omega \cdot \mu$ จะได้ และหา a ในรูปของพจน์ที่เหลือจะได้

$$a = \mu \cdot (1 - \Omega) \quad (21)$$

จากสมการที่ (20) และ (21) เราสามารถหาค่าเฉลี่ยได้จากสมการที่ (22)

$$\mu = \frac{x_{spec} + \ln(1 - p)}{1 - \Omega} \quad (22)$$

2.3.4 การแจกแจงเรย์ลีย์

(Rayleigh Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นมีรูปดัง สมการที่ (23)

$$f_X(x) = \frac{x-a}{\alpha^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^2\right); x \geq a \quad (23)$$

เมื่อ a เป็น ขอบเขตล่าง และ α เป็น พารามิเตอร์รูปร่าง มีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังแสดงในสมการที่ (24) และ (25) ตามลำดับ

$$\mu = \alpha \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} + a \quad (24)$$

$$\sigma = \alpha \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \quad (25)$$

โดยการอินทิเกรตสมการที่ (23) โดยตรงจะได้

$$1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_{spec}-a}{\alpha}\right)^2} = p$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$a = x_{spec} - \alpha \cdot \sqrt{-2 \ln(1 - p)} \quad (26)$$

เราสามารถหาสัมประสิทธิ์การแปรผัน โดยการหารสมการที่ (25) ด้วยสมการที่ (24)

และแทนค่า α จากสมการที่ (26) ลงไป จะทำให้หาพารามิเตอร์รูปร่าง α ดังแสดงในสมการที่ (27)

$$\alpha = \frac{\Omega \cdot x_{spec}}{2 - 0.5\pi + \Omega \cdot (\sqrt{0.5\pi} - \sqrt{-2\ln(1-p)})} \quad (27)$$

หลังจากนั้นจะหาค่าขอบเขตล่าง และค่าเฉลี่ย โดยใช้สมการที่ (26) และ (24) ตามลำดับ

2.3.5 การแจกแจงค่าสูงสุด ชนิดที่หนึ่งแบบกุ่มเบล (Gumbel - Type I - Largest Distribution)

เมื่อหาของการแจกแจงแม่ (mother distribution) $F_X(x)$ มีลักษณะแบบเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันการแจกแจงค่าสูงสุด y จะอยู่ในรูปดังแสดงในสมการที่ (28)

$$F_Y(y) = \exp[-e^{-\alpha(y-u)}]; -\infty < y < \infty \quad (28)$$

เมื่อ u เป็นฐานนิยม (mode) และ α เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง มีความสัมพันธ์กับ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานดังแสดงในสมการที่ (29) และ (30) ตามลำดับ

$$\mu = u + \frac{\gamma}{\alpha} \quad (29)$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \alpha} \quad (30)$$

เมื่อ γ เป็นค่าคงตัวออยเลอร์มีค่าเท่ากับ 0.5772156 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น อาจหาได้จากการหาอนุพันธ์สมการที่ (28) เทียบกับ y โดยตรง

โดยการแทนค่า โดยตรงในสมการที่ (28) และจัดรูปใหม่จะได้

$$\ln(-\ln(p)) = -\alpha(x_{spec} - u)$$

เขียน α ในรูป σ จากสมการที่ (30) หลังจากนั้นแทนผลที่ได้ ลงในสมการที่ (29) เพื่อหา u ในรูปพจน์ที่เหลือ เมื่อแทน α และ u ลงในสมการข้างบน เราสามารถหาค่าเฉลี่ยได้จากสมการที่ (31)

$$\mu = \frac{-c \cdot x_{spec}}{\ln(-\ln(p)) + \gamma - c} \quad (31)$$

$$\text{เมื่อ } c = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \Omega}$$

2.3.6 การแจกแจงค่าต่ำสุด ชนิดที่หนึ่งแบบกุ่มเบล (Gumbel - Type I - Smallest Distribution)

เมื่อหาของการแจกแจงแม่ (mother distribution) $F_X(x)$ มีลักษณะแบบเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันการแจกแจงค่าต่ำสุด z จะอยู่ในรูปดังแสดงในสมการที่ (32)

$$F_Z(z) = 1 - \exp[-e^{\alpha(z-u)}]; -\infty < z < \infty \quad (32)$$

เมื่อ u เป็นฐานนิยม (mode) และ α เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง มีความสัมพันธ์กับ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานดังแสดงในสมการที่ (33) และ (34) ตามลำดับ

$$\mu = u - \frac{\gamma}{\alpha} \quad (33)$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \alpha} \quad (34)$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น อาจหาได้จากการหาอนุพันธ์สมการที่ (32) เทียบกับ z โดยตรง

