

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าเชิงเส้นโดยการแบ่งส่วน

Electrical Circuit Analysis by Tearing

สุรัชย์ ลัมยั้ง เจริญ*

เนื้อเรื่องกล่าวถึงการวิเคราะห์วงจรโดยสมการของ node โดยอาศัยสมการจากตัวอย่างแล้วขยายออกเป็นสมการทั่วไป ในตอนแรกเสนอวิธีที่ใช้กันตามปกติคือการแก้ปัญหาวงจร และตอนหลังเสนอวิธีที่แบ่งส่วนวงจรคิดเป็นส่วน ๆ แล้วนำผลที่ได้มารวมกัน

การวิเคราะห์วงจรทั้งวงจรโดยอาศัยสมการ node

พิจารณาวงจรตัวอย่างในรูปที่ ๑ เพื่อความง่ายในการวิเคราะห์เราถือว่าแต่ละ element ของวงจรไม่ได้มีการเชื่อมโยงร่วมซึ่งกันและกัน เราสามารถเขียนสมการของ node ๑, ๒, ๓ และ ๔ ในรูปของแมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_3 + y_7 & -y_3 & 0 & -y_7 \\ -y_3 & y_2 + y_3 + y_8 & -y_8 & 0 \\ 0 & -y_8 & y_4 + y_6 + y_8 & -y_6 \\ -y_7 & 0 & -y_6 & y_5 + y_6 + y_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad \text{-----(1)}$$

โดยที่เราให้

$$\begin{aligned} y_1 &= 1/Z_1 & y_5 &= 1/Z_5 \\ y_2 &= 1/Z_2 & y_6 &= 1/Z_6 \\ y_3 &= 1/Z_3 & y_7 &= 1/Z_7 \\ y_4 &= 1/Z_4 & y_8 &= 1/Z_8 \end{aligned}$$

จากสมการที่ (๑) ของตัวอย่าง เราสามารถเขียนสมการในรูปทั่ว ๆ ไปได้เป็น

$$Y_{\text{node}} E_{\text{node}} = I_{\text{node}} \quad \text{----- (2)}$$

และเราสามารถหาเวกเตอร์ E_{node} ได้โดยการทำ inverse matrix Y_{node} คือ

$$E_{\text{node}} = (Y_{\text{node}})^{-1} I_{\text{node}} \quad \text{----- (3)}$$

* อาจารย์, ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า, มหาวิทยาลัยขอนแก่น

หรือถ้าเราให้

$$Z_{\text{node}} = (Y_{\text{node}})^{-1} \quad \text{-----}(4)$$

เราจะได้

$$E_{\text{node}} = Z_{\text{node}} I_{\text{node}} \quad \text{-----}(5)$$

และจากตัวอย่างถ้าเราให้

$$Z_1 = Z_2 = Z_4 = Z_5 = 1 \text{ ohm}$$

$$Z_3 = Z_6 = Z_7 = Z_8 = 2 \text{ ohm}$$

และ

$$I_1 = 2 \text{ amps}$$

$$I_2 = 1 \text{ amp}$$

$$I_3 = -1 \text{ amp}$$

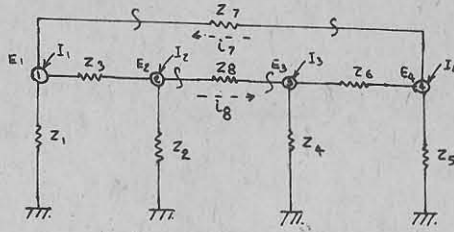
$$I_4 = 3 \text{ amps}$$

เราจะได้

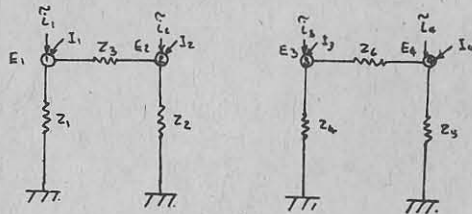
$$\begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 2 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 2 \\ E_2 & 1 \\ E_3 & -1 \\ E_4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{--(6)}$$

อาศัยสมการที่ (๓) หาคำตอบของ E_{node} โดยการ inverse matrix จะได้

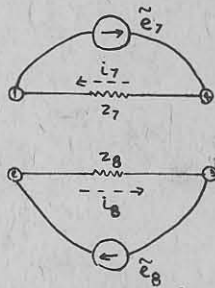
$$E_{\text{node}} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.00 \\ 0.25 \\ 2.00 \end{bmatrix} \text{ volts} \quad \text{-----}(7)$$



