

การหา Governing Equations ของ Ribbed Slabs

โดย Variational Principle

ดร.อินทรชัย ทอวิจิตร*

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงวิธีการหา governing equations ของ ribbed slabs โดยใช้ variational principle ซึ่งเริ่มด้วยความสัมพันธ์ระหว่าง strains กับ displacements ที่ได้จากสมมติฐานเบื้องต้นที่กำหนดขึ้น และ virtual work principle ทำให้ได้ equilibrium equations พร้อมทั้ง boundary conditions ทั้งหมด และในที่สุดจะได้ governing equations จากการหาความสัมพันธ์ระหว่าง stress resultants กับ displacements แล้วแทนลงใน equilibrium equations

Abstract

A rational analysis of ribbed slabs is carried out by a variational principle. Starting from strain-displacement relations, being derived from certain basic assumptions, and the virtual work principle, the equilibrium equations and a set of natural boundary conditions are obtained. Finally, substituting the stress resultant-displacement relations into the equilibrium equations leads to the governing differential equations.

1. บทนำ

Ribbed slabs เป็นแผ่นพื้นซึ่งประกอบด้วย top slab และ ribs ในทิศทางเดียว มักใช้ในโครงสร้างที่ต้องการให้ช่วงเสาหรือช่วงคานค่อนข้างกว้าง การคำนวณออกแบบพื้นประเภทนี้มักใช้ทฤษฎีของคานรูปตัวที ซึ่ง ribs จะเป็นส่วนรับกำลังแทบทั้งหมดในทิศทางเดียว Governing equations ของ ribbed slabs ที่ได้จากบทความนี้ เป็นผลจากการใช้กำลังร่วมกันระหว่าง top slab และ ribs ซึ่งจะช่วยให้การคำนวณออกแบบพื้นประเภทนี้มีความถูกต้อง และประหยัดยิ่งขึ้น

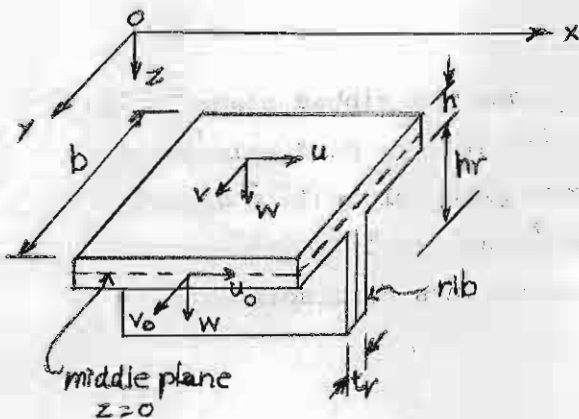
Variational principle สามารถใช้แก้ปัญหาทาง mechanics ต่าง ๆ ได้มากดังแสดงไว้ในหนังสือของ WASHIZU 1 และ LANCZOS 2 เป็นต้น HOVICHITR et al 3 ใช้วิธีวิเคราะห์ waffle slabs การใช้ variational principle ในการหา governing equation

*อาจารย์, ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ของปัญหาทาง mechanics ให้ผลดีมากเนื่องจากทำให้ได้ stress resultants ทั้งหมดที่เกี่ยวข้อง รวมทั้ง boundary conditions ทั้งหมดด้วย

2. สมมุติฐานเบื้องต้น

รูปที่ 1 แสดง typical element ของ ribbed slab และแสดง displacements ในทิศทางบวกสำหรับหน่วยแรงใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมายตาม TIMOSHENKO and GOODIER [4]



สมมุติฐานที่ใช้คือ

- ก) การขจัดมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดของพื้น
- ข) top slab และ ribs มีลักษณะเป็นแผ่นบาง
- ค) จุดซึ่งอยู่บนเส้นที่ดึงจากกับ middle surface จะยังคงอยู่บนเส้นตั้งฉากนั้น หลังจากเกิด deformation.