โดยการแทนค่า โดยตรงในสมการที่ (32) และจัดรูปใหม่จะได้

$$\ln(-\ln(1-p)) = \alpha(x_{spec} - u)$$

เขียน α ในรูป σ จากสมการที่ (34) หลังจากนั้นแทนผลที่ได้ ลงในสมการที่ (33) เพื่อหา u ในรูปพจน์ที่เหลือ เมื่อแทน α และ u ลงในสมการข้างบน เราสามารถหาค่าเฉลี่ยได้จากสมการที่ (35)

$$\mu = \frac{c \cdot x_{spec}}{\ln(-\ln(1-p)) + \gamma + c} \quad (35)$$

$$\text{เมื่อ } c = \frac{\pi}{\sqrt{6} \cdot \Omega}$$

2.3.7 การแจกแจงลอกปรกติ

(Log normal Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ดังแสดงในสมการที่ (36)

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]; x > 0 \quad (36)$$

เมื่อ λ และ ζ เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง มีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังแสดงในสมการที่ (37) และ (38) ตามลำดับ

$$\mu = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right) \quad (37)$$

$$\sigma^2 = \mu_x^2(e^{\zeta^2} - 1) \quad (38)$$

เราสามารถหาพารามิเตอร์รูปร่างทั้งสองได้โดยตรงจากสมการที่ (39) และ (40) ตามลำดับ

$$\zeta = \sqrt{\ln(\Omega^2 + 1)} \quad (39)$$

$$\lambda = \ln \mu_x - \frac{1}{2}\zeta^2 \quad (40)$$

เราสามารถหาค่าเฉลี่ยได้จากสมการที่ (41)

$$\mu = \frac{x_{spec}}{\exp(\zeta \cdot \Phi^{-1}(p))} \quad (41)$$

ค่าคะแนนมาตรฐาน $z = \Phi^{-1}(p)$ สามารถหาได้จากตารางที่ 1

2.3.8 การแจกแจงแกมมา

(Gamma Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น มีรูปดังแสดงในสมการที่ (42)

$$f_x(x) = \frac{v(vx)^{k-1} e^{-vx}}{\Gamma(k)}; x \geq 0 \quad (42)$$

เมื่อ v และ k เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง ในขณะที่ $\Gamma(\cdot)$ เป็นค่าของฟังก์ชันแกมมา มีรูปดังแสดงในสมการที่ (43)

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx; k > 0 \quad (43)$$

พารามิเตอร์รูปร่างทั้งสอง มีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังแสดงในสมการที่ (44) และ (45) ตามลำดับ

$$\mu = \frac{k}{v} \quad (44)$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{k}}{v} \quad (45)$$

เราสามารถหาค่าพารามิเตอร์รูปร่าง k จากสมการที่ (46)

$$k = \frac{I}{\Omega^2} \quad (46)$$

หลังจากนั้น ให้เราหาค่าพารามิเตอร์รูปร่าง v จากตัวแปรลดรูป x_{spec} ที่หาได้จาก $F^{-1}(p)$ ก่อน ค่า x_{spec} สำหรับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Ω) ในช่วง 0.01 – 0.30 และโอกาสต่ำกว่าค่ากำหนด (p) ในช่วง 0.01 – 0.10 ดังสรุปในตารางที่ 2 หลังจากนั้นจึงสามารถหาค่าเฉลี่ย โดยอาศัยสมการที่ (44) และสมการที่ (46) ได้ผลลัพธ์ดังสมการข้างล่าง

$$\mu = \frac{x_{spec}}{\Omega^2 \cdot v x_{spec}}$$

ตารางที่ 2 ค่าตัวแปรลดรูป x_{spec} สำหรับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Ω) และโอกาสต่ำกว่าค่ากำหนด (p) ต่างๆกัน

