

วิธีลดระดับกับการหาค่าสัมประสิทธิ์

การไหลของ ORIFICE

โดย

สัจจะ เล็กบุตร *

ชาญ ปีเตอร์สัน **

บทคัดย่อ

บทความนี้เกี่ยวกับการวิเคราะห์ผลของความเฉื่อย (inertia) ที่มีต่อการหาค่าสัมประสิทธิ์การไหลของรู (orifice) ที่ติดอยู่ที่ก้นถังโดยวิธีลดระดับ ในวิธีลดระดับ ของเหลวจะถูกกักอยู่ในถังก่อนที่จะถูกปล่อยออกทางรู ข้อมูลการลดระดับกับเวลาจะถูกบันทึกไว้เพื่อใช้หาค่าสัมประสิทธิ์การไหล ผลของการวิเคราะห์ปรากฏว่า ความเฉื่อยมีความสำคัญเฉพาะในช่วงแรกๆ ของเหลวเริ่มลดระดับเท่านั้น และวิธีลดระดับสามารถนำมาใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์การไหลได้เป็นอย่างดี

* ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

** อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

ของไหล แล้วส่งต่อไปคำนวณ C_d อีกทีหนึ่ง ในเวลานั้น ขั้นตอนเหล่านี้จำเป็นเพราะยังไม่สามารถแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ควบคุมสภาพการไหลได้ ข้อแตกต่างที่สำคัญของบทความที่จะนำเสนอนี้คือเกี่ยวกับบทความที่กล่าวมา [1] ก็คือ ในบทความปัจจุบัน ได้เสนอวิธีแก้สมการควบคุมการไหล และใช้ประโยชน์จากการแก้สมการในการลดขั้นตอนการหา C_d จากการทดลองลงได้มาก

ทฤษฎี

เราจะพิจารณาดังและรูปร่างที่แสดงในรูปที่ 1 โดยสัญลักษณ์ต่าง ๆ มีความหมายดังนี้ H คือระดับของเหลวก่อนที่จะเปิดรู h คือระดับของเหลวที่กำลังลดลงที่เวลา t และ A คือพื้นที่หน้าตัดของถังซึ่งเป็นค่าคงที่ ในการเขียนสมการควบคุมการไหล จะต้องตั้งสมมติฐานดังต่อไปนี้

1. ระดับของเหลวในถังอยู่ในแนวระดับเสมอ
2. ไม่มีความเสียดระหว่างของเหลวกับถัง
3. ค่า C_d ไม่เปลี่ยนแปลงกับ h

ถ้าเราพิจารณาปริมาตรควบคุม (control volume) ของของเหลวที่เหลือนอยู่ในถัง จากกฎข้อสองของนิวตันจะได้ว่า

$$A(P_0 - P_1) + \gamma h A = - \frac{\gamma}{g} h A \frac{d^2 h}{dt^2} \quad (2)$$

ในสมการ (2) P_0 และ P_1 คือความดันบรรยากาศรอบ ๆ ถัง และความดันของของเหลวที่กันถังตามลำดับ และ γ คือค่าน้ำหนักจำเพาะ (specific weight) ของของเหลว ปริมาณด้านซ้ายมือของสมการ (2) คือแรงลัพธ์ในแนวตั้งที่กระทำกับของเหลวในปริมาตรควบคุม ในขณะที่ปริมาณด้านขวามือคือแรงเฉื่อยจากความเฉื่อย (inertia force) BURGREN [2] ได้เคยเขียนสมการคล้าย ๆ กันนี้สำหรับกรณีของถังที่ต่อกับท่อในแนวตั้งและระดับแทนที่จะเป็นรูเช่นในกรณีที่กำลังพิจารณาอยู่นี้

ค่าพลังงานที่สูญเสีย (head loss) ในการไหลผ่านรูเขียนได้ว่าเป็น

$$\frac{P_1 - P_0}{\gamma} = \frac{K}{2gR^2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

ในสมการ (3) $R = A_0/A$ โดยที่ A_0 คือพื้นที่เปิดของรู และ K คือค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียพลังงาน (head loss coefficient) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $1/C_d^2$ สำหรับกรณีของการไหลคงตัว (steady state condition) ถ้าถือได้ว่า K มีค่าคงที่เท่ากับกรณีการไหลคงตัวตลอดเวลาที่ระดับของเหลวในถังลดลง และถ้าใส่ $P_1 - P_0$ ในสมการ (2) และ (3) จะได้ว่า

$$h h'' - \frac{1}{2n} h'^2 + gh = 0 \quad (4)$$

ในสมการ (4), $n = R^2 C_d^2$ ซึ่งเป็นค่าคงที่และเป็นคุณสมบัติของถังและรู h' และ h'' คือ $\frac{dh}{dt}$ และ $\frac{d^2h}{dt^2}$ ตามลำดับ สมการ (4) เป็นสมการ nonlinear second order differential equation ในการแก้สมการ (4) เพื่อหา h ที่เป็นฟังก์ชันของ t จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข 2 ข้อ (initial condition) คือ