รูปที่ 1 Typical element ของ ribbed slab

- ง) หน้าตัดของ ribs ไม่มีการบิดเบี้ยว
- จ) shear strain บน middle plane และตามแนวความหนาของ ribs มีค่าน้อยจนตัดทิ้งได้

3. ความสัมพันธ์ระหว่าง Strains กับ Displacements

จากสมมุติฐานดังกล่าว จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง strains กับ displacements ดังนี้

สำหรับ top slab : จาก $w(x,y,z) = w(x,y)$ (1a)

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - zw'(x,y) \quad (1b)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - zw''(x,y) \quad (1c)$$

ได้ $\epsilon_x = u'_0 - zw''$, $\epsilon_y = v'_0 - zw''$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = u'_0 + v'_0 - 2zw''$ (2a-c)

$$\epsilon_z = 0, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0, \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0 \quad (2d-f)$$

โดยที่เครื่องหมาย ' และ ° แทน $\frac{\partial}{\partial x}$ และ $\frac{\partial}{\partial y}$ ตามลำดับ

$$+ \left[\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} (\bar{\sigma}_y \delta v + \bar{\tau}_{yx} \delta u + \bar{\tau}_{yz} \delta w) dz dx \right]_{y=b_1}^{y=b_2} \quad (7)$$

$q(x,y)$ คือน้ำหนักที่กระทำบนพื้น $x = a_1, a_2$ และ $y = b_1, b_2$ คือ ตำแหน่งขอบทั้งสี่ของพื้น ส่วนเครื่องหมาย $\sim$ แสดงถึงหน่วยแรงภายนอกกระทำที่ขอบพื้น

แทนค่าสมการ (6) และ (7) ลงในสมการ (5) โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง strains กับ displacements ในสมการ (2) และ (4) และใช้ Green's formula

$$\iint_R (\bar{v}' - \bar{u}) dx dy = \oint_C (u dx + v dy)$$

จะได้ equilibrium equations สำหรับ ribbed slabs ที่มี ribs ที่เหมือนกันในทิศทางเดียว (ทิศทาง x) และช่วงห่างของแต่ละ ribs เท่ากัน ดังนี้

$$\dot{N}_x + \dot{M}_{yx} = 0 \quad , \quad \dot{N}_{xy} + \dot{N}_y = 0 \quad (8a,b)$$

$$\dot{M}_y + \dot{M}_{xy} + \dot{M}_{yx} + \dot{M}_y + q(x,y) = 0 \quad (8c)$$

และ boundary conditions คือ

ที่ $x = a_1$ และ a_2 ,

$$N_x = \bar{N}_x \quad \text{หรือ} \quad u_o = \text{ค่าคงที่} \quad (9a)$$

$$N_{xy} = \bar{N}_{xy} \quad \text{หรือ} \quad v_o = \text{ค่าคงที่} \quad (9b)$$

$$V_x = \bar{Q}_x + \dot{M}_{xy} - \dot{M}_{xz,r} \quad \text{หรือ} \quad w = \text{ค่าคงที่} \quad (9c)$$

$$M_x^* = \bar{M}_x + \dot{M}_{w,r} \quad \text{หรือ} \quad \dot{w} = \text{ค่าคงที่} \quad (9d)$$

$$M_{z,r} = \bar{M}_{z,r} \quad \text{หรือ} \quad \dot{v}_o = \text{ค่าคงที่} \quad (9e)$$

ที่ $y = b_1$ และ b_2 ,

$$N_{yx} = \bar{N}_{yx} \quad \text{หรือ} \quad u_o = \text{ค่าคงที่} \quad (10a)$$

$$N_y = \bar{N}_y \quad \text{หรือ} \quad v_o = \text{ค่าคงที่} \quad (10b)$$

$$V_y = \bar{Q}_y + \dot{M}_{yx} \quad \text{หรือ} \quad w = \text{ค่าคงที่} \quad (10c)$$

$$M_y = \bar{M}_y \quad \text{หรือ} \quad \dot{w} = \text{ค่าคงที่} \quad (10d)$$