$\Omega(p\%)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.01	9768.837	9795.899	9812.788	9825.622	9836.085	9844.997	9852.816	9859.820	9866.192	9872.061
0.02	2395.155	2398.388	2406.810	2413.158	2418.330	2422.738	2426.607	2430.075	2433.232	2436.140
0.03	1035.040	1043.730	1049.269	1053.449	1056.857	1059.764	1062.317	1064.606	1066.691	1068.613
0.04	568.316	574.735	578.833	581.929	584.455	586.611	588.506	590.206	591.755	593.183
0.05	354.948	360.005	363.239	365.684	367.681	369.387	370.887	372.233	373.460	374.593
0.06	240.482	244.630	247.288	249.299	250.944	252.349	253.586	254.696	255.709	256.644
0.07	172.325	175.826	178.071	179.773	181.166	182.357	183.405	184.348	185.207	186.001
0.08	128.649	131.683	133.600	135.070	136.273	137.303	138.211	139.027	139.772	140.460
0.09	99.087	101.724	103.421	104.710	105.767	106.672	107.469	108.187	108.843	109.449
0.10	78.216	80.550	82.055	83.200	84.139	84.944	85.654	86.294	86.878	87.418
0.11	62.976	65.063	66.411	67.438	68.281	69.004	69.643	70.217	70.743	71.229
0.12	51.539	53.420	54.838	55.566	56.329	56.984	57.562	58.084	58.560	59.002
0.13	42.758	44.485	45.572	46.417	47.112	47.710	48.237	48.713	49.149	49.552
0.14	35.886	37.444	38.456	39.230	39.867	40.415	40.899	41.336	41.736	42.107
0.15	30.418	31.847	32.777	33.489	34.076	34.581	35.028	35.431	35.801	36.143
0.16	26.006	27.322	28.181	28.838	29.381	29.849	30.263	30.637	30.979	31.297
0.17	22.401	23.618	24.413	25.023	25.527	25.962	26.347	26.695	27.014	27.310
0.18	19.424	20.553	21.292	21.859	22.329	22.734	23.093	23.418	23.716	23.993
0.19	16.942	17.991	18.680	19.210	19.648	20.027	20.363	20.667	20.947	21.206
0.20	14.853	15.832	16.475	16.971	17.382	17.737	18.053	18.338	18.601	18.844
0.21	13.083	13.998	14.601	15.066	15.451	15.785	16.082	16.350	16.597	16.827
0.22	11.573	12.429	12.995	13.432	13.795	14.109	14.388	14.642	14.875	15.092
0.23	10.275	11.078	11.610	12.022	12.364	12.660	12.924	13.164	13.384	13.589
0.24	9.154	9.909	10.410	10.798	11.121	11.401	11.651	11.878	12.087	12.281
0.25	8.181	8.891	9.364	9.730	10.036	10.301	10.538	10.753	10.951	11.135
0.26	7.332	8.001	8.447	8.794	9.084	9.335	9.560	9.764	9.952	10.127
0.27	6.588	7.219	7.641	7.970	8.244	8.483	8.696	8.890	9.069	9.236
0.28	5.934	6.530	6.929	7.241	7.501	7.728	7.931	8.116	8.286	8.445
0.29	5.356	5.919	6.298	6.593	6.841	7.057	7.250	7.426	7.589	7.740
0.30	4.843	5.377	5.736	6.017	6.252	6.458	6.642	6.810	6.965	7.110

2.3.9 การแจกแจงค่าสูงสุด

ชนิดที่สองแบบเฟรเชต์ (Fréchet - Type II – Largest Distribution)

เมื่อหางของการแจกแจงแม่ $F_X(x)$ มีลักษณะแบบพหุนาม ฟังก์ชันการแจกแจงค่าสูงสุดแบบเฟรเชต์ สำหรับ y จะมีลักษณะดังแสดงในสมการที่ (47)

$$F_Y(y) = \exp \left[- \left(\frac{w}{y} \right)^m \right]; m > 0, w > 0, y > 0 \quad (47)$$

เมื่อ w และ m เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง โดย w จะพิจารณาขนาด ในขณะที่ m จะพิจารณารูปร่าง พารามิเตอร์รูปร่างทั้งสองมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นอาจได้จากการหาอนุพันธ์สมการที่ (47) เทียบกับ y โดยตรง ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานดังแสดงในสมการที่ (48) และ (49)

$$\mu = w \Gamma \left(1 - \frac{1}{m} \right) \quad (48)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\mu - \varepsilon} \right)^2 = \frac{\left\{ \Gamma \left(1 - \frac{2}{m} \right) - \Gamma^2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right\}}{\Gamma^2 \left(1 - \frac{1}{m} \right)}; m > 2 \quad (49)$$