1. $h(t = 0) = H$
2. $h'(t = 0) = 0$

การแก้สมการ

ในการแก้สมการ (4) เราจะแบ่งออกเป็นสองช่วงคือ ช่วงแรกซึ่งเป็นช่วงที่ความเฉื่อยมีผลมาก และต้องนำมาคิดในการแก้สมการ และช่วงหลังซึ่งเป็นช่วงที่ผลของความเฉื่อยน้อยมากจนไม่ต้องนำมาคิด รายละเอียดในการแก้สมการทั้งสองช่วงแสดงอยู่ในภาคผนวก

ช่วงแรก : ความเฉื่อยต้องนำมาคิด

ในช่วงนี้ ความเร็วของผิวของเหลว (h') เริ่มเปลี่ยนจากศูนย์เป็นค่าค่าหนึ่ง เนื่องจากของเหลวมีมวล h' จะเปลี่ยนอย่างทันทีทันใดไม่ได้ เพราะจะทำให้ความเร่งมีค่าใกล้อนันต์ (infinity) ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นในช่วงนี้ความเฉื่อยจึงต้องนำมาคิด เนื่องจากขั้นตอนทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการแก้สมการ (4) สำหรับช่วงแรกนี้ค่อนข้างยาวและไม่สำคัญต่อผลของการนำไปใช้ในการหาค่า C_d จึงจะไม่นำมากล่าวในที่นี้

ผลของการแก้สมการจะได้ว่า

$$h(t) = H \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{(1-2n)g}{2nH}} t \right) \right]^{-\left(\frac{2n}{1-2n}\right)} \quad (6)$$

โดยที่ h ที่เป็นตัวฟังก์ชันของ t ในสมการ (6) จะเป็นไปตามเงื่อนไขที่ระบุไว้ในสมการ (5) และถูกต้องในช่วง $h = H$ หรือ $t = 0$

ช่วงหลัง : ไม่ต้องคิดความเฉื่อย

ในช่วงนี้ การเปลี่ยนแปลงของความเร็วของระดับของเหลวไม่มากนัก ทำให้ความเฉื่อยไม่ค่อยมีผล ซึ่งหมายความว่า เทอม h'' ในสมการ (4) ถือได้น้อยมากเมื่อเทียบกับ เทอมอื่น ๆ จนตัดทิ้งได้ ดังนั้นจากสมการ (4)

$$h' = -\sqrt{2ngh} \quad (7)$$

โดยที่เราเลือกค่าลบของรากเพราะว่าความเร็วของระดับของเหลวมีทิศทางตรงกันข้ามกับ h ในสิ่งที่กำลังพิจารณา จากการอินทิเกรต (integrate) สมการ (7) และเทียบผลที่ได้กับ สมการ (6) จะได้ว่า

$$h(t) = \left[2^{\left(\frac{n}{1-2n}\right)} \sqrt{H} - \sqrt{\frac{ng}{2(1-n)}} t \right]^2 \quad (8)$$

สรุป

สมการ (6) และ (8) คือ solution ของสมการ (4) โดยที่ในช่วงแรก ($h = H$ หรือ $t = 0$) ซึ่งเป็นขณะที่รูเพิ่งถูกเปิดออก การเปลี่ยนแปลงของระดับของเหลว จะเป็นไปตามสมการ (6) แล้วจึงต่อด้วย h ในสมการ (8)

สมการ (6) และ (8) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $1 - \sqrt{\frac{h}{H}}$ และ $\frac{t}{\sqrt{H}}$ ได้ดังนี้

$$1 - \sqrt{\frac{h}{H}} = 1 - \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{(1-2n)g}{2n}} \frac{t}{\sqrt{H}} \right) \right]^{-\left(\frac{n}{1-2n}\right)} \quad (6.1)$$

และ
$$1 - \sqrt{\frac{h}{H}} = 1 - 2^{\left(\frac{n}{1-2n}\right)} + \sqrt{\frac{ng}{2(1-n)}} \frac{t}{\sqrt{H}} \quad (8.1)$$