รูปที่ 1. วงจรเชิงเส้นเริ่มแรก



รูปที่ 2. วงจรที่ถูกแยกส่วน (หรือวงจรสมมูล)



รูปที่ 3. branch ที่ถูกแยกออกมา

การแบ่งส่วนวงจรวิเคราะห์โดยอาศัยสมการ node

จากรูปที่ ๑ ถ้าเราแยก branch ที่ ๗ และ branch ที่ ๘ ออกจากวงจรไปต่างหาก เราจะได้วงจรย่อย ๒ ส่วน เราใช้แหล่งจ่ายกระแสเทียมจ่ายเข้า node ที่ต่อกับ branch ที่ยกออกไปเพื่อชดเชยผลเนื่องจาก branch ที่ยกออกไปนั้นดังรูปที่ ๒ ซึ่งถือว่าเป็นวงจรที่สมมูลกับวงจรในรูปที่ ๑ ส่วน branch ที่ ๗ และ branch ที่ ๘ กับแหล่งจ่ายกระแสเทียม หรือในทางกลับกันเราใช้แหล่งจ่ายแรงดันเทียม (ในทิศทางที่ทำให้เกิดกระแสในทิศทางเดิมในวงจรแรกเริ่ม) ดังรูปที่ ๓ เราถือเป็นส่วนของ branch ที่ยกออก เราสามารถเขียนกระแสจากแหล่งจ่ายกระแสเทียมในรูปของกระแสของ branch ที่ยกออกได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \tilde{i}_1 \\ \tilde{i}_2 \\ \tilde{i}_3 \\ \tilde{i}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} \text{ ----- (8)}$$

หรือในลักษณะของสมการแมทริกซ์ของวงจรทั่ว ๆ ไป

$$\tilde{i}_s = C i_r \text{ ----- (9)}$$

โดยที่

$\tilde{i}_s$ เป็นเวกเตอร์ของแหล่งจ่ายกระแสเทียมที่จ่ายเข้า node ของแต่ละส่วนของวงจร

i_r เป็นเวกเตอร์ของกระแสที่ไหลผ่าน branch ที่ยกออก

C เป็นแมทริกซ์ที่แสดงลักษณะการต่อของ branch ที่ยกออกกับ node ของวงจรส่วนย่อย ซึ่งมี element ที่นิยามดังนี้

$$c_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ branch k ต่อและมีทิศทางเข้าหา node j} \\ -1 & \text{เมื่อ branch k ต่อและมีทิศทางออกจาก node j} \\ 0 & \text{เมื่อ branch k ไม่ต่ออยู่กับ node j} \end{cases}$$

และสามารถแสดงแรงดันคร่อม branch ที่ยกออกในรูปของแรงดันที่ node ของวงจรย่อยได้เป็น

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_7 \\ \tilde{e}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} \text{ ----- (10)}$$

หรือในลักษณะของสมการแมทริกซ์ของวงจรทั่ว ๆ ไป

$$\tilde{e}_r = B E_s \text{ ----- (11)}$$

โดยที่

$\tilde{e}_r$ เป็นเวกเตอร์ของแหล่งกำเนิดแรงดันเทียมคร่อม branch ที่ยกออก

E_s คือเวกเตอร์ของแรงดันที่ node ของวงจรส่วนย่อย

B คือแมทริกซ์แสดงการต่อของแหล่งจ่ายแรงดันเทียมกับ node ของส่วนย่อยของวงจร

$$b_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ branch k ต่อและมีทิศทางเข้า node j} \\ -1 & \text{เมื่อ branch k ต่อและมีทิศทางออกจาก node j} \\ 0 & \text{เมื่อ branch k ไม่ต่อกับ node j} \end{cases}$$

จากสมการที่ (๘) และสมการที่ (๑๐) และจากนิยามของ C และ B เราจะได้ว่า

$$B = -C^T$$

ดังนั้นสมการที่ (๑๑) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\tilde{e}_r = -C^T E_S \quad \text{-----} (12)$$

สำหรับวงจรส่วนย่อยในรูปที่ ๒ เราเขียนสมการ node ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_3 & -y_3 \\ -y_3 & y_2 + y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + \tilde{i}_1 \\ I_2 + \tilde{i}_2 \end{bmatrix} \quad \text{-----} (13)$$

$$\begin{bmatrix} y_4 + y_6 & -y_6 \\ -y_6 & y_5 + y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 + \tilde{i}_3 \\ I_4 + \tilde{i}_4 \end{bmatrix} \quad \text{-----} (14)$$