ให้สังเกตว่า ในกรณีที่ $\varepsilon = 0$ ด้านซ้ายมือของสมการที่ (49) ก็คือ กำลังสองของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันนั่นเอง ในกรณีเช่นนี้ เราสามารถหาพารามิเตอร์รูปร่าง m จากการแก้สมการไม่เชิงเส้น รายละเอียดดังอภิปรายใน [2] หลังจากนั้นให้หาค่าเฉลี่ยจากสมการที่ (50)

$$\mu = x_{spec} \cdot (-\ln(p))^{\frac{1}{m}} \cdot \Gamma \left(1 - \frac{1}{m} \right) \quad (50)$$

2.3.10 การแจกแจงค่าต่ำสุดชนิดที่สามแบบไวบูลล์ (Weibull - Type III - Smallest Distribution)

เมื่อการแจกแจงแม่ $F_X(x)$ ถูกนิยามในช่วง $\varepsilon \leq x < \infty$ ในรูปของสมการที่ (51)

$$F_X(x) = a(x - \varepsilon)^m; -\infty < x < \infty, x \geq \varepsilon \quad (51)$$

ฟังก์ชันการแจกแจง สำหรับ z จะมีรูปดังแสดงในสมการที่ (52)

$$F_Z(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{z - \varepsilon}{v - \varepsilon}\right)^m\right]; z \geq \varepsilon, m > 0, v \geq \varepsilon \quad (52)$$

เมื่อ V และ m เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง โดย V จะพิจารณาขนาด ในขณะที่ m จะพิจารณารูปร่าง พารามิเตอร์รูปร่างทั้งสองมีความสัมพันธ์กับ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังแสดงในสมการที่ (53) และ (54)

$$\mu = \varepsilon + (v - \varepsilon)\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (53)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\mu - \varepsilon}\right)^2 = \frac{\left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right\}}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}; m > 0 \quad (54)$$

ให้สังเกตว่า ในกรณีที่ $\varepsilon = 0$ ด้านซ้ายมือของสมการที่ (54) ก็คือ กำลังสองของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันนั่นเอง ในกรณีเช่นนี้ เราสามารถหาพารามิเตอร์รูปร่าง m จากการแก้สมการไม่เชิงเส้น รายละเอียดดังอภิปรายใน [2] หลังจากนั้นให้หาค่าเฉลี่ยจากสมการที่ (55)

$$\mu = \frac{x_{spec}}{(-\ln(1-p))^{\frac{1}{m}}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (55)$$

2.3.11 การแจกแจงบีตา

(Beta Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสำหรับการแจกแจงแบบบีตา มีรูปดังสมการที่ (56)

$$f_X(x) = \frac{1}{B(q, r)} \frac{(x-a)^{q-1}(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}; a \leq x \leq b \quad (56)$$

เมื่อ a และ b เป็นขอบเขตล่าง และขอบเขตบนตามลำดับ ในขณะที่ q และ r เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง และ $B(q, r)$ เป็นฟังก์ชันบีตา นิยามด้วยสมการที่ (57)

$$B(q, r) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{r-1} dx = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} \quad (57)$$

พารามิเตอร์ทั้งสองมีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังแสดงในสมการที่ (58) และ (59)

$$\mu = a + \frac{q}{q+r}(b-a) \quad (58)$$

$$\sigma^2 = \frac{qr}{(q+r)^2(q+r+1)}(b-a)^2 \quad (59)$$

การหาพารามิเตอร์รูปร่าง อาจหาได้โดยการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นจำนวน 2 สมการ ดังแสดงในสมการที่ (60) และ (61) ดังอภิปรายใน [2]

$$\left(\frac{\sigma}{\mu - a}\right)^2 = \frac{r}{q \cdot (q+r+1)} \quad (60)$$

$$r = q \cdot \left[\frac{(b-a)}{(q+r) \cdot (\mu - a)} - 1 \right] \quad (61)$$

อย่างไรก็ตาม ในการหาค่าเฉลี่ยจำเป็นต้องอาศัยกระบวนการกระทำซ้ำ (iterative procedure) โดยอาศัยสมมติฐานว่า ค่าพารามิเตอร์รูปร่างทั้งสองมีค่าเหมือนการแจกแจงปีตาของตัวแปรที่ทราบค่า และมีคุณสมบัติทางสถิติใกล้เคียงกัน