กราฟระหว่าง $1 - \sqrt{\frac{h}{H}}$ กับ $\frac{t}{\sqrt{H}}$ ที่ได้จากสมการทั้งสองสำหรับกรณี $n = 2.14 \times 10^{-6}$ แสดงอยู่ในรูปที่ 2

ข้อสังเกต

กราฟการเปลี่ยนแปลงของค่า $1 - \sqrt{\frac{h}{H}}$ กับ $\frac{t}{\sqrt{H}}$ ดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ 2 ประกอบด้วยสองส่วนคือ ส่วนแรก (ช่วงที่ระดับน้ำเริ่มลดลงจากค่า H) คือกราฟที่เริ่มจากจุดเริ่มต้นของแกนทั้งสอง (origin) ไปยังจุด A ซึ่งได้จากสมการ (6.1) และส่วนที่ 2 ซึ่งเป็นเส้นตรง (AB) ที่ได้จากสมการ (8.1) จากรูปขยายในบริเวณจุดเริ่มต้น จะเห็นว่ากราฟที่ได้จากสมการ (6.1) จะเข้าหาจุดเริ่มต้นอย่าง asymptotic กับแกน $\frac{t}{\sqrt{H}}$ และกราฟเส้นตรงที่ได้จากสมการ (8.1) จะตัดแกน $1 - \sqrt{\frac{h}{H}}$ ที่ค่า $1 - 2^{\left(\frac{n}{1-2n}\right)} (= -1.48 \times 10^{-6})$ และตัดแกน $\frac{t}{\sqrt{H}}$ ที่ค่า $\frac{2^{\left(\frac{n}{1-2n}\right)} - 1}{\sqrt{\frac{ng}{2(1-n)}}} (= 0.00046 \text{ วินาที/เมตร}^{1/2})$ การที่เส้นตรง AB ไม่ผ่านจุดเริ่มต้น

เป็นผลเนื่องจากความเฉื่อยที่ติดค้างไปในการโตมาของสมการ (8.1) จะเห็นได้ว่า ผลจากความเฉื่อยทำให้สมการ (8.1) เข้าใจว่า

1. ระดับของเหลวในตอนเริ่มต้น มีค่ามากกว่าค่าจริง กล่าวคือ ค่าระดับของเหลวที่สมการ (8.1) เห็นคือ $H 2^{\left(\frac{2n}{1-2n}\right)}$ ในขณะที่ค่าจริงคือ H
- หรือ 2. เวลาเริ่มต้นของการปล่อยของเหลวให้ออกจากถัง เกิดขึ้นหลังจากเริ่มต้นจริง กล่าวคือเวลาเริ่มต้นที่สมการ (8.1) เห็นคือ $2^{\left(\frac{n}{1-2n}\right)} \sqrt{\frac{2(1-n)H}{ng}}$ ในขณะที่ค่าจริงคือศูนย์

ในทางปฏิบัติ ค่าที่สมการ (8.1) เห็นในข้อ 1 และข้อ 2 มีค่าน้อยมาก จึงทำให้พูดได้ว่าเส้นตรง AB (สมการ 8.1) ผ่านจุดเริ่มต้น ความจริงที่ว่าค่าทั้งสองน้อยมากนี้อาจแสดง

ให้เห็นได้ดังต่อไปนี้ สมมติว่าเราพิจารณากรณีที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของรูมีค่าเท่ากับ
เศษหนึ่งส่วนสี่ของเส้นผ่าศูนย์กลางของถัง ซึ่งนับว่าเป็นรูที่มีขนาดใหญ่มากเมื่อเทียบกับถัง
ในกรณีนี้ $R = 0.111$ เนื่องจาก $n = R^2 C_d^2$ ถ้าสมมติให้ $C_d \approx 1$ จะได้ว่า $n \approx 0.012$,

$$1 - 2 \frac{\left(\frac{n}{1-2n}\right)}{\sqrt{\frac{ng}{2(1-n)}}} = -0.0088 \text{ และ } \frac{2 \left(\frac{n}{1-2n}\right) - 1}{\sqrt{\frac{ng}{2(1-n)}}} = 0.0356 \text{ วินาที/(เมตร)}^{1/2}$$

