

การวิเคราะห์แผ่นบางบนฐานยืดหยุ่น

ดร.เอินทรชัย หอวิจิตร *

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงการใช้แปลงเกลทรานส์ฟอร์ม (Hankel Transforms) ในการวิเคราะห์แผ่นบางที่มีขนาดใหญ่มาก วางบนฐานยืดหยุ่น (Elastic Foundation) เมื่อถูกแรงกระทำเป็นจุดในแนวตั้ง ทำให้ได้ฟังก์ชันของการแอ่นตัว โมเมนต์และแรงเฉือน

Abstract

An analysis of infinitely large thin plate on elastic foundation subjected to a concentrated force is presented. Using Hankel transforms, the deflection function of the plate and the corresponding bending moments and shear force are obtained.

1. บทนำ

พื้นแผ่นบางเป็นองค์อาคารที่ใช้มากในอาคารทั่วไป เพื่อรับน้ำหนักบรรทุกในแนวตั้งจากกับพื้น และถ่ายน้ำหนักลงบนคานที่รองรับอยู่โดยรอบ หรือลงบนหัวเสาโดยตรง อีกลักษณะหนึ่งของการใช้พื้นแผ่นบางในการรับน้ำหนักบรรทุกคือการวางแผ่นบางบนดินที่อัดแน่น เช่น ถนนคอนกรีตเสริมเหล็ก รันเวย์ของสนามบิน พื้นในบริเวณโรงงาน เป็นต้น การวิเคราะห์แผ่นบางชนิดนี้อาจทำได้โดยการสมมุติให้ ดินอัดแน่นที่รองรับพื้นแบบนี้เป็นฐานรองรับแบบยืดหยุ่น กล่าวคือ แรงปฏิกิริยาจากฐานยืดหยุ่นจะเป็นสัดส่วนตรงกับระยะที่ฐานถูกกดหรือดึง ซึ่งเป็นลักษณะเดียวกับการยืดหดของสปริงนั่นเอง

Harding และ Sneddon [2] ได้แสดงวิธีการใช้แปลงเกลทรานส์ฟอร์มในการแก้ปัญหาทางอัสติซซี้ และ Sneddon [4] ก็ได้นำไปใช้แก้ปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน - (Axisymmetric Problem) ในขณะที่ Muki [3] สามารถประยุกต์วิธีนี้ใช้กับปัญหาที่ไม่มีความสมมาตรรอบแกน (Asymmetric Problem) บทความนี้ได้นำเอาเทคนิคการใช้แปลงเกลทรานส์ฟอร์ม

* ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

มาศึกษาหาผลซึ่งเกิดจากการกระทำของแรงเป็นจุด (Concentrated Force) บนแผ่นบางขนาดใหญ่
มากวางบนฐานยืดหยุ่น แผ่นบางในที่นี้จะหมายถึงแผ่นบางที่มีความหนาคงที่ มีคุณสมบัติเหมือนกันทั่ว
ทั้งแผ่น (Homogeneous) และที่แต่ละจุดมีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic) ปัญหานี้
Timoshenko และ Woinowsky-Krieger [5] ได้ศึกษาไว้แล้วโดยการใช้ทฤษฎีเบสเซลฟังก์-
ชัน (Theory of Bessel Functions)

2. สมการดิฟเฟอเรนเชียลของแผ่นบาง

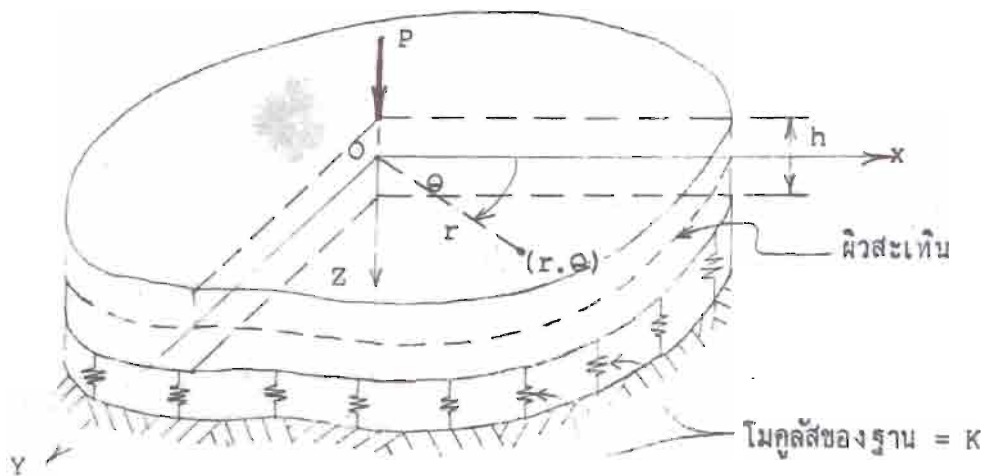
ในพิกัดโพลาร์ (Polar Coordinates) สมการดิฟเฟอเรนเชียลของแผ่นบางบนฐาน
ยืดหยุ่นคือ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \omega = \frac{q - k\omega}{D} \quad (1)$$