และที่มุมทั้งสี่

$$R = \bar{M}_{xy} + \bar{M}_{yx} - \bar{M}_{xz,r} \quad \text{หรือ } w = \text{ค่าคงที่} \quad (11a)$$

$$\hat{M}_y = \bar{M}_{w,r} \quad \text{หรือ } w = \text{ค่าคงที่} \quad (11b)$$

โดยที่

$$N_x = N_{x,p} + N_{x,r}, \quad N_{xy} = N_{xy,p} + M'_{z,r} \quad (12a,b)$$

$$M_x = M_{x,p} + M_{x,r}, \quad M_{xy} = M_{xy,p} - 2M_{xz,r} + M'_{w,r} \quad (12c,d)$$

$$Q_x = M'_x + \dot{M}_{yx}, \quad V_x = Q_x + \dot{M}_{xy}, R = -M_{xy} - M_{yx} \quad (12e-g)$$

$$M_x^* = M_x + \dot{M}_{w,r}, \quad \hat{M}_x = M_{w,r} \quad (12h,i)$$

และ

$$N_{x,p} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_{x,r} = \frac{1}{b} \iint_{A_r} \sigma_x dA, \quad N_{xy,p} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (13a-c)$$

$$M_{x,p} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_{x,r} = \frac{1}{b} \iint_{A_r} \sigma_x z dA, \quad M_{xy,p} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (13d-f)$$

$$M_{xz,r} = \frac{1}{b} \iint_{A_r} \tau_{xz} t dA, \quad M_{z,r} = \frac{1}{b} \iint_{A_r} \sigma_x t dA, \quad M_{w,r} = \frac{1}{b} \iint_{A_r} \sigma_x z t dA \quad (13g-i)$$

ในสมการ (12) และ (13) เป็น stress resultants ในทิศทาง x สำหรับในทิศทาง y จะอยู่ในรูปเดียวกันโดยให้ตัดตัวที่มี subscript r ออกทั้งหมด เนื่องจากไม่มี ribs ในทิศทาง y

มีข้อสังเกตเกี่ยวกับ stress resultants ที่ได้คือ bimoment stress resultant $M_{w,r}$ ซึ่งทำให้เกิด supplemented moment stress resultant M_x^* และ corner moment $\hat{M}_x$ จะเห็นว่าอยู่ในลักษณะเดียวกับที่ M_{xy} และ M_{yx} ทำให้เกิด supplemented shear stress resultants และ corner forces.

5. ความสัมพันธ์ระหว่าง Stress resultants กับ Displacements

นำความสัมพันธ์ระหว่าง stresses กับ strains ของ top slab

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (14a-c)$$

และของ rib

$$\sigma_x = E_r \epsilon_x, \quad \tau_{xz} = G_r \gamma_{xz} \quad (15a,b)$$

แทนค่าในสมการ (12) โดยอาศัยสมการ (13) ตลอดจนความสัมพันธ์ระหว่าง strains กับ displacements ในสมการ (2) และ (4) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง Stress resultants กับ displacements ในทิศทาง x ดังนี้

$$N_x = (B+B_r) u_o'' + vBv_o'' - C_r w''' \quad (16a)$$

$$N_{xy} = \frac{1}{2} (1-v) B(u_o'' + v_o'') - B_r v_o'' + C_r w''' \quad (16b)$$

$$M_x = -(D+D_r) w'' - vD v_o'' + C_r u_o' \quad (16c)$$

$$M_{xy} = -[(1-v)D+H_r] w'' - C_r v_o'' + D_r w''' \quad (16d)$$

$$Q_x = -(D+D_r) w''' - D v_o''' + C_r u_o'' \quad (16e)$$

$$M_{z,r} = C_r w'' - B_r v_o'', \quad M_{w,r} = D_r w'' - C_r v_o'' \quad (16f,g)$$

$$\text{ซึ่ง } B = Eh/(1-v^2), \quad D = Eh^3/12(1-v^2), \quad B_r = E_r A_{rr} \quad (17a-c)$$