2.4. โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ผู้เขียนได้พัฒนา โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MeanProd ภายใต้สิ่งแวดล้อมของซอฟต์แวร์ Mathcad Prime 3.0 สำหรับคำนวณค่าเฉลี่ยสำหรับรูปแบบการแจกแจงที่ใช้กันอย่างสามัญในวิศวกรรมโยธา จำนวน 11 รูปแบบ ดังกล่าวในหัวข้อที่ 2.3.1 เมื่อกำหนด ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Ω) ค่ากำหนด (x_{spec}) และโอกาสที่ตัวแปรจะมีค่าไม่มากกว่าค่ากำหนด (p) ทั้งนี้สำหรับการแจกแจงแบบปีตา จำเป็นต้องกำหนดค่าพารามิเตอร์รูปร่าง q และ r จากการแจกแจงต้นแบบที่คุณสมบัติทางสถิติใกล้เคียงกัน เพื่อเป็นจุดตั้งต้นสำหรับกระบวนการกระทำซ้ำ

3. ตัวอย่างการใช้งาน

สำหรับ การหล่อผลิตภัณฑ์คอนกรีตชนิดหนึ่ง ต้องการกำลังอัดของคอนกรีต ณ อายุ 1 วัน มีค่าไม่น้อยกว่า 250 กก./ตร.ซม. ในขณะที่ กำลังอัดของคอนกรีต ณ อายุ 7 วัน มีค่าไม่น้อยกว่า 350 กก./ตร.ซม. ผู้ออกแบบปฏิกิริยาส่วนผสมคอนกรีต จะต้องออกแบบให้กำลังอัดของคอนกรีตอายุ 1 วัน และ 7 วัน ไม่น้อยกว่าเท่าไร เพื่อให้โอกาสที่กำลังอัดของคอนกรีตที่ออกแบบ มีโอกาสต่ำกว่าค่าที่กำหนดไม่เกิน 5% ($p = 0.05$) เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของการผลิตกำลังอัดคอนกรีต ด้วยเทคโนโลยีปัจจุบัน เป็น 0.20 ผลการพิจารณาโดยใช้โปรแกรม MeanProd ดังสรุปในรูปที่ 3

ในเบื้องต้น เมื่อไม่มีข้อมูลรูปแบบการแจกแจงที่เหมาะสม อาจสมมติให้รูปแบบการแจกแจงกำลังอัดคอนกรีตเป็นแบบปกติ ทำให้

ต้องผลิตคอนกรีตอายุ 1 วัน และ 7 วันให้มีกำลังอัดไม่น้อยกว่า 372.6 และ 536.5 กก./ตร.ซม. ตามลำดับ

ต่อมาผู้ผลิตได้มีการเก็บข้อมูลทางสถิติพบว่า การแจกแจงที่เหมาะสมที่สุด สำหรับกำลังอัดคอนกรีต ได้แก่ การแจกแจงแบบลอการกิตี ทำให้ผู้ผลิตสามารถออกแบบปฏิกิริยาส่วนผสมคอนกรีต ให้กำลังอัดคอนกรีตอายุ 1 วัน และ 7 วัน ให้มีค่าลดลงเหลือ ไม่น้อยกว่า 346.3 และ 484.8 กก./ตร.ซม. ตามลำดับ หรือลดลงจากเดิม 7.06% และ 9.64% ตามลำดับ

หากผู้ผลิตต้องการใช้เทคโนโลยีใหม่ ในการผลิต เพื่อให้สามารถควบคุม สัมประสิทธิ์การแปรผันของกำลังอัดคอนกรีต ไม่เกิน 0.12 ผลการวิเคราะห์กำลังอัดของคอนกรีตอายุ 1 วัน และ 7 วัน โดยโปรแกรม MeanProd ดังสรุปในรูปที่ 4 ทำให้ผู้ผลิต สามารถออกแบบปฏิกิริยาส่วนผสมคอนกรีต ให้กำลังอัดคอนกรีตอายุ 1 วัน และ 7 วัน ในรูปแบบการแจกแจงแบบลอการกิตี ให้มีค่าลดลงเหลือเพียงไม่น้อยกว่า 304.3 และ 426.1 กก./ตร.ซม. ตามลำดับ หรือลดลงจากเดิม 18.33% และ 20.56% ตามลำดับ