เมื่อ ω เป็นการแอ่นตัวของแผ่นบางที่ถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกทุกแผ่นกระจาย q D เป็นค่าความ
แกร่งเชิงคดของแผ่นบาง (Flexural Rigidity) ซึ่งมีค่าเป็น $Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ และ k
คือ โมดูลัสของฐานรองรับ (Modulus of Foundation) ซึ่งมีหน่วยเป็นแรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่คือ
หนึ่งหน่วยระยะการแอ่นตัว

ในกรณีนี้แผ่นบางมีขนาดใหญ่มาก ถูกกระทำด้วยแรง P ดังรูปที่ 1 เป็นปัญหาที่มีความ
สมมาตรรอบแกน นั่นคือ การแอ่นตัวของแผ่นบางจะแปรตามระยะ r เท่านั้น ไม่แปรตาม θ
ดังนั้น เทอม $\frac{\partial \omega}{\partial \theta}$ และ $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2}$ จึงเป็นศูนย์ทั้งหมด สมการ (1) กลายเป็น

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \omega = \frac{q - k\omega}{D} \quad (2)$$



รูปที่ 1 แผ่นบางขนาดใหญ่มากวางบนฐานยืดหยุ่น ถูกกระทำโดยแรง P

รูปที่ 1 แผ่นบางขนาดใหญ่มากวางบนฐานยืดหยุ่น ถูกกระทำโดยแรง P

3. ฟังก์ชันของแรงกระทำ (Loading Function)

เราสามารถเขียนฟังก์ชันของแรงกระทำเป็นจุดได้ดังนี้

$$q(r) = \frac{P}{2\pi r} \delta(r) \quad (3)$$

โดยที่ $\delta(r)$ คือ Dirac Delta Function ซึ่งมีนิยามเป็น

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & 0 < r < \epsilon \\ 0 & \epsilon < r < \infty, \quad \epsilon \rightarrow 0 \end{cases}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า สมการ (3) เป็นการเขียนฟังก์ชันแทนแรงกระทำเป็นจุด P. ด้วยแรงแผ่กระจาย $q(r)$ ซึ่งมีคุณสมบัติเหมือนกันมาก กล่าวคือ $q(r)$ จะเป็นศูนย์สำหรับทุกค่าของ r และที่บริเวณใกล้จุด 0 (เมื่อ $r < \epsilon, \epsilon \rightarrow 0$) $q(r)$ จะมีค่าสูงมาก แต่อย่างไรก็ตาม $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} q(r) r d\theta dr = P$

4. การใช้แรงแกลทราเนียนส์ฟอร์ม

แรงแกลทราเนียนส์ฟอร์มอันดับ α ของฟังก์ชันมีนิยามดังนี้

$$H_\alpha[f(ax); \rho] = \int_0^\infty x f(ax) J_\alpha(x\rho) dx$$

ในที่นี้ เราใช้แรงแกลทราเนียนส์ฟอร์มอันดับศูนย์ นั่นคือ

$$H_0[f(ax); \rho] = \int_0^\infty x f(ax) J_0(x\rho) dx \quad (4)$$

จากนิยามข้างบนนี้ ทำให้แรงแกลทราเนียนส์ฟอร์มมีคุณสมบัติที่สำคัญคือ

$$H_0\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \{x f(x)\}; \rho\right] = -\rho^2 H_0[f(x); \rho] \quad (5)$$

จากสมการ (2) เมื่อเราใช้แรงแกลทราเนียนส์ฟอร์มอันดับศูนย์ทั้งสองข้างของสมการ โดยอาศัยคุณสมบัติในสมการ (5) จะได้

$$\rho^4 \bar{w}(\rho) = \frac{1}{D} [\bar{q}(\rho) - k \bar{w}(\rho)] \quad (6)$$

โดยที่

$$\bar{w}(\rho) = H_0[w(r); \rho] = \int_0^\infty r w(r) J_0(r\rho) dr \quad (7.ก)$$