$$C_r = E_r S_{y,r}, \quad D_r = E_r I_{y,r}, \quad H_r = t_r^2 A_{rr} G_r/3 \quad (17d-f)$$

$$B_r^* = t_r^2 B_r/12, \quad C_r^* = t_r^2 C_r/12, \quad D_r^* = t_r^2 D_r/12 \quad (17g-i)$$

$$\text{และ } A_{rr} = \frac{1}{b} \iint_{A_r} dA, \quad S_{y,r} = \frac{1}{b} \iint_{A_r} z dA, \quad I_{y,r} = \frac{1}{b} \iint_{A_r} z^2 dA \quad (14a-c)$$

E_r, E_r และ G_r คือ Young's modulus ของ top slab และของ ribs และ modulus of rigidity ของ ribs ตามลำดับ v คือ Poisson's ratio ของ top slab.

สำหรับในทิศทาง y ความสัมพันธ์ระหว่าง stress resultants กับ displacements สามารถเขียนได้ในลักษณะเดียวกัน โดยให้ตัดทุกเทอมที่มี subscript r ออก

6. Governing Equations

แทนค่า Equilibrium equations (8) ด้วยความสัมพันธ์ระหว่าง stress resultants กับ displacements ในทิศทาง x และ y จะได้ governing differential equations ในรูป

$$(B+B_r) u_o'' + B_1 u_o'' + B_2 v_o'' - C_r w''' = 0 \quad (15a)$$

$$B v_o'' + B_1 v_o'' + B_2 u_o'' - B_r v_o'' + C_r w''' = 0 \quad (15b)$$

$$(D+D_r) w'' + (2D+H_r) w'' + D v_o'' - C_r u_o' + C_r^* v_o'' - D_r^* w''' = q(x,y) \quad (15c)$$

โดยมี $B_1 = (1-\nu) B/2$ และ $B_2 = (1+\nu) B/2$ จากสามสมการนี้เราสามารถทำให้อยู่ในรูปของสมการเดียวที่มี independent variable ตัวเดียวคือ u_0 หรือ v_0 หรือ w ได้ ซึ่งจะ เป็น partial differential equation ที่มี 10th และ 8th partial derivatives ใน x และ y ตามลำดับ ความจริงข้อนี้อาจสังเกตได้จากจำนวน boundary conditions ในทิศทาง x และ y ซึ่งมีอยู่ 10 และ 8 conditions ตามลำดับ

7. บทสรุปและวิจารณ์

จาก governing equations ที่ได้จะเห็นว่าสามารถแยกได้ชัดเจนว่าเทอมใดเป็นผลมาจาก top slab หรือ ribs และเป็นผลต่อแผ่นพื้นทั้งระบบอย่างไร ถ้าตัดเทอมที่เป็นผลจาก ribs (ที่มี subscript r) สมการที่เหลือจะเป็น governing equation ของ isotropic thin plate ที่มี middle plane อยู่ที่ plane $z = 0$

ในการเปรียบเทียบกำลังของ ribbed slab กับคานรูปตัวที อาจทำได้ง่าย ๆ โดยศึกษา ในกรณี cylindrical bending ของ ribbed slab ที่มี supports ตามแนว $x = a_1$ และ a_2 ในกรณีนี้สามารถเขียนได้ว่า v_0 และ partial derivatives ของ u_0 และ w เทียบกับ y มีค่าเป็นศูนย์ สมการ (15c) จะลดลงและเขียนได้ในรูป $w'''' = q/D_{xx}$ โดยที่ $D_{xx} = D + D_r - e_r^2 (B+B_r)$ และ $e_r = C_r / (B+B_r)$ สำหรับคานรูปตัวทีจะมี governing equation ในรูปเดียวกัน แต่ D_{xx} จะมีค่าเป็น EI และ I เป็น