Type Distr.	Spec.	
	250 ksc	350 ksc
Normal	372.6	536.5
Uniform	363.3	508.6
Exponential	312.4	437.4
Rayleigh	298.1	417.3
Gumbel Largest	338.3	473.7
Gumbel Smallest	398.8	558.4
lognormal	346.3	484.8
gamma	359.6	503.4
Fréchet	320.1	448.2
Weibull	386.4	541.0
beta	310.7	435.0

รูปที่ 3 ค่าเฉลี่ยกำลังอัดคอนกรีตเป้าหมายอายุ 1 วัน และ 7 วัน ($\Omega=0.20$)

Type Distr.	Spec.	
	250 ksc	350 ksc
Normal	311.5	436.1
Uniform	307.5	430.5
Exponential	284.0	397.7
Rayleigh	283.2	396.4
Gumbel Largest	296.4	415.0
Gumbel Smallest	322.1	451.0
lognormal	304.3	426.1
gamma	308.2	431.5
Fréchet	291.1	407.6
Weibull	319.9	447.8
beta	283.2	396.5

รูปที่ 4 ค่าเฉลี่ยกำลังอัดคอนกรีตเป้าหมายอายุ 1 วัน และ 7 วัน ($\Omega=0.12$)

4. สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

บทความนี้ผู้วิจัย

- 1) ได้สรุปฟังก์ชันการแจกแจง ที่ใช้งานงานอย่างสามัญสำหรับวิศวกรมโยธาจำนวน 11 รูปแบบ รวมถึงพารามิเตอร์รูปร่าง พร้อมทั้งการวิเคราะห์สูตรต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องใช้พิจารณาค่าเฉลี่ย จากค่ากำหนด และสัมประสิทธิ์การแปรผัน โดยให้ค่าตัวแปรมีโอกาสต่ำกว่าค่ากำหนดไม่เกินกว่าเกณฑ์ที่กำหนด
- 2) ได้พัฒนา โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MeanProd เพื่อคำนวณค่าเฉลี่ยสำหรับการแจกแจงทั้ง 11 ชนิด
- 3) สาธิตการประยุกต์ใช้งาน สำหรับการพิจารณาค่าเฉลี่ยขั้นต่ำ เพื่อการผลิตคอนกรีตที่เหมาะสม และแสดงการลดต้นทุนการผลิตโดยการใช้รูปแบบการแจกแจง ที่เหมาะสม และแสดงผลของการใช้เทคโนโลยีการผลิต เพื่อควบคุมให้ความแปรปรวนของคุณสมบัติผลิตภัณฑ์ให้น้อยลง
- 4) แนวคิดดังกล่าว อาจสามารถนำใช้งานพิจารณาค่าเฉลี่ย เพื่อการออกแบบผลิตภัณฑ์ปริมาณมาก ให้เหมาะสมยิ่งขึ้น

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ บริษัท เอเชียกรุป (1999) จำกัด ที่ให้เงินอุดหนุนการวิจัยแบบเต็ม และอนุเคราะห์ให้ใช้ซอฟต์แวร์ Mathcad Prime 3.0 Academic Edition นอกจากนั้น ยังขอขอบคุณ พนักงาน บริษัท เอเชียกรุป (1999) จำกัด ที่ช่วยจัดเตรียมข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Achintya H, Sankaran M. Probability, reliability and statistical methods in engineering design. New York: John Wiley & Sons; 2000.
- [2] Ouypornprasert W. Goodness-of-fit tests for common distributions in civil engineering. In Proceedings of the Conference on Computational Mathematics and Modeling (CMM2002), Organized by Mahidol University and Curtin University of Technology. 2002:117-126.
- [3] American Concrete Institute (ACI). Standard recommended practice for evaluation of compression test results of field concrete (ACI 214-57). 1957:1-19.
- [4] Neville AM, Brooks JJ. Concrete technology. Longman Scientific & Technical; 1987.
- [5] Gambhir ML. Concrete technology. 3rd ed. Tata McGraw Hill Education; 2004.