และ

$$\begin{aligned} \bar{q}(\rho) &= H_0[q(r); \rho] = \int_0^\infty r q(r) J_0(r\rho) dr \\ &= \int_0^\infty r \cdot \frac{P\delta(r)}{2\pi r} J_0(r\rho) dr \\ &= \frac{P}{2\pi} \end{aligned} \quad (7.ข)$$

โดยการจัดเทอมต่างๆในสมการ (6) และอาศัยสมการ (7.ข) เราจะได้ว่า

$$\bar{w}(\rho) = \frac{P}{2\pi D(\rho^4 + \lambda^4)} \quad (8)$$

เมื่อ $\lambda^4 = k/D$ ดังนั้น เราสามารถหาการแอนตัวของแผ่นบาง $w(r)$ ได้โดยอาศัยทฤษฎีการทรานส์ฟอร์มกลับของแรงแกล (Hankel Inversion Theorem) คือ

$$\begin{aligned} w(r) &= \int_0^\infty \rho \bar{w}(\rho) J_0(\rho r) d\rho \\ &= \frac{P}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho^4 + \lambda^4} J_0(\rho r) d\rho \end{aligned} \quad (9)$$

อินทิกรัลในสมการ (9) สามารถหาค่าได้จากหนังสือคู่มือการอินทิเกรต ซึ่งได้ผลดังนี้

$$w(r) = -\frac{P}{2\pi D\lambda^2} \text{kei}(\lambda r) \quad (10)$$

โดยที่ kei คือ เคลวินฟังก์ชันอันดับศูนย์ (Kelvin Function of Zero Order) ซึ่งสามารถหาค่าได้จากตารางในหนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ทั่วไป คำตอบที่ได้ในสมการ (10) นี้อยู่ในรูปเดียวกับที่ทำได้โดย Timoshenko เพราะ Woinowsky Krieger [5]

จากฟังก์ชันของการแอ่นตัวในสมการ (10) เราสามารถหาโมเมนต์และแรงเฉือนที่ตำแหน่งต่างๆของแผ่นบางได้ดังนี้

$$M_r = -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-\nu)}{\lambda r \sqrt{2}} \{ \text{kei}_1(\lambda r) - \text{ker}_1(\lambda r) \} - \text{ker}(\lambda r) \right] \quad (11 \text{ ก})$$

$$M_\theta = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-\nu)}{\lambda r \sqrt{2}} \{ \text{kei}_1(\lambda r) - \text{ker}_1(\lambda r) \} - \text{ker}(\lambda r) \right] \quad (11 \text{ ข})$$

และ $Q_r = \frac{P}{2\sqrt{2}\pi} [\text{kei}_1(\lambda r) + \text{ker}_1(\lambda r)] \quad (11 \text{ ก})$

เมื่อ ker_1 และ kei_1 คือ เคลวินฟังก์ชันอันดับหนึ่ง สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้ดูได้จาก Abramowitz และ Stegun [1]

5. สรุปและวิจารณ์

จากบทความนี้จะเห็นว่าการวิเคราะห์ปัญหานี้โดยการใช้แรงแกลทธานส์ฟอร์มทำได้ง่ายและสะดวก ทั้งยังเป็นวิธีมาตรฐานที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อนยิ่งกว่านี้ได้ แต่อย่างไรก็ตามวิธีนี้ต้องการพื้นฐานของคณิตศาสตร์สูงพอสมควร นอกจากนี้ ปัญหาที่จะต้องพบในการใช้วิธีนี้มีอยู่ 2 ขั้นตอน คือ

1. การเขียนฟังก์ชันของน้ำหนักบรรทุกหรือแรงที่กระทำ และ
2. การหาทรานส์ฟอร์มกลับนั่นคือ หาค่าอินทิกรัลในสมการ (9) นั้นเอง ในบาง

กรณีอาจจะต้องใช้วิธีหาอินทิกรัลนี้โดยประมาณ

เกี่ยวกับสภาวะของเขต (Boundary Conditions) จะสังเกตเห็นว่า $w(r)$ และ $\frac{dw}{dr}$ เป็นศูนย์ เมื่อ $r \rightarrow \infty$ ซึ่งสามารถเห็นได้ง่ายจากสมการ (9) ในกรณีที่จุด $r = 0$ จะได้ $\frac{dw}{dr} = 0$ และ w จะมีค่ามากที่สุดเป็น $\frac{P}{8D\lambda^2}$ เนื่องจาก $kei(0) = -\pi/4$