moment of inertia รอบ neutral axis

ของหน้าตัดคาน นั่นคือ $I_{N.A.} = I_y - e^2 A$

$= I_{y,p} + I_{y,r} - e^2 (A_p + A_r)$, A คือพื้นที่

หน้าตัดของคาน subscripts p และ r แสดง

ถึงส่วนของคานดังแสดงในรูปที่ 3 เมื่อเปรียบเทียบ

ค่า D_{xx} ซึ่งเป็น flexural rigidity ของทั้งสอง

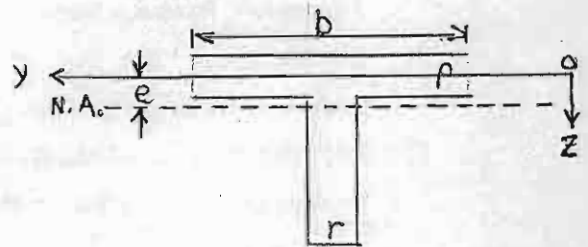
กรณี จะเห็นว่าของ ribbed slabs มีค่ามากกว่าซึ่งเป็นผลเนื่อง

จาก Poisson's ratio ν ของวัสดุ ในส่วนของ top slab ทำให้ ribbed slabs แข็งแรง

และรับน้ำหนักได้มากกว่าคานรูปตัวที ดังนั้นในการคำนวณออกแบบ ribbed slabs ที่มีขนาดและระยะห่างของ ribs เท่ากัน โดยไม่ห่างกันมากนักเมื่อเทียบกับขนาดของ rib อาจประมาณได้โดยใช้

flexural rigidity D_{xx} ของ ribbed slab ดังกล่าว

การใช้สมการ (15) โดยตรงในการวิเคราะห์ ribbed slabs ที่มี boundary conditions ต่าง ๆ กัน อาจทำได้ยากเนื่องจากเป็น partial differential equations ที่มี order สูง การลด order ของสมการนี้โดยใช้สมมุติฐานที่เหมาะสม ให้เหลือเพียงสมการ fourth order ของ w ตามรูปของสมการแบบ Huber [5] โดยให้ผลใกล้เคียงกับสมการเดิมจึงเป็นสิ่งจำเป็นและน่าศึกษา เพื่อให้ได้สมการที่สามารถนำไปใช้ได้กว้างขวางยิ่งขึ้น



รูปที่ 3 แสดงหน้าตัดของคานรูปตัวที

8. สัญลักษณ์

A_r	พื้นที่หน้าตัดของ rib	$M_{w,r}$	bimoment ของ rib ต่อหนึ่ง หน่วยความยาวตามแกน y
b	ระยะห่างของ ribs	$\hat{M}_x$	corner moment
h	ความหนาของ top slab	p,r	subscripts แทน top slab และ rib ตามลำดับ
h_r	ความสูงของ rib	t_r	ความหนาของ rib
M_r^*	supplemented bending moment ในทิศทาง x ต่อหนึ่ง หน่วยความยาวตามแกน y	u_o, v_o	displacements ของ middle plane ของ top slab ใน ทิศทาง x และ y ตามลำดับ
$M_{z,r}$	bending moment รอบแกน z ของ rib ต่อหนึ่งหน่วยความยาว ตามแกน y	w	deflection ของ plate

9. เอกสารอ้างอิง

1. WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, London, 1968.
2. LANCZOS, C.: The Variational Principles of Mechanics. Univ. of Toronto Press, Toronto, 1970.
3. HOVICHITR, I., KARASUDHI, P., NISHINO, F., and LEE, S.L.: A Rational Analysis of Plates with Eccentric stiffeners. Proceedings, IABSE, P-9/77, 1977.
4. TIMOSHENKO, S., and GOODIER, J.N.: Theory of Elasticity. McGraw Hill Book Co., Inc., New York, 1951.
5. HUBER, M.T.: Die Theorie der Kreuzweise bewehrten Eisenbeton-platten nebst Anwendungen auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben uber Rechteckige Platten. Bauingenieur, Vol. 4, 1923, p. 354-360, 392-395.