หรือสามารถรวมเขียนได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|cc} y_1 + y_3 & -y_3 & 0 & 0 \\ -y_3 & y_2 + y_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & y_4 + y_6 & -y_6 \\ 0 & 0 & -y_6 & y_5 + y_6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + \tilde{i}_1 \\ I_2 + \tilde{i}_2 \\ I_3 + \tilde{i}_3 \\ I_4 + \tilde{i}_4 \end{bmatrix} \quad \text{---} (15)$$

นำมารวมกันเข้าเป็นสมการแมทริกซ์ได้ในรูป

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{AA} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{Y}_{BB} \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A + \tilde{i}_A \\ I_B + \tilde{i}_B \end{bmatrix} \quad \text{-----} (16)$$

ในรูปของวงจรทั่ว ๆ ไปเขียนได้เป็น

$$\tilde{Y}_{SS} E_S = I_S + \tilde{i}_S \quad \text{-----} (17)$$

สำหรับ branch ที่ถูกยกออกเขียนสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} z_7 & 0 \\ 0 & z_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_7 \\ \tilde{e}_8 \end{bmatrix} \quad \text{-----} (18)$$

หรือในกรณีทั่ว ๆ ไป

$$Z_{rr} \quad i_r = \tilde{e}_r \quad \text{-----} (19)$$

แทนสมการที่ (๑๒) ลงในสมการที่ (๑๔) และสมการที่ (๔) ลงในสมการที่ (๑๗) เราจะได้

$$Z_{rr} \quad i_r = -C^T E_S \quad \text{-----} (20)$$

$$\tilde{Y}_{SS} \quad E_S = I_S + C i_r \quad \text{-----} (21)$$

เราแก้สมการเป็นขั้นตอนเพื่อหาคำตอบได้ดังต่อไปนี้
จากสมการที่ (๒๑)

$$E_S = (\tilde{Y}_{SS})^{-1} (I_S + C i_r) \quad \text{-----} (22)$$

แทนสมการที่ (๒๒) ลงในสมการที่ (๒๐)

$$(Z_{rr} + C^T \tilde{Y}_{SS}^{-1} C) i_r + C^T \tilde{Y}_{SS}^{-1} I_S = 0 \quad \text{-----} (23)$$

ให้

$$\tilde{Z}_{rr} \triangleq Z_{rr} + C^T \tilde{Y}_{SS}^{-1} C \quad \text{-----} (24)$$

จะได้

$$i_r = -\tilde{Z}_{rr}^{-1} C^T \tilde{Y}_{SS}^{-1} I_S \quad \text{-----} (25)$$

ซึ่งทำให้หา E_S ได้เป็น

$$E_S = \tilde{Y}_{SS}^{-1} I_S - \tilde{Y}_{SS}^{-1} \tilde{Z}_{rr}^{-1} C^T \tilde{Y}_{SS}^{-1} I_S \quad \text{-----} (26)$$

เนื่องจาก $\tilde{Y}_{SS}$ เป็น block ตามแนวทะแยงมุม จึงสามารถหา inverse ได้โดย inverse ของแต่ละ block โดยตรงซึ่งเป็นการ inverse แมทริกซ์ที่มีขนาดลดลง
ถ้าเรานิยามตัวแปรใหม่ ดังนี้

$$\tilde{E}_S \triangleq \tilde{Y}_{SS}^{-1} I_S \quad \text{-----} (27)$$

หรือ $\tilde{E}'_S$ เป็นส่วนของแรงดันที่ node ของวงจรย่อยที่เกิดจากแหล่งจ่ายกระแสของวงจร

$$\tilde{E}'_S \triangleq \tilde{Y}_{SS}^{-1} \tilde{i}_S \text{ ----- (28)}$$

หรือ $\tilde{E}''_S$ เป็นส่วนของแรงดันที่ node ของวงจรย่อยที่เกิดจากแหล่งจ่ายกระแสเทียมที่ขดเคียวการแยก branch ออกไป

เราสามารถจะหาผลตอบของวงจรเป็นขั้นตอนโดยจะใช้ตัวอย่างที่ผ่านมาโดยแทนค่าเป็นตัวเลข ดังนี้

- ขั้นตอนที่ ๑

หา node admittance matrix ของวงจรส่วนย่อยได้เป็น

$$\tilde{Y}_{AA} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y}_{BB} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