จากสมการ (11ก) จะเห็นว่าค่าโมเมนต์ที่จุด $r = 0$ ไม่ได้ เนื่องมาจากข้อจำกัดของทฤษฎีของแผ่นบาง จากทฤษฎีของแผ่นหนา (Theory of Thick Plates) ซึ่งทำการศึกษาโดย Westergaard[6] ได้คำนวณแรงค้ำที่ส่วนกลางของแผ่นพื้นดังนี้

$$(\sigma_r)_{\max} = 0.275(1+\nu) \frac{P}{h^2} \log_{10} \frac{Eh^3}{kb^4}$$

เมื่อ h เป็นความหนาของแผ่น และ

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{1.6c^2 + h^2} - 0.675h, & c < 1.724h \\ &= c, & c > 1.724h \end{aligned}$$

c เป็นรัศมีของวงกลมซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกทุกแผ่กระจาย ในกรณีนี้เป็นแรงกระทำเป็นจุดค่า c ก็เป็นศูนย์

จุดประสงค์ของบทความนี้เพียงเพื่อแสดงวิธีการวิเคราะห์แผ่นบางในลักษณะนี้โดยใช้แรงเกลทรานส์ฟอร์มเท่านั้น จึงมิได้แสดงค่าตัวเลขและกราฟไว้ด้วย ซึ่งหากผู้อ่านสนใจรายละเอียดก็สามารถหาได้จากหนังสืออ้างอิง [5]

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. พิสิทธิ์ การสุทธิ แห่งสถาบันเทคโนโลยี
แห่งเอเชีย สำหรับตารางอินทิกรัลของฟังก์ชันต่างๆ

สัญลักษณ์

E	อีลาสติก โมดูลัส
D	ความแรงเชิงคัตของแผ่นบาง
$M_r \quad M_\theta$	โมเมนต์ในทิศทาง r และ θ ต่อหนึ่งหน่วยความยาว
Q_r	แรงเฉือนในทิศทาง r ต่อหนึ่งหน่วยความยาว
h	ความหนาของแผ่นบาง
k	โมดูลัสของฐานรองรับ
$q(r)$	ฟังก์ชันของน้ำหนักบรรทุก แยกกระจาย
$\bar{q}(p)$	แปลงเกิลทรานส์ฟอร์มของ $q(r)$
$\omega(r)$	ฟังก์ชันของการแฉกตัวของแผ่นบาง
$\bar{\omega}(p)$	แปลงเกิลทรานส์ฟอร์มของ $\omega(r)$
λ	$^4\sqrt{k/D}$
v	อัตราส่วนปัวซอง

เอกสารอ้างอิง

- [1]. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, Washington, D.C.
 - [2]. Harding, J.W. and Sneddon, I.N., "The Elastic Stresses Produced by Indentation of the Plane Surface of a Semi-Infinite Elastic Solid by a Rigid Punch", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 41, 1945, pp. 16-26.
 - [3]. Muki, R., "Asymmetric Problems of the Theory of Elasticity for a Semi-Infinite Solid and a Thick Plate", Progress in Solid Mechanics, Vol. 1, Edited by I.N. Sneddon and R.Hill, Northland Holland Pub.Co., Amsterdam, Interscience Publishers Inc., New York, 1960, pp.399-439.
 - [4]. Sneddon, I.N., Fourier Transforms, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1951.
 - [5]. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959, pp. 259-281.
 - [6]. Westergaard, H.M., Ingeniøren, Vol. 32, 1923, p. 513.
-

อินทรชัย หอวิจิตร เกิดที่อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น เมื่อวันที่ 9 พฤษภาคม 2494 สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนขอนแก่นวิทยายน จังหวัดขอนแก่น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา พญาไท กรุงเทพมหานคร ได้รับปริญญา วศ.บ. (เกียรตินิยม) สาขาวิศวกรรมโยธา จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2515 ปริญญา M.Eng. และ D.Eng. จากสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชียเมื่อ พ.ศ. 2517 และ 2520 ตามลำดับ

เข้าทำงานเป็นอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมโยธาเมื่อ พ.ศ. 2520 ได้เลื่อนขั้นดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์เมื่อ พ.ศ. 2523 เคยไปฝึกอบรมทางด้านวิศวกรรมแหล่งน้ำที่ประเทศนิวซีแลนด์ระหว่าง พ.ศ. 2524-2525 เป็นเวลา 11 เดือน เคยเป็นหัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธาระหว่าง ต.ค. 2521-ก.ค. 2522 และเคยดำรงตำแหน่งรองคณบดีฝ่ายวิชาการระหว่าง 1 มิ.ย. 2526 ถึง 1 มี.ค. 2527

ดร.อินทรชัย หอวิจิตร สอนวิชาทางด้านวิศวกรรมโครงสร้าง และมีความสนใจทางสาขา Structural Mechanics และ Engineering Mathematics.