จึงอาจกล่าวได้ว่า ความเผื่อยมีค่าน้อยมากต่อการหาค่า C_d โดยวิธีลตระดับ

การทดลอง

ถังที่ใช้ในการทดลองมีขนาดตามที่แสดงอยู่ในรูปที่ 3 ของเหลวที่ใช้ในการทดลองคือ
น้ำ ระดับน้ำในตอนแรก (H) มีค่า 57 ซม. ในการบันทึกค่าระดับน้ำในถังกับเวลา ทำได้
ง่าย ๆ โดยกำหนดเวลาไว้ก่อน ผู้ทดลองมีสองคน คนหนึ่งเป็นคนบอกเวลา อีกคนหนึ่งคอยขีด
ระดับน้ำในถังลงบนแถบกระดาษที่ปะไว้ข้างถังตามเวลาที่คนบอกเวลาจะบอก (เช่น ทุก ๆ 5 วินาที)
เมื่อเสร็จสิ้นการทดลองแล้วจึงเอาแถบกระดาษมาวัดเพื่อหาความสูงของระดับน้ำ (โดยเทียบกับระดับ
รู) โดยวิธีนี้จะบันทึกค่า h และ t ได้หลายค่า

จากการทดลองโดยวิธีปกติพบว่า $C_d = 0.745$ ดังนั้น $n = 2.14 \times 10^{-6}$
กราฟความสัมพันธ์ทางทฤษฎีระหว่าง $1 - \sqrt{\frac{h}{H}}$ กับ $\frac{t}{\sqrt{H}}$ ที่ได้จากสมการ (8.1) สำหรับกรณีนี้แสดง
อยู่ในรูปที่ 2 จุดที่ได้จากการทดลองโดยวิธีลตระดับก็แสดงอยู่ในรูปที่ 2 ด้วย ซึ่งจะเห็นว่าสมการ
(8.1) มีความถูกต้องใช้ได้

อย่างไรก็ตาม การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำในช่วงแรก (ช่วงที่ความเผื่อยมีความ
สำคัญ) ตามที่ระบุไว้ในสมการ (6) จะใกล้เคียงความจริงหรือไม่นั้น บทความนี้ไม่สามารถจะ
พิสูจน์ได้ เนื่องจากการพิสูจน์ต้องการเครื่องมือบันทึกระดับน้ำที่มีความเที่ยงตรงมาก แต่การพิสูจน์
สมการ (6) ก็ไม่ค่อยมีความสำคัญนักในแง่ของการใช้วิธีลตระดับในการหา C_d ซึ่งเป็นจุดมุ่งหมาย
สำคัญของบทความนี้

การนำไปใช้งาน

ในสมการ (8.1) เนื่องจาก $1 - 2^{\left(\frac{n}{1-2n}\right)}$ มีค่าน้อยมากจนเกือบเท่าศูนย์ในกรณีส่วนมาก ดังนั้นจึงเขียนสมการ (8.1) ได้ว่าเป็น

$$1 - \sqrt{\frac{h}{H}} = \beta \frac{t}{\sqrt{H}} \quad (9)$$

โดยที่
$$\beta = \sqrt{\frac{ng}{2(1-n)}} \quad (10)$$

เนื่องจาก β เป็นค่าคงที่สำหรับถังและรูชุดหนึ่ง ๆ สมการ (9) บอกเราว่า ถ้าพล็อต $1 - \sqrt{\frac{h}{H}}$ กับ $\frac{t}{\sqrt{H}}$ จะได้ความสัมพันธ์ที่เป็นเส้นตรงผ่านจุดเริ่มต้นที่มีความชัน β ซึ่งถ้ารู้ β จะทำให้สามารถคำนวณค่า C_d ได้จากความสัมพันธ์ในสมการ (10) และ $n = R^2 C_d^2$ หรือ

$$C_d = \frac{\sqrt{2}}{R \sqrt{2 + \frac{g}{\beta^2}}} \quad (11)$$

ตัวอย่าง

ถ้าสมมุติว่าเราต้องการหาค่า C_d ของถังและรูในรูปที่ 3 โดยวิธีลดระดับ ในการนี้เราจะทำการทดลองโดยใช้ค่า H หลาย ๆ ค่า คือ 30, 40 และ 50 ซม. ค่า h และ t ที่ได้จากการทดลองเหล่านี้จะถูกนำมาคำนวณค่า $1 - \sqrt{\frac{h}{H}}$ และ $\frac{t}{\sqrt{H}}$ แล้วนำมาพล็อตดังแสดงอยู่ในรูปที่ 4 จากนั้นเราจะลากเส้นตรงเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของจุดที่ได้จากการพล็อตโดยเส้นตรงนี้จะผ่านจุดเริ่มต้นของแกนด้วย จากกราฟเส้นตรงเราจะสามารถคำนวณความชัน (β) และคำนวณค่า C_d ได้จากสมการ (11) ค่า C_d ที่ได้นี้ (0.747) คือค่า C_d ที่ได้จากการหาโดยวิธีลดระดับ ซึ่งนับว่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการหาโดยวิธีปกติ (0.745)

สรุป

จากการศึกษาทั้งทางทฤษฎีและการทดลองเกี่ยวกับวิธีหาค่า C_d โดยวิธีลดระดับ พบว่า

1. ความเฉื่อย (inertia) จะมีผลกับในช่วงแรกของการลดระดับเท่านั้น

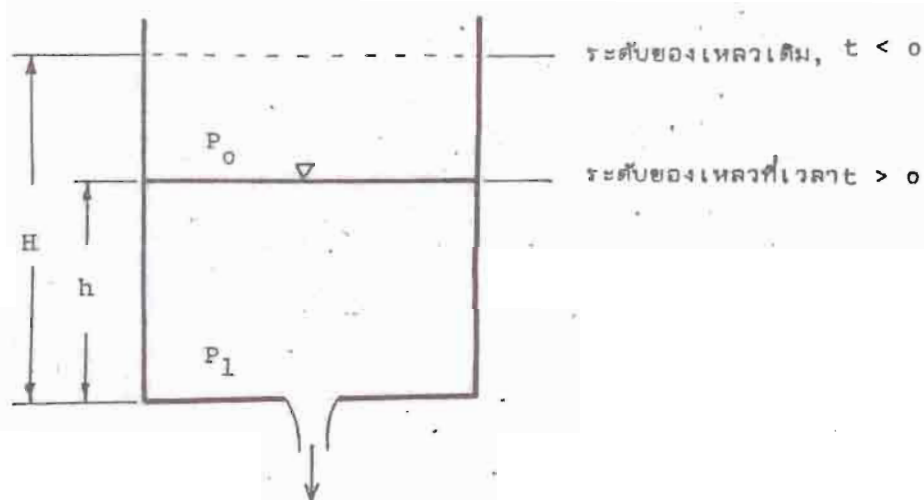
2. ความสำคัญของความเฉื่อยในข้อ 1. มีผลน้อยมากต่อการหาค่า C_d โดยวิธีลดระดับ และตังนั้น
3. วิธีลดระดับจึงสามารถนำมาใช้ในการหาค่า C_d ได้เป็นอย่างดี

คำขอบคุณ

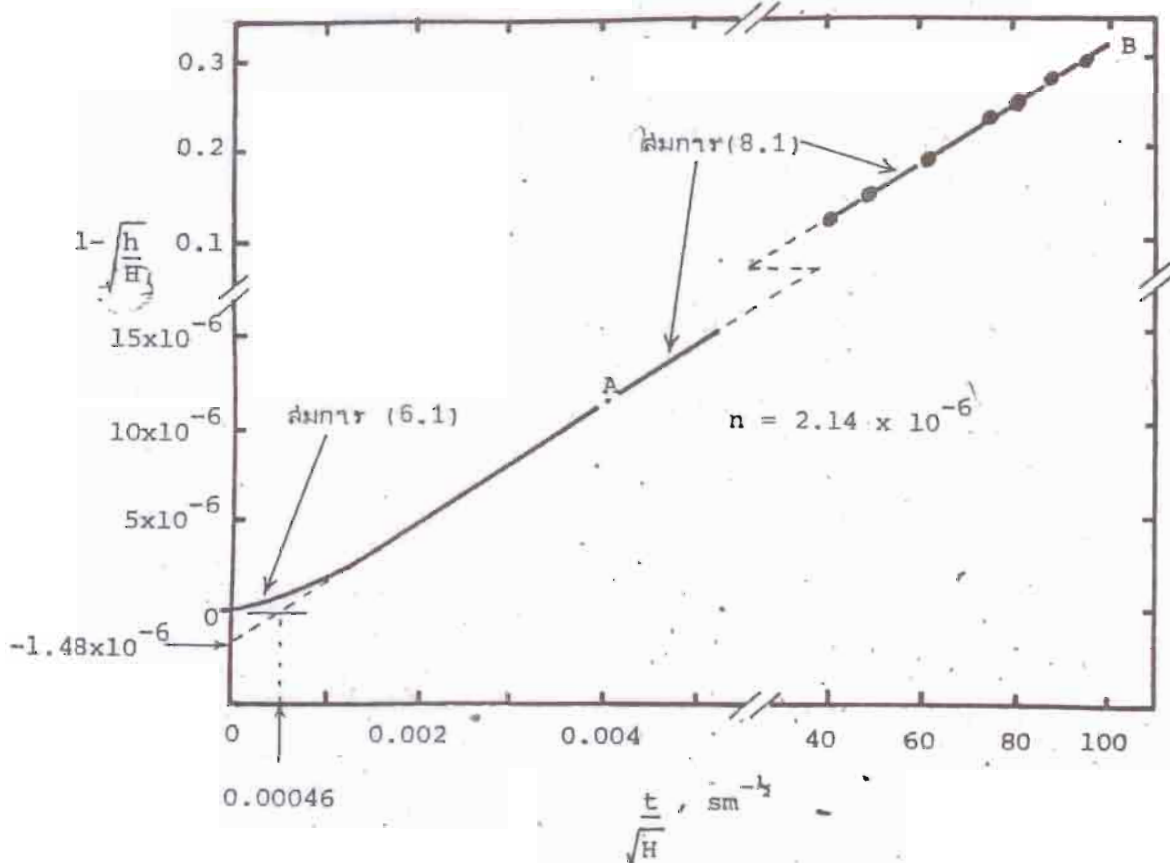
บทความนี้ เป็นผลของการศึกษาและวิจัย ซึ่งทำที่คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น โดยได้ใช้เครื่องมือที่สร้างขึ้นจากเงินค่าวัสดุของ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล ข้อมูลที่ได้จากการทดลองเป็นผลจากแรงงานของนักศึกษาปี 4 ล่องม่าน ดังที่ได้อ้างไว้ในเอกสารอ้างอิง (3) ซึ่งผู้เขียนเป็นผู้ควบคุม

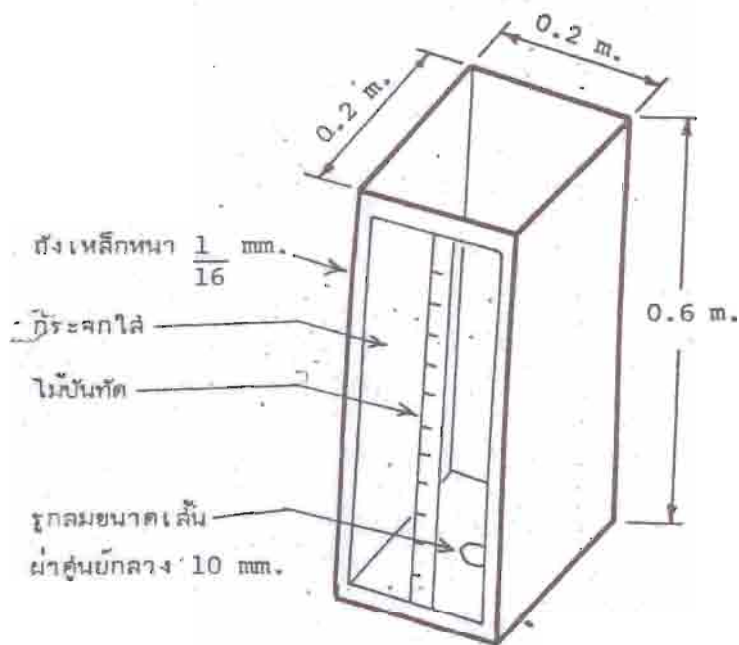
เอกสารอ้างอิง

1. สัตตะ เล็กบุตร : การ calibrate ตั้งและ orifice โดยวิธี falling head, วิศวกรรมสาร แห่งประเทศไทย เมษายน 2521
2. BURGREN, David : Development of Flow in Tank Draining, J of Hydraulic Division, Proc ASCE, HY 3, March 1960
3. บุญโชค ภิริฎชัย และ อารักษ์ ศรีสกุลเดี่ยว : Falling Head Calibration of Orifices, Project Report No M77-6, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เมษายน 2520

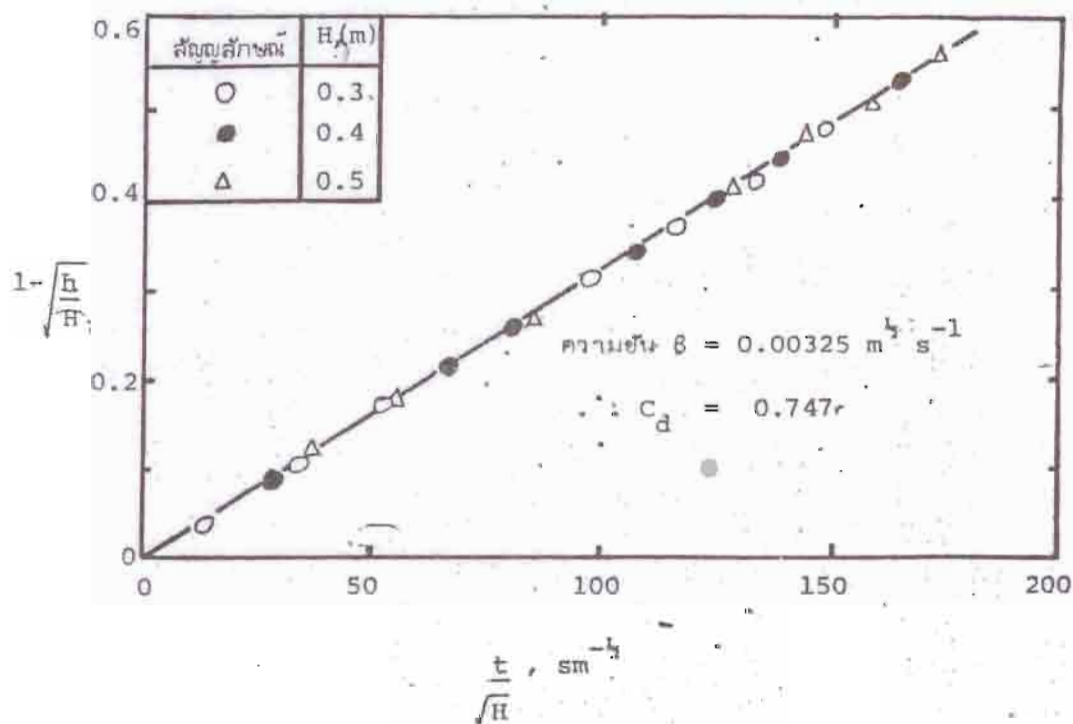


รูปที่ 1 การลดระดับของของเหลวในถัง

รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $1 - \sqrt{\frac{h}{H}}$ กับ $\frac{t}{\sqrt{H}}$ สำหรับ $n = 2.14 \times 10^{-6}$



รูปที่ 3 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง



รูปที่ 4 ผลการทดลอง

ภาคผนวก

วิธีที่ใช้ในการแก้สมการ

ในการแก้สมการ

$$h h'' - \frac{1}{2n} h'^2 + gh = 0 \quad (4)$$

เพื่อหา $h(t)$ ให้เป็นไปตามเงื่อนไข

$$\begin{aligned} 1. \quad h(0) &= H \\ \text{และ} \quad 2. \quad h'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

เราจะแบ่งออกเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงแรก ในช่วงนี้ $h \approx H$ หรือ $t \approx 0$ เราใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรจาก h เป็น p โดยที่

$$p = h^a \quad (\text{ผ.1})$$

ในสมการ (ผ.1) ทั้ง h และ p เป็นฟังก์ชันของ t และ a เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง ดังนั้น
สมการ (4) จึงเขียนได้เป็น

$$\frac{p''}{ap} - (a - 1 + \frac{1}{2n}) \left(\frac{p'}{ap}\right)^2 + \frac{g}{p^{1/a}} = 0$$

เราจะเลือกค่า a เพื่อที่ค่า $a - 1 + \frac{1}{2n}$ ในสมการข้างบนเป็นศูนย์

$$\text{ดังนั้น} \quad a = \frac{2n - 1}{2n} \quad (\text{ผ.2})$$

และสมการ (4) จะเขียนได้เป็น

$$p'' - \frac{1 - 2n}{2n} gp^{(1 + \frac{2n}{1 - 2n})} = 0 \quad (\text{ผ.3})$$

เนื่องจากในช่วงนี้ $h \approx H$ ดังนั้น

$$p^{\left(\frac{2n}{1 - 2n}\right)} \approx \frac{1}{H}$$

และสมการ (ผ.3) เขียนได้ว่าเป็น

$$p'' - \frac{1-2n}{2n} \frac{g}{H} p = 0 \quad (\text{ผ.4})$$

ซึ่งมีความถูกต้องตามนัยของสมการ (4) ในช่วง $h = H$ สมการ (ผ.4) เป็นสมการเชิงเส้นตรงและสามารถแก้ได้ง่าย ๆ ตามวิธีปกติที่มีเขียนไว้ในหนังสือทั่ว ๆ ไป

สำหรับเงื่อนไขในสมการ (5) ในกรณีของ p จะเขียนได้ว่าเป็น

$$\begin{aligned} 1. \quad p(0) &= H^{\left(\frac{2n-1}{2n}\right)} \\ \text{และ} \quad 2. \quad p'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ผ.5})$$

ผลจากการแก้สมการ (ผ.4) เพื่อให้ถูกต้องตามเงื่อนไขในสมการ (ผ.5) จะได้ว่า

$$p = H^{\left(\frac{2n-1}{n}\right)} \cosh \left(\sqrt{\frac{(1-2n)g}{2nH}} t \right) \quad (\text{ผ.6})$$

หรือในเทอมของ h จะได้ว่า

$$h = H \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{(1-2n)g}{2nH}} t \right) \right]^{\frac{2n}{1-2n}} \quad (\text{ผ.7})$$

ซึ่งก็คือผลลัพธ์ปรากฏอยู่ในสมการ (6)

ช่วงหลัง ในช่วงนี้ h'' มีค่าน้อยกว่าเทอมอื่น ๆ ในสมการ (4) ดังนั้นจากสมการ (4) จะได้ว่า

$$h' = -\sqrt{2ngh} \quad (7)$$

ซึ่งอินทิเกรตได้ว่า

$$h = \left(C_0 - \sqrt{\frac{ng}{2}} t \right)^2 \quad (\text{ผ.8})$$

โดยที่ C_0 คือค่าคงที่จากการอินทิเกรต เนื่องจากเราได้ตัด h'' ทิ้ง ค่า h ในสมการ (ผ.8)

จึงเป็นเพียงค่าโดยประมาณเท่านั้น เราสามารถหาค่า h ที่ดีขึ้นกว่าเดิมได้โดยการแทนค่าสมการ

(ผ.8) ลงในสมการ (4) ติดต่อกันหลาย ๆ ครั้ง (successive approximation) สมมุติว่าค่าตั้งนี้ m ครั้ง จะได้ว่า

$$h = \left[C_m - \sqrt{\frac{n}{2} (1+n+n^2+\dots+n^m) g} t \right]^2$$

เนื่องจากอนุกรม (Series) ในวงเล็บภายใต้เครื่องหมายรากที่สองมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{1-n}$ ดังนั้น

$$h = \left[C_m - \sqrt{\frac{ng}{2(1-n)}} t \right]^2 \quad (\text{ผ.9})$$

ในการหาค่า C_m เราสามารถใช้เงื่อนไขที่ว่า สมการ (6) และ (ผ.9) จะต้องให้ค่า h ที่ต่อเนื่องกัน เนื่องจากในสมการ (6) เทอม Cosh สามารถแตกออกในรูปของซีรีส์ (series) ดังนั้น เราจึงสามารถเทียบเทอมที่มีค่ายกกำลังต่าง ๆ ของ t ในสมการ (6) และ (ผ.9) ได้ สำหรับเทอม t^0 จะได้ว่า

$$C_m = 2 \left(\frac{n}{1-2n} \right) \sqrt{H}$$

ถ้าแทนค่า C_m นี้ลงในสมการ (ผ.9) จะได้

$$h = \left[2 \left(\frac{n}{1-2n} \right) \sqrt{H} - \sqrt{\frac{ng}{2(1-n)}} t \right]^2 \quad (\text{ผ.10})$$

ซึ่งก็คือผลที่ปรากฏอยู่ในสมการ (8)

สัญลักษณ์

สัญลักษณ์ที่ใช้ในบทความมีความหมายดังต่อไปนี้

A	=	พื้นที่หน้าตัดของถัง
A _o	=	พื้นที่หน้าตัดของรู (orifice)
a	=	ค่าคงที่
C _o , C ₁ , C ₂ , ... C _m	=	ค่าคงที่
C _d	=	สัมประสิทธิ์การไหลของรู

g	=	ความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก
H	=	ระดับของเหลวในถัง ก่อนเริ่มการทดลองวิธีลดระดับ
h	=	ระดับของเหลวในถังขณะทำการทดลอง
K	=	สัมประสิทธิ์การสูญเสียพลังงาน
n	=	$R^2 C_d^2$
P_o	=	ความดันบรรยากาศ
P_l	=	ความดันของของเหลวที่ก้นถัง
p	=	h^a
Q	=	อัตราการไหลผ่านรู
R	=	A_o/A
t	=	เวลา
γ	=	น้ำหนักจำเพาะของของเหลว
β	=	ค่าคงที่แสดงความชันของกราฟที่ได้จากข้อมูลการทดลอง