และหา inverse ของ node admittance matrix ของวงจรส่วนย่อย

$$\tilde{Y}_{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y}_{BB}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Y}_{SS}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.75 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \end{array} \right] \text{ ----- (29)}$$

- ขั้นตอนที่ ๒

impedance matrix ของ branch ที่แยกออก

$$\tilde{Z}_{rr} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ----- (30)}$$

หา $\tilde{Z}_{rr}$ จากสมการที่ (๒๔) ได้ดังนี้

$$\tilde{Z}_{rr} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Z}_{rr} = \begin{bmatrix} 3.5 & -0.5 \\ -0.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

นำ $\tilde{Z}_{rr}$ มาทำ inverse จะได้

$$\tilde{Z}_{rr}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.291667 & 0.041667 \\ 0.041667 & 0.291667 \end{bmatrix}$$

- ขั้นตอนที่ ๓

หา $\tilde{E}'_S$ จากสมการที่ (๒๗)

$$\tilde{E}'_S = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.25 \\ 0.00 \\ 2.00 \end{bmatrix}$$

- ขั้นตอนที่ ๔

หา i_r จากสมการที่ (๒๔) และ (๒๗) เราจะได้

$$i_r = -\tilde{Z}_{rr}^{-1} C^T \tilde{E}'_S \text{ ----- (31)}$$

$$i_r = \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.5 & 0.5 \\ 0.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.25 \\ 0.00 \\ 2.00 \end{bmatrix}$$

$$i_r = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

และหา i_S จากสมการที่ (๔) จะได้

$$i_S = \begin{bmatrix} 0.125 \\ -0.375 \\ 0.375 \\ -0.125 \end{bmatrix}$$

- ขั้นตอนที่ ๕

หา $\tilde{E}_S''$ โดยอาศัยสมการที่ (๒๔) จะได้

$$\tilde{E}_S'' = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -0.25 \\ 0.25 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

- ขั้นตอนที่ ๖

หา E_{node} ซึ่งก็คือ E_S จากสมการที่ (๒๖), (๒๗) และ (๒๘) คือ

$$E_{\text{node}} = E_S = \tilde{E}_S' + \tilde{E}_S'' \quad (32)$$

เราจะได้ผลขั้นสุดท้ายคือ

$$E_{\text{node}} = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 1.00 \\ 0.25 \\ 2.00 \end{pmatrix} \text{ volts} \quad (33)$$

ในกรณีที่วงจรที่วิเคราะห์มีขนาดใหญ่มาก ๆ เราสามารถแบ่งออกได้มากกว่า ๒ ส่วนที่แสดงในตัวอย่างโดย node admittance matrix จะมีลักษณะเป็น block diagonal ซึ่ง inverse ของมันทำได้โดยการ inverse แต่ละ block ดังที่แสดงข้างล่าง

$$\tilde{Y}_{SS} = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_{AA} & & 0 \\ & \tilde{Y}_{BB} & \text{---} \tilde{Y}_{NN} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}_{SS}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_{AA}^{-1} & & 0 \\ & \tilde{Y}_{BB}^{-1} & \text{---} \tilde{Y}_{NN}^{-1} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$E_S = \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix} \quad I_S = \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

$$\tilde{I}_S = \begin{bmatrix} \tilde{I}_A \\ \tilde{I}_B \\ \vdots \\ \tilde{I}_N \end{bmatrix}$$

การหา $\tilde{Y}_{SS}^{-1}$ สามารถทำได้โดยการ inverse แต่ละ block ของ $\tilde{Y}_{SS}$ ซึ่งเป็นการ inverse matrix ที่มีขนาดเล็กลงในกรณีที่เราใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์วิเคราะห์วงจร เราสามารถโหลดเข้ามาทีละ block ทำให้ลดความต้องการของหน่วยความจำลงไปได้มากทีเดียว

สรุป

เนื้อเรื่องเป็นการเสนอวิธีการวิเคราะห์วงจร โดยการแยกส่วนอาศัยสมการ node ซึ่งให้ผลเหมือนกับการวิเคราะห์ทั้งวงจร ซึ่งมีข้อได้เปรียบในด้านการคำนวณเมทริกซ์ขนาดเล็กลง สำหรับข้อเสียเปรียบก็คือขั้นตอนที่เพิ่มขึ้น

เอกสารอ้างอิง

1. Brameller, John and Scott; Practical Diakoptics for Electrical Networks.
2. Happ; "Diakoptics and Piecewise Methods", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 89, No.7, pp. 1373-1382 Sep/Oct